Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Чистяков, О многозначных отображениях конечной обобщенной вариации, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 4, 611–632

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm372>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 06:35:51

УДК 517.518.24+515.124

О МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ КОНЕЧНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ВАРИАЦИИ

В. В. Чистяков

Изучаются отображения, действующие из вещественного промежутка в метрические пространства и имеющие конечную обобщенную вариацию в смысле Жордана–Рисса–Орлича. Устанавливаются вложения функциональных пространств, структура отображений, скачки вариации, принцип выбора Хелли. Показано, что компактнозначное многозначное отображение конечной обобщенной вариации относительно хаусдорфовой метрики обладает регулярной селекцией конечной обобщенной вариации. Представлен результат о существовании селекций, сохраняющих свойства многозначного отображения, которое определено на прямом произведении промежутка и топологического пространства и имеет конечную обобщенную вариацию по первой переменной и полунепрерывно сверху по второй.

Библиография: 35 названий.

1. Введение. Многозначное отображение из множества E в множество X – это отображение F , ставящее в соответствие каждому элементу $t \in E$ некоторое (непустое) множество $F(t) \subset X$, называемое *образом* t . График F определяется как множество $\text{Gr}(F) = \{(t, x) \in E \times X \mid x \in F(t)\}$. Селекцией многозначного отображения F называется любое однозначное отображение $f: E \rightarrow X$, для которого $f(t) \in F(t)$ для всех $t \in E$.

Множество работ (например, [1]–[5]) посвящено непрерывным и измеримым селекциям при весьма общих предположениях относительно E и X . Непрерывные селекции существуют для многозначных отображений, как правило, имеющих выпуклые образы. Примеры [1], [6] показывают, что без этого условия выпуклости непрерывные селекции могут не существовать даже для непрерывных отображений из отрезка прямой в компактные подмножества $\mathbb{R}^2$ или для липшицевых отображений из $\mathbb{R}^3$ в компактные подмножества пространства $\mathbb{R}^3$. Интерес представляют селекции, наследующие глобальные (зависящие от всей области определения) характеристические свойства исходного многозначного отображения. Их мы будем называть *регулярными*.

Пусть $c(X)$ обозначает семейство всех непустых компактных подмножеств метрического пространства (X, d) . Хаусдорфова метрика на $c(X)$ определяется равенством $D(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}$, где

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} \text{dist}(x, B) \quad \text{и} \quad \text{dist}(x, B) = \inf_{y \in B} d(x, y), \quad A, B \in c(X). \quad (1)$$

Работа поддержана факультетом математики университета г. Лодзь, Польша (Wydział Matematyki Uniwersytet Łódzki), и Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 99-01-10644.

Вопрос о существовании регулярных селекций многозначного отображения ограниченной вариации приводит к отображениям со значениями в таком метрическом пространстве. Ниже изучаются свойства этих отображений: вложения функциональных пространств, структура отображений, скачки функции вариации, принцип выбора Хелли. В теореме 10 показано, что невыпуклозначные и без какого-либо ограничения на график многозначные отображения F из промежутка в $\mathbb{R}$ в компактные подмножества метрического пространства, имеющие конечную обобщенную Φ -вариацию, обладают селекциями, сохраняющими это свойство. Это существенно расширяет результаты о селекциях липшицевых, абсолютно непрерывных и имеющих ограниченную вариацию отображений, представленные в [7]–[9] (X конечномерно), а также [10, Д1.8] и [11]–[15] (X – банахово пространство и $\text{Gr}(F)$ компактен) и [16], [17] (когда X – произвольное метрическое пространство и $\text{Gr}(F)$ произволен). В последней теореме 15 установлено существование (непрерывных) селекций, наследующих свойства компактнозначного многозначного отображения, которое определено на прямом произведении промежутка вещественной прямой и некоторого топологического пространства и имеет конечную обобщенную Φ -вариацию по первому аргументу и полунепрерывно сверху по второму.

Результаты работы докладывались на XXIII международном летнем симпозиуме по вещественному анализу (21–26 июня 1999 г., г. Лодзь, Польша) и анонсированы в [18].

2. φ -функции и отображения конечной Φ -вариации. Функция Φ , действующая из $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ в $\mathbb{R}^+$, называется φ -функцией (например, [19, §2]), если она является непрерывной, неубывающей, неограниченной и $\Phi(\rho) = 0$ лишь при $\rho = 0$. Будем говорить, что φ -функция Φ удовлетворяет условию Орлича или что Φ является φ -функцией Орлича, если $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi(\rho)/\rho = \infty$. Множество всех выпуклых (вниз) φ -функций Орлича обозначим через $\mathcal{N}$.

Правая обратная для φ -функции Φ определяется правилом [20, гл. 1, §2]

$$\Phi_+^{-1}(r) = \sup\{\rho \geq 0 \mid \Phi(\rho) \leq r\}, \quad r \in \mathbb{R}^+.$$

Функция Φ_+^{-1} отображает $\mathbb{R}^+$ в $\mathbb{R}^+$, является непрерывной справа, неубывающей, неограниченной и обращается в нуль только в нуле, причем справедливы соотношения: $\Phi(\Phi_+^{-1}(r)) = r$ при $r \geq 0$, $\Phi_+^{-1}(\Phi(\rho)) \geq \rho$ при $\rho \geq 0$ и $\Phi_+^{-1}(\Phi(\rho) - \varepsilon) \leq \rho$ для $\rho > 0$ и $0 < \varepsilon < \Phi(\rho)$. Функция Φ есть правая обратная к Φ_+^{-1} . Для φ -функции Орлича Φ имеем

$$\lim_{r \rightarrow +0} r \Phi_+^{-1}\left(\frac{\vartheta}{r}\right) = \vartheta \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\rho}{\Phi(\rho)} = 0, \quad \vartheta \in \mathbb{R}^+. \quad (2)$$

Любая выпуклая φ -функция Φ строго возрастает, поэтому обратная к ней $\Phi^{-1} = \Phi_+^{-1}$ непрерывна и вогнута; кроме того, функции $\rho \mapsto \Phi(\rho)/\rho$ и $\omega_\Phi(\rho) = \rho \Phi^{-1}(1/\rho)$ не убывают при $\rho > 0$, поэтому существуют пределы

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{\Phi(\rho)}{\rho} \in \mathbb{R}^+, \quad [\Phi] = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\rho)}{\rho} \in (0, \infty] \quad \text{и} \quad \omega_\Phi(0) = \lim_{\rho \rightarrow +0} \omega_\Phi(\rho) \in \mathbb{R}^+,$$

причем $\omega_\Phi(0) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Phi \in \mathcal{N}$.

Пусть E есть бесконечное подмножество $\mathbb{R}$, (X, d) – метрическое пространство и X^E – множество всех отображений $f: E \rightarrow X$ из E в X .

Пусть

$$\mathcal{T}(E) = \{T = \{t_i\}_{i=0}^m \subset E \mid m \in \mathbb{N}, t_{i-1} < t_i, i = 1, \dots, m\}$$

есть множество всех разбиений E конечными упорядоченными наборами точек из E . Для φ -функции Φ , $f \in X^E$ и $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E)$ определим величину

$$V_\Phi[f; T] = \sum_{i=1}^m U(t_i, t_{i-1}), \quad \text{где} \quad U(t, s) = \Phi\left(\frac{d(f(t), f(s))}{t - s}\right)(t - s). \quad (3)$$

Отображение $f \in X^E$ называется *отображением конечной* (или *ограниченной*) Φ -*вариации* (в смысле Жордана–Рисса–Орлича), если существует константа $C \geq 0$ такая, что $V_\Phi[f; T] \leq C$ для всех $T \in \mathcal{T}(E)$. Наименьшая постоянная C с указанным свойством называется (*полной*) Φ -*вариацией* отображения f на E и обозначается через $\mathbf{V}_\Phi(f, E)$. Если $E = [a, b]$ есть отрезок, то $\mathcal{T}(E)$ в определении $\mathbf{V}_\Phi(f, E)$ можно заменить на множество $\mathcal{T}_a^b$ всех разбиений T отрезка $[a, b]$, т.е. $T = \{t_i\}_{i=0}^m$, где $m \in \mathbb{N}$ и $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$. Множество тех $f \in X^E$, для которых $\mathbf{V}_\Phi(f, E) < \infty$, обозначим через $BV_\Phi(E; X)$.

Если $\Phi(\rho) = \rho$, то приведенное определение $\mathbf{V}_\Phi(f, E)$ дает классическое понятие вариации в смысле Жордана [21, гл. 8], [22, гл. 4, § 9]. В этом случае $BV_\Phi(E; X)$ обозначается через $BV_1(E; X)$, а $\mathbf{V}_\Phi(f, E)$ – через $\mathbf{V}_1(f, E)$ и называется (1-) *вариацией* отображения f на E . Если $\Phi(\rho) = \rho^q$, где постоянная $q > 1$, то $\mathbf{V}_\Phi(f, E)$ определяет понятие q -вариации в смысле Ф. Рисса [23, гл. 2, § 3.36]. Случай, когда Φ есть выпуклая φ -функция Орлича, $E = [a, b]$ – отрезок и $X = \mathbb{R}$, изучался в работах [24]–[26].

Напомним, что если для $f \in X^E$ существует постоянная $C \geq 0$ такая, что $d(f(t), f(s)) \leq C|t - s|$ для всех $t, s \in E$, то f называется *липшицевым* (запись: $f \in \text{Lip}(E; X)$), а наименьшая такая постоянная C обозначается через $\mathbf{L}(f)$.

Отображение $f \in X^E$ называется *абсолютно непрерывным*, если существует функция $\delta: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого конечного набора точек $\{a_i, b_i\}_{i=1}^n \subset E$ таких, что $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n$, из условия $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq \delta(\varepsilon)$ вытекает, что $\sum_{i=1}^n d(f(b_i), f(a_i)) \leq \varepsilon$. Множество абсолютно непрерывных отображений из E в X обозначаем через $AC(E; X)$.

Рассмотрим вкратце случай, когда $(X, \|\cdot\|)$ – банахово пространство. В работе [27] показано, что липшицево отображение $f: [a, b] \rightarrow X$ может оказаться не дифференцируемым ни в одной точке интервала (a, b) ни сильно (в норме X), ни слабо (на каждом функционале из сильно сопряженного к X пространства), но если X рефлексивно, то любое отображение $f \in AC([a, b]; X)$ почти всюду на (a, b) сильно дифференцируемо и представимо в виде неопределенного интеграла Бохнера от своей сильной производной f' . Для выпуклой φ -функции Φ обозначим через $L_\Phi^0([a, b]; X)$ пространство всех (классов эквивалентности) сильно измеримых отображений $f \in X^{[a, b]}$, для которых конечен интеграл Лебега $\int_a^b \Phi(\|f(t)\|) dt$. В работе [14] доказана

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – рефлексивное банахово пространство и Φ – выпуклая φ -функция. Любое отображение $f \in BV_\Phi([a, b]; X)$ почти всюду на (a, b) имеет слабую производную $f^\bullet \in L_\Phi^0([a, b]; X)$ и

$$\int_a^b \Phi(\|f^\bullet(t)\|) dt \leq \mathbf{V}_\Phi(f, [a, b]).$$

Кроме того, если $\Phi \in \mathcal{N}$, то $f \in BV_\Phi([a, b]; X)$ тогда и только тогда, когда $f \in AC([a, b]; X)$ и существует сильная производная $f' \in L_\Phi^0([a, b]; X)$; в этом случае имеет место интегральная формула

$$\mathbf{V}_\Phi(f, [a, b]) = \int_a^b \Phi(\|f'(t)\|) dt.$$

При $X = \mathbb{R}$ критерий в этой теореме известен благодаря Φ . Риссу ([23, гл. 2, § 3.36], когда $\Phi(\rho) = \rho^q$, $q > 1$), Медведеву [24] и Цибертовичу и Матушевой [25] (если $\Phi \in \mathcal{N}$); в последней работе установлена также интегральная формула для Φ -вариации. Если же X – произвольное метрическое пространство, $\Phi \in \mathcal{N}$, $f \in X^{[a, b]}$ и $\nu(t) = \mathbf{V}_1(f, [a, t])$, $t \in [a, b]$, то справедлив следующий критерий (установленный в [14] в несколько более общем виде): $f \in BV_\Phi([a, b]; X)$ в том и только том случае, когда $\nu \in AC([a, b]; \mathbb{R})$ и $\nu' \in L_\Phi^0([a, b]; \mathbb{R})$. Более того, $\mathbf{V}_\Phi(f, [a, b]) = \int_a^b \Phi(|\nu'(t)|) dt$. В качестве следствия последнего критерия для произвольного метрического пространства X получаем, что

$$AC([a, b]; X) = \bigcup_{\Phi \in \mathcal{N}} BV_\Phi([a, b]; X).$$

В действительности имеет место более сильное утверждение. Напомним, что (см. [20, гл. 1, § 5]) функция $\Phi \in \mathcal{N}$ удовлетворяет Δ' -условию, если существуют постоянные $C > 0$ и $\rho_0 > 0$ такие, что $\Phi(\rho_1 \rho_2) \leq C \Phi(\rho_1) \Phi(\rho_2)$ для всех $\rho_1 \geq \rho_0$ и $\rho_2 \geq \rho_0$. В силу последнего критерия и [20, гл. 2, § 8.1] имеем: если X – метрическое пространство, то $f \in AC([a, b]; X)$ тогда и только тогда, когда можно указать удовлетворяющую Δ' -условию функцию $\Phi \in \mathcal{N}$ такую, что $f \in BV_{\Phi \circ \Phi}([a, b]; X)$; здесь через $\Phi \circ \Phi$ обозначена композиция функции Φ с самой собой.

Всюду ниже (если не сказано обратное) (X, d) – метрическое пространство.

Перечислим основные свойства Φ -вариации, которые потребуются далее. Положим $E_t^- = E \cap (-\infty, t]$, $E_t^+ = E \cap [t, \infty)$ и $E_s^t = E \cap [s, t]$, где $t, s \in E$, $s \leq t$.

ЛЕММА 2. Пусть Φ есть φ -функция и $f: E \rightarrow X$. Имеем

- (a) если $\emptyset \neq A \subset B \subset E$, то $\mathbf{V}_\Phi(f, A) \leq \mathbf{V}_\Phi(f, B)$;
- (b) если $t, s \in E$ и $s < t$, то $d(f(t), f(s)) \leq (t - s) \Phi_+^{-1}(\mathbf{V}_\Phi(f, E)/(t - s))$;
- (c) если $t \in E$, то $\mathbf{V}_\Phi(f, E_t^-) + \mathbf{V}_\Phi(f, E_t^+) \leq \mathbf{V}_\Phi(f, E)$; к тому же, если Φ есть выпуклая φ -функция, то $\mathbf{V}_\Phi(f, E_t^-) + \mathbf{V}_\Phi(f, E_t^+) = \mathbf{V}_\Phi(f, E)$;
- (d) если последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^E$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n(t), f(t)) = 0$ для всех $t \in E$, то $\mathbf{V}_\Phi(f, E) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V}_\Phi(f_n, E)$;
- (e) $\mathbf{V}_\Phi(f, E) = \sup\{\mathbf{V}_\Phi(f, E_s^t) \mid s, t \in E, s < t\}$;
- (f) если $s = \sup E \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ и $s \notin E$, то $\mathbf{V}_\Phi(f, E) = \lim_{E \ni t \rightarrow s} \mathbf{V}_\Phi(f, E_t^-)$;
- (g) если $i = \inf E \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ и $i \notin E$, то $\mathbf{V}_\Phi(f, E) = \lim_{E \ni t \rightarrow i} \mathbf{V}_\Phi(f, E_t^+)$;
- (h) если s и i такие, как в (f) и (g), $s \notin E$ и $i \notin E$, то также имеем

$$\mathbf{V}_\Phi(f, E) = \lim_{\substack{E \ni a \rightarrow i \\ E \ni b \rightarrow s}} \mathbf{V}_\Phi(f, E_a^b) = \lim_{E \ni b \rightarrow s} \lim_{E \ni a \rightarrow i} \mathbf{V}_\Phi(f, E_a^b) = \lim_{E \ni a \rightarrow i} \lim_{E \ni b \rightarrow s} \mathbf{V}_\Phi(f, E_a^b).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) и (b) являются следствиями определения Φ -вариации.

(с) Для разбиений $T_1 \in \mathcal{T}(E_t^-)$ и $T_2 \in \mathcal{T}(E_t^+)$ положим $\tilde{T}_i = T_i \cup \{t\}$, $i = 1, 2$. Тогда $\tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2 \in \mathcal{T}(E)$ и неравенство в (с) выполняется, поскольку

$$V_\Phi[f; T_1] + V_\Phi[f; T_2] \leq V_\Phi[f; \tilde{T}_1] + V_\Phi[f; \tilde{T}_2] = V_\Phi[f; \tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2] \leq V_\Phi(f, E).$$

Чтобы установить равенство, воспользуемся выпуклостью функции Φ . Рассмотрим разбиение $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E)$. Для случаев, когда $t \in T$, $t < t_0$ или $t_m < t$, ясно, что $V_\Phi[f; T] \leq V_\Phi(f, E_t^-) + V_\Phi(f, E_t^+)$. Если теперь $t_{k-1} < t < t_k$ при некотором $k \in \{1, \dots, m\}$, то

$$V_\Phi[f; T] = \left(\sum_{i=1}^{k-1} U(t_i, t_{i-1}) \right) + U(t_k, t_{k-1}) + \left(\sum_{i=k+1}^m U(t_i, t_{i-1}) \right) \quad (4)$$

(здесь отсутствует первая сумма, если $k = 1$, и последняя сумма, если $k = m$). Используя неравенство треугольника для d , возрастание Φ и неравенство Йенсена для сумм, находим, что

$$U(t_k, t_{k-1}) \leq U(t_k, t) + U(t, t_{k-1}), \quad (5)$$

так что соотношения (4) и (5) дают

$$V_\Phi[f; T] \leq V_\Phi[f; \{t_i\}_{i=0}^{k-1} \cup \{t\}] + V_\Phi[f; \{t\} \cup \{t_i\}_{i=k}^m] \leq V_\Phi(f, E_t^-) + V_\Phi(f, E_t^+).$$

(d) Учитывая непрерывность метрики d и функции Φ и поточечную сходимость f_n к f , достаточно при любом разбиении $T = \{t_i\}_{i=0}^m$ множества E перейти к нижнему пределу при $n \rightarrow \infty$ в неравенстве $V_\Phi[f_n; T] \leq V_\Phi(f_n, E)$ и заметить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_\Phi[f_n; T] = V_\Phi[f; T].$$

(е) В силу пункта (а) левая часть не меньше, чем правая. Обратно, для любого числа $\alpha < V_\Phi(f, E)$ найдется такое разбиение $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E)$, что $V_\Phi[f; T] \geq \alpha$, но $T \in \mathcal{T}(E_{t_0}^m)$, поэтому $V_\Phi(f, E_{t_0}^m) \geq V_\Phi[f; T] \geq \alpha$.

(f) Так как $s \notin E$, то s есть предельная точка множества E . В силу (а) функция $t \mapsto V_\Phi(f, E_t^-)$ из E в $[0, \infty]$ не убывает, поэтому написанный в (f) предел существует в $[0, \infty]$ и не превосходит $V_\Phi(f, E)$. С другой стороны, для любого числа $\alpha < V_\Phi(f, E)$ в силу (е) существуют числа $a, b \in E$, $a < b < s$, такие, что $V_\Phi(f, E_a^b) \geq \alpha$, откуда при любом $t \in E \cap [b, s) \neq \emptyset$ в силу (а) получаем, что $V_\Phi(f, E_t^-) \geq V_\Phi(f, E_a^b) \geq \alpha$ и следует равенство в (f).

(g) и первое равенство (h) доказываются аналогично (f). Для второго имеем

$$\begin{aligned} V_\Phi(f, E) &= \lim_{E \ni b \rightarrow s} V_\Phi(f, E_b^-) = \lim_{E \ni b \rightarrow s} \lim_{E \ni a \rightarrow i} V_\Phi(f, (E_b^-)_a^+) \\ &= \lim_{E \ni b \rightarrow s} \lim_{E \ni a \rightarrow i} V_\Phi(f, E_a^b). \end{aligned}$$

Последнее равенство в (h) можно доказать точно так же.

Неравенство в лемме 2(d) может быть строгим: последовательность функций

$$f_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \cos(2\pi nt)$$

равномерно относительно $t \in [0, 1]$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к функции $f \equiv 0$, а интегральная формула для Φ -вариации дает

$$V_\Phi(f_n, [0, 1]) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \Phi(\sin t) dt > 0,$$

где $n \in \mathbb{N}$ и Φ – выпуклая φ -функция.

ЛЕММА 3. Пусть Φ и Ψ – выпуклые φ -функции. Если множество E ограничено и выполняется условие Δ_{Φ}^{Φ} :

$$\limsup_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\Psi(\rho)}{\Phi(\rho)} < \infty,$$

то $BV_{\Phi}(E; X) \subset BV_{\Psi}(E; X)$. Обратно, если $E = [a, b]$ – отрезок, $(X, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство и $BV_{\Phi}(E; X) \subset BV_{\Psi}(E; X)$, то имеет место условие Δ_{Ψ}^{Φ} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие Δ_{Φ}^{Φ} эквивалентно тому, что $\Psi(\rho) \leq C\Phi(\rho)$ для всех $\rho \geq \rho_0$, где $C > 0$ и $\rho_0 > 0$ – некоторые постоянные. Для $f \in BV_{\Phi}(E; X)$ и $T \in \mathcal{T}(E)$ тогда имеем $V_{\Psi}[f; T] \leq \Psi(\rho_0)(\sup E - \inf E) + C\mathbf{V}_{\Phi}(f, E)$.

Напомним, что выпуклая φ -функция Φ имеет неубывающую непрерывную справа правую производную $\Phi'_+(\rho)$, $\rho \geq 0$, причем $\Phi'_+(\rho) > 0$ при $\rho > 0$, поэтому

$$\exists \rho(\Phi) > 0 \quad c(\Phi) > 0 : \quad \forall \rho \geq \rho(\Phi) \quad \Phi(\rho) \geq c(\Phi)\rho. \quad (6)$$

Если теперь условие Δ_{Ψ}^{Φ} нарушается, то найдется возрастающая к бесконечности последовательность положительных чисел $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой $\Psi(\rho_n) > 2^n \Phi(\rho_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Определим последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ в $[a, b]$ рекуррентно:

$$a_0 = a, \quad a_n - a_{n-1} = 2^{-n}(b-a) \frac{\Phi(\rho_1)}{\Phi(\rho_n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$f(t) = \begin{cases} (\rho_n(t - a_{n-1}) + S_{n-1})x, & \text{если } a_{n-1} \leq t < a_n, n \in \mathbb{N}, \\ S_{\infty}x, & \text{если } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq t \leq b, \end{cases}$$

где

$$S_0 = 0, \quad S_k = \sum_{i=1}^k \rho_i(a_i - a_{i-1}), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

$S_{\infty} < \infty$ в силу (6), $x \in X$, $\|x\| = 1$. Покажем, что $f \in BV_{\Phi}([a, b]; X)$, но $f \notin BV_{\Psi}([a, b]; X)$. Действительно,

$$\mathbf{V}_{\Phi}(f, [a, b]) = \sum_{n=1}^{\infty} U(a_n, a_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\rho_n)(a_n - a_{n-1}) = (b-a)\Phi(\rho_1) < \infty.$$

С другой стороны, для произвольного $m \in \mathbb{N}$ и $T_m = \{a_n\}_{n=0}^m$ имеем

$$\mathbf{V}_{\Psi}(f, [a, b]) \geq V_{\Psi}[f; T_m] = \sum_{n=1}^m \Psi(\rho_n) \frac{(b-a)\Phi(\rho_1)}{2^n \Phi(\rho_n)} \geq m(b-a)\Phi(\rho_1).$$

Из леммы 3 и утверждения (6) для выпуклой φ -функции Φ вытекает вложение множества $BV_{\Phi}(E; X)$ в $BV_1(E; X)$, а кроме того, если величина $[\Phi]$ (равная также супремуму $\sup_{\rho > 0} \Phi(\rho)/\rho$) конечна, то $BV_{\Phi}(E; X) = BV_1(E; X)$, что следует из неравенства $\mathbf{V}_{\Phi}(f, E) \leq [\Phi]\mathbf{V}_1(f, E)$ для $f \in BV_1(E; X)$.

3. Пространство отображений обобщенной Φ -вариации. Пусть (X, d) – метрическое пространство и $E \subset \mathbb{R}$. Для $\lambda > 0$ и выпуклой φ -функции Φ положим $\Phi_\lambda(\rho) = \Phi(\rho/\lambda)$, $\rho \in \mathbb{R}^+$. Там, где это не вызывает недоразумений, для краткости пишем BV_Φ вместо $BV_\Phi(E; X)$. Из леммы 3 находим, что $BV_{\Phi_\lambda} \subset BV_\Phi$ при $0 < \lambda \leq 1$ и $BV_\Phi \subset BV_{\Phi_\lambda}$ при $\lambda > 1$. Последнее включение, вообще говоря, строгое: например, если $\Phi(\rho) = e^\rho - 1$, $f(t) = t(1 - \log t)$ при $0 < t \leq 1$ и $f(0) = 0$, то, используя интегральную формулу для Φ -вариации из теоремы 1, получим $\mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(f, [0, 1]) = 1/(\lambda - 1)$ при $\lambda > 1$ и $\mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(f, [0, 1]) = \infty$ при $0 < \lambda \leq 1$. В силу леммы 3 обратное включение $BV_{\Phi_\lambda} \subset BV_\Phi$ при $\lambda > 1$ имеет место тогда и только тогда, когда Φ удовлетворяет Δ_2 -условию (см. [20, гл. 1, § 4], [19, § 3]): $\limsup_{\rho \rightarrow \infty} \Phi(2\rho)/\Phi(\rho) < \infty$, а это условие эквивалентно следующему: для любого числа $\lambda > 1$ существуют постоянные $C(\lambda) > 0$ и $\rho_0(\lambda) > 0$ такие, что $\Phi(\rho) \leq C(\lambda)\Phi(\rho/\lambda)$ для всех $\rho \geq \rho_0(\lambda)$. (Отметим, что если $[\Phi] < \infty$, то Φ удовлетворяет Δ_2 -условию.)

В общем случае для любой выпуклой φ -функции Φ *пространство отображений конечной обобщенной Φ -вариации* – это множество

$$GV_\Phi(E; X) = \bigcup_{\lambda > 0} BV_{\Phi_\lambda}(E; X). \quad (7)$$

Из сказанного выше следует, что если выпуклая φ -функция Φ удовлетворяет Δ_2 -условию, то $GV_\Phi = BV_\Phi$. Обратно, если $E = [a, b]$, X – линейное нормированное пространство и $GV_\Phi = BV_\Phi$, то Φ удовлетворяет Δ_2 -условию: в силу леммы 3 и вложения $BV_{\Phi_2} \subset BV_\Phi$ найдутся $C > 0$ и $\rho_0 > 0$ такие, что $\Phi(\rho) \leq C\Phi(\rho/2)$, $\rho \geq \rho_0$.

Если Φ и Ψ – выпуклые φ -функции, множество E ограничено и найдутся такие постоянные $C > 0$ и $\rho_0 > 0$, что $\Psi(\rho) \leq \Phi(C\rho)$ при $\rho \geq \rho_0$, то $GV_\Phi \subset GV_\Psi$, так как для $\lambda > 0$, $f \in BV_{\Phi_\lambda}$ и $T \in \mathcal{T}(E)$ имеем $V_{\Psi_\mu}[f; T] \leq \Psi(\rho_0)|\sup E - \inf E| + \mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(f, E)$, где $\mu = \lambda C$. Обратное утверждение для $E = [a, b]$ и линейного нормированного пространства X установлено в [15].

Для рефлексивного банахова пространства X и $\Phi \in \mathcal{N}$ из теоремы 1 имеем $f \in GV_\Phi([a, b]; X)$ тогда и только тогда, когда $f \in AC([a, b]; X)$ и $f' \in L_\Phi([a, b]; X)$, где через $L_\Phi([a, b]; X)$ обозначено пространство Орлича [20], [19] тех отображений $f \in X^{[a, b]}$, что $\lambda f \in L_\Phi^0([a, b]; X)$ при некотором $\lambda > 0$.

В силу выпуклости функции Φ корректно определена величина

$$p_\Phi(f, E) = \inf\{\lambda > 0 \mid \mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(f, E) \leq 1\}, \quad f \in GV_\Phi(E; X), \quad (8)$$

основные свойства которой отражены в следующей лемме.

ЛЕММА 4. Для выпуклой φ -функции Φ и $f \in GV_\Phi(E; X)$ имеем

- $d(f(t), f(s)) \leq \omega_\Phi(|t - s|)p_\Phi(f, E)$ для всех $t, s \in E$;
- если $p_\Phi(f, E) = \lambda > 0$, то $\mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(f, E) \leq 1$;
- если $\lambda > 0$, то $p_\Phi(f, E) \leq \lambda$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(f, E) \leq 1$;
- если $\lambda > 0$ и $\mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(f, E) = 1$, то $p_\Phi(f, E) = \lambda$;
- если $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset GV_\Phi(E; X)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n(t), f(t)) = 0$ для всех $t \in E$, то $p_\Phi(f, E) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} p_\Phi(f_n, E)$;
- если $t \in E$, то $p_\Phi(f, E) \leq p_\Phi(f, E_t^-) + p_\Phi(f, E_t^+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Для любых $t, s \in E$, $s < t$, из определений имеем

$$\Phi\left(\frac{d(f(t), f(s))}{(t-s)\lambda}\right)(t-s) \leq \mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(f, E) \leq 1 \quad \text{при } \lambda > p_\Phi(f),$$

откуда, разделив на $t-s$ и взяв обратную функцию Φ^{-1} , придем к (а).

(б) Пусть $p_\Phi(f) = \lambda > 0$. Выберем числа $\lambda(n) > \lambda$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(n) = \lambda.$$

Поскольку $\mathbf{V}_{\Phi_{\lambda(n)}}(f, E) \leq 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, находим, что

$$\mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(f, E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V}_{\Phi_{\lambda(n)}}(f, E) \leq 1.$$

(с) Достаточно показать, что если $0 < p_\Phi(f) < \lambda$, то $\mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(f, E) < 1$, а это сразу вытекает из выпуклости Φ и (б): полагая $\mu = p_\Phi(f)$, имеем

$$\mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(f, E) \leq (\mu/\lambda)\mathbf{V}_{\Phi_\mu}(f, E) \leq \mu/\lambda < 1.$$

(d) Следует только заметить, что ввиду (с) и только что доказанного утверждения случаи, когда $p_\Phi(f) > \lambda$ и $p_\Phi(f) < \lambda$, невозможны.

(е) Предположим, что $\lambda = \liminf_{n \rightarrow \infty} p_\Phi(f_n) < \infty$. Тогда $p_\Phi(f_{n_k}) \rightarrow \lambda$ при $k \rightarrow \infty$ для некоторой подпоследовательности $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ в $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $p_\Phi(f_{n_k}) < \lambda + \varepsilon$ для всех $k \geq k_0(\varepsilon)$. Из определения $p_\Phi(f_{n_k})$ следует, что $\mathbf{V}_{\Phi_{\lambda+\varepsilon}}(f_{n_k}) \leq 1$ при $k \geq k_0(\varepsilon)$, а поскольку f_{n_k} сходится к f поточечно на E при $k \rightarrow \infty$, то лемма 2(d) дает $\mathbf{V}_{\Phi_{\lambda+\varepsilon}}(f) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbf{V}_{\Phi_{\lambda+\varepsilon}}(f_{n_k}) \leq 1$, откуда $p_\Phi(f) \leq \lambda + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$.

(f) Положим $\lambda = p_\Phi(f, E_t^-)$ и $\mu = p_\Phi(f, E_t^+)$. Если хотя бы одно из чисел λ или μ равно нулю, то в силу (а) неравенство (в действительности равенство) очевидно. Пусть $\lambda > 0$ и $\mu > 0$. Из (б) получаем, что $\mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(f, E_t^-) \leq 1$ и $\mathbf{V}_{\Phi_\mu}(f, E_t^+) \leq 1$. Неравенство $p_\Phi(f, E) \leq \lambda + \mu$ в силу (с) эквивалентно неравенству $\mathbf{V}_{\Phi_{\lambda+\mu}}(f, E) \leq 1$. Чтобы доказать последнее, рассмотрим разбиение $T = \{t_i\}_{i=0}^m$ множества E такое, что $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ при некотором $k \in \{1, \dots, m\}$ (случай, когда $t < t_0$ и $t > t_m$, разбираются аналогично). Обозначим через $U_\lambda(t, s)$ выражение $U(t, s)$ в (3), соответствующее функции Φ_λ . Для величины $V_{\Phi_{\lambda+\mu}}[f; T]$ из (3) имеем равенство (4), где U заменено на $U_{\lambda+\mu}$. С учетом выпуклости функции Φ справедливы неравенства

$$U_{\lambda+\mu}(t_i, t_{i-1}) \leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu} U_\lambda(t_i, t_{i-1}), \quad i = 1, \dots, k-1,$$

$$U_{\lambda+\mu}(t_k, t_{k-1}) \leq U_{\lambda+\mu}(t, t_{k-1}) + U_{\lambda+\mu}(t_k, t) \leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu} U_\lambda(t, t_{k-1}) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} U_\mu(t_k, t),$$

$$U_{\lambda+\mu}(t_i, t_{i-1}) \leq \frac{\mu}{\lambda+\mu} U_\mu(t_i, t_{i-1}), \quad i = k+1, \dots, m,$$

которые вместе с (4) дают

$$V_{\Phi_{\lambda+\mu}}[f; T] \leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(f, E_t^-) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \mathbf{V}_{\Phi_\mu}(f, E_t^+) \leq 1.$$

Одним из преимуществ перехода к пространству $GV_\Phi(E; X)$ является то, что понятие отображения $f \in GV_\Phi(E; X)$ конечной обобщенной Φ -вариации зависит от метрической топологии на X , а не от конкретной метрики: действительно, если d и d_0 – эквивалентные метрики на X , т.е. $C_0 d(x, y) \leq d_0(x, y) \leq C_1 d(x, y)$ для некоторых постоянных $C_0 > 0$ и $C_1 > 0$ и всех $x, y \in X$, и $f \in GV_\Phi(E; X)$ относительно метрики d , то $f \in GV_\Phi(E; X)$ относительно метрики d_0 и справедливы неравенства

$$C_0 p_\Phi^d(f, E) \leq p_\Phi^{d_0}(f, E) \leq C_1 p_\Phi^d(f, E),$$

где через $p_\Phi^d(f, E)$ обозначена величина (8), вычисленная в метрике d .

Суммируя сказанное выше, для ограниченного множества E и выпуклой φ -функции Φ имеем следующие вложения функциональных пространств:

$$\text{Lip}(E; X) \subset BV_\Phi(E; X) \subset GV_\Phi(E; X) \subset BV_1(E; X), \quad (9)$$

а если, дополнительно, $\Phi \in \mathcal{N}$, то $GV_\Phi(E; X) \subset AC(E; X)$. (Отметим, что если Φ есть не обязательно выпуклая φ -функция Орлича, то в силу леммы 4(а) и (2) любое отображение $f \in GV_\Phi(E; X)$ является непрерывным.) Кроме того, имеют место *неравенства Йенсена для вариации*:

$$\Phi\left(\frac{\mathbf{V}_1(f, E)}{|E|}\right) \leq \frac{\mathbf{V}_\Phi(f, E)}{|E|}, \quad f \in BV_\Phi(E; X), \quad (10)$$

$$\mathbf{V}_1(f, E) \leq \omega_\Phi(|E|) p_\Phi(f, E), \quad f \in GV_\Phi(E; X), \quad (11)$$

где $|E| = \sup E - \inf E < \infty$. Действительно, если $f \in BV_\Phi(E; X)$ и T есть разбиение E вида $\{t_i\}_{i=0}^m$, то, используя обозначение U из (3), в силу неравенства Йенсена для сумм имеем

$$\Phi\left(\frac{\sum_{i=1}^m d(f(t_i), f(t_{i-1}))}{\sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1})}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^m U(t_i, t_{i-1})}{\sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1})} \leq \frac{\mathbf{V}_\Phi(f, E)}{\sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1})},$$

откуда, учитывая, что $\sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) = t_m - t_0 \leq |E|$, приходим к (10). Если же $f \in GV_\Phi(E; X)$, то, полагая $\lambda = \mathbf{V}_1(f, E)/\omega_\Phi(|E|)$ и считая, что $\lambda > 0$, в силу (10) имеем $\mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(f, E) \geq |E| \Phi_\lambda(\mathbf{V}_1(f, E)/|E|) = 1$, поэтому из утверждения в доказательстве леммы 4(с) получаем, что $p_\Phi(f, E) \geq \lambda$.

Структурно отображения конечной Φ -вариации тесно связаны с липшицевыми отображениями и вещественными функциями конечной (обобщенной) Φ -вариации. Пусть функция $\nu: E \rightarrow \mathbb{R}$, $J = \nu(E)$ есть образ ν , $g \in \text{Lip}(J; X)$, $\mathbf{L}(g) \leq 1$ и $f = g \circ \nu$, где $(g \circ \nu)(t) := g(\nu(t))$, $t \in E$. Для выпуклой φ -функции Φ справедливы утверждения: если $\nu \in BV_\Phi(E; \mathbb{R})$, то $f \in BV_\Phi(E; X)$ и $\mathbf{V}_\Phi(f, E) \leq \mathbf{V}_\Phi(\nu, E)$; если $\nu \in GV_\Phi(E; \mathbb{R})$, то $f \in GV_\Phi(E; X)$ и $p_\Phi(f, E) \leq p_\Phi(\nu, E)$. В лемме 5 мы покажем, что справедливы и обратные утверждения.

Отображение $g: J \rightarrow X$ называется *натуральным*, если $\mathbf{V}_1(g, J_s^t) = t - s$ для всех $s, t \in J$, $s \leq t$. Такое отображение липшицево и $\mathbf{L}(g) \leq 1$, поскольку $d(g(t), g(s)) \leq \mathbf{V}_1(g, J_s^t)$ в силу леммы 2(b) при $\Phi(\rho) = \rho$.

ЛЕММА 5. Пусть $f \in BV_1(E; X)$, $\nu(t) = \mathbf{V}_1(f, E_t^-)$, $t \in E$, и $J = \nu(E)$. Тогда существует такое натуральное отображение $g: J \rightarrow X$, что $f = g \circ \nu$ на E и $\mathbf{V}_1(g, J) = \mathbf{V}_1(f, E)$. Если E ограничено и Φ — выпуклая φ -функция, дополнительно имеем следующие утверждения:

- (а) если $f \in BV_\Phi(E; X)$, то $\nu \in BV_\Phi(E; \mathbb{R})$ и $\mathbf{V}_\Phi(\nu, E) = \mathbf{V}_\Phi(f, E)$;
- (б) если $f \in GV_\Phi(E; X)$, то $\nu \in GV_\Phi(E; \mathbb{R})$ и $p_\Phi(\nu, E) = p_\Phi(f, E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (9) и леммы 2(а) функция ν корректно определена и не убывает на E . Если $s \in J$, так что $s = \nu(t)$ для некоторого $t \in E$, то положим $g(s) = f(t)$. Поскольку $d(f(t), f(s)) \leq |\nu(t) - \nu(s)|$, $t, s \in E$, отображение $g: J \rightarrow X$ определено корректно и удовлетворяет всем условиям нашей леммы (подробнее см. [12, § 3]). В условиях (а) для разбиения $T = \{t_i\}_{i=0}^m \in \mathcal{T}(E)$ из леммы 2(с) при $\Phi(\rho) = \rho$ и неравенства (10) для $i = 1, \dots, m$ находим, что

$$\nu(t_i) - \nu(t_{i-1}) = \mathbf{V}_1(f, E_{t_{i-1}}^{t_i}) \leq (t_i - t_{i-1}) \Phi^{-1} \left(\frac{\mathbf{V}_\Phi(f, E_{t_{i-1}}^{t_i})}{t_i - t_{i-1}} \right),$$

откуда, вычисляя $V_\Phi[\nu; T]$ по формуле (3), снова при помощи леммы 2(с) получим неравенство $V_\Phi[\nu; T] \leq \mathbf{V}_\Phi(f, E)$. Равенство же $\mathbf{V}_\Phi(\nu, E) = \mathbf{V}_\Phi(f, E)$ вытекает из разложения $f = g \circ \nu$ и замечаний перед этой леммой.

Если $f \in GV_\Phi(E; X)$, то, полагая $\lambda = p_\Phi(f, E)$ (пусть $\lambda > 0$), в силу доказанного в (а) и леммы 4(б) найдем, что $\mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(f, E) = \mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(f, E) \leq 1$, откуда $p_\Phi(\nu, E) \leq \lambda$. Обратное неравенство следует из замечаний перед леммой.

4. Скачки функции Φ -вариации и непрерывность. Для $t \in E$ обозначим через $E_t^{-\prime}$ и $E_t^{+\prime}$ множества всех предельных точек для E_t^- и E_t^+ соответственно. Встречающиеся ниже пределы вида $\lim_{E \ni \alpha \rightarrow t \pm 0}$ обозначаются короче $\lim_{\alpha \rightarrow t \pm 0}$. В этом пункте Φ есть выпуклая φ -функция такая, что $[\Phi] < \infty$, $f \in BV_\Phi(E; X)$ и $\phi(t) = \mathbf{V}_\Phi(f, E_t^-)$, $t \in E$, есть функция Φ -вариации отображения f . Мы изучим свойства непрерывности f ; покажем, что точки разрыва f совпадают с точками разрыва ϕ ; установим связь между скачками f и ϕ и получим формулы для Φ -вариации f на множестве E без удаленной из него предельной точки.

Если U определено в (3), то, как уже отмечалось выше (см. (5) и лемму 2(б,с)), для всех $\alpha, \beta, \gamma \in E$, $\alpha < \beta < \gamma$, имеют место неравенства

$$U(\gamma, \alpha) \leq U(\gamma, \beta) + U(\beta, \alpha), \quad U(\beta, \alpha) \leq \phi(\beta) - \phi(\alpha). \quad (12)$$

Из монотонности и ограниченности функции ϕ вытекает, что существуют конечные пределы справа и слева $\phi(t \pm 0) = \lim_{\alpha \rightarrow t \pm 0} \phi(\alpha)$ в точках $t \in E_t^{\pm\prime}$ соответственно. Поскольку этим же свойством обладает функция ν из леммы 5, из (3) следует, что конечны следующие (односторонние) пределы:

$$\begin{aligned} U(t, t-0) &= \lim_{\alpha \rightarrow t-0} U(t, \alpha) = [\Phi] \lim_{\alpha \rightarrow t-0} d(f(t), f(\alpha)), & t \in E_t^{-\prime}, \\ U(t+0, t) &= \lim_{\beta \rightarrow t+0} U(\beta, t) = [\Phi] \lim_{\beta \rightarrow t+0} d(f(\beta), f(t)), & t \in E_t^{+\prime}, \\ U(t+0, t-0) &= \lim_{\substack{\alpha \rightarrow t-0 \\ \beta \rightarrow t+0}} U(\beta, \alpha) = [\Phi] \lim_{\substack{\alpha \rightarrow t-0 \\ \beta \rightarrow t+0}} d(f(\beta), f(\alpha)), & t \in E_t^{-\prime} \cap E_t^{+\prime}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 6. *Имеют место следующие равенства:*

- (a) $U(t, t-0) = \phi(t) - \phi(t-0) = \mathbf{V}_\Phi(f, E_t^-) - \mathbf{V}_\Phi(f, E_t^- \setminus \{t\}) = \lim_{\alpha \rightarrow t-0} \mathbf{V}_\Phi(f, E_\alpha^-);$
- (b) $U(t+0, t) = \phi(t+0) - \phi(t) = \mathbf{V}_\Phi(f, E_t^+) - \mathbf{V}_\Phi(f, E_t^+ \setminus \{t\}) = \lim_{\beta \rightarrow t+0} \mathbf{V}_\Phi(f, E_\beta^+);$
- (c) $U(t+0, t-0) = \lim_{\beta \rightarrow t+0} \mathbf{V}_\Phi(f, E_\beta^+ \setminus \{t\});$
- (d) $\mathbf{V}_\Phi(f, E) = \mathbf{V}_\Phi(f, E \setminus \{t\}) + \phi(t+0) - \phi(t-0) - U(t+0, t-0),$ где: в (a) точка $t \in E_t^{-'}$; в (b) точка $t \in E_t^{+'}$; в (c), (d) точка $t \in E_t^{-'} \cap E_t^{+'}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) Установим первое равенство. Переходя к пределу $\alpha \rightarrow t-0$ во втором неравенстве (12), где $\beta = t > \alpha \in E$, найдем, что $U(t, t-0) \leq \phi(t) - \phi(t-0)$. Обратное неравенство вытекает в пределе при $\alpha \rightarrow t-0$ из следующего утверждения: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tau(\varepsilon) \in E$, $\tau(\varepsilon) < t$, такое, что $\phi(t) - \phi(\alpha) \leq U(t, \alpha) + \varepsilon$ для всех $\alpha \in E_{\tau(\varepsilon)}^t \setminus \{t\}$. Из определения $\phi(t)$ по $\varepsilon > 0$ найдем зависящее от ε разбиение $T = \{t_i\}_{i=0}^m \cup \{t\} \in \mathcal{T}(E_t^-)$, где $t_m < t$, для которого $\phi(t) \leq U(t, t_m) + V_\Phi[f; T] + \varepsilon$. Поскольку $T \in \mathcal{T}(E_{t_m}^-)$, применяя первое неравенство в (12) и лемму 2(b,c), для всех $\alpha \in E$, $t_m < \alpha < t$, получим

$$\phi(t) \leq U(t, \alpha) + \mathbf{V}_\Phi(f, E_{t_m}^\alpha) + \mathbf{V}_\Phi(f, E_{t_m}^-) + \varepsilon = U(t, \alpha) + \phi(\alpha) + \varepsilon$$

и остается положить $\tau(\varepsilon) = t_m$.

Оставшиеся равенства вытекают из леммы 2(f), в силу которой

$$\mathbf{V}_\Phi(f, E_t^- \setminus \{t\}) = \lim_{\alpha \rightarrow t-0} \mathbf{V}_\Phi(f, (E_t^- \setminus \{t\})_\alpha^-) = \lim_{\alpha \rightarrow t-0} \mathbf{V}_\Phi(f, E_\alpha^-) = \phi(t-0).$$

(b) Неравенство $U(t+0, t) \leq \phi(t+0) - \phi(t)$ получается в пределе при $\beta \rightarrow t+0$ из второго неравенства (12), где $E \ni \beta > t = \alpha$. Остается показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $t_0 = t_0(\varepsilon) \in E$, $t_0 > t$, такое, что $\phi(\beta) - \phi(t) \leq U(\beta, t) + \varepsilon$ для всех $\beta \in E_{t_0}^{t_0} \setminus \{t\}$. Так как $\mathbf{V}_\Phi(f, E_t^+) < \infty$, то для $\varepsilon > 0$ существует $T = \{t_i\}_{i=0}^m \cup \{t\} \in \mathcal{T}(E_t^+)$ с $t_0 > t$ такое, что $\mathbf{V}_\Phi(f, E_t^+) \leq U(t_0, t) + V_\Phi[f; T] + \varepsilon$, а поскольку $T \in \mathcal{T}(E_{t_0}^+)$, то для $\beta \in E$, $t < \beta < t_0$, в силу первого неравенства (12) найдем, что

$$\mathbf{V}_\Phi(f, E_t^+) \leq \mathbf{V}_\Phi(f, E_\beta^{t_0}) + U(\beta, t) + \mathbf{V}_\Phi(f, E_{t_0}^+) + \varepsilon = \mathbf{V}_\Phi(f, E_\beta^+) + U(\beta, t) + \varepsilon,$$

откуда в силу леммы 2(c) получим

$$\phi(\beta) - \phi(t) = \mathbf{V}_\Phi(f, E_\beta^-) - \mathbf{V}_\Phi(f, E_t^-) = \mathbf{V}_\Phi(f, E_t^+) - \mathbf{V}_\Phi(f, E_\beta^+) \leq U(\beta, t) + \varepsilon.$$

Второе и третье равенства следуют из леммы 2(g,c), в силу чего

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_\Phi(f, E_t^+ \setminus \{t\}) &= \lim_{\beta \rightarrow t+0} \mathbf{V}_\Phi(f, (E_t^+ \setminus \{t\})_\beta^+) = \lim_{\beta \rightarrow t+0} \mathbf{V}_\Phi(f, E_\beta^+) \\ &= \mathbf{V}_\Phi(f, E) - \lim_{\beta \rightarrow t+0} \mathbf{V}_\Phi(f, E_\beta^-) = \mathbf{V}_\Phi(f, E_t^+) + \phi(t) - \phi(t+0). \end{aligned}$$

(c) Прежде всего заметим, что

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow t-0 \\ \beta \rightarrow t+0}} \mathbf{V}_\Phi(f, E_\alpha^\beta \setminus \{t\}) = \inf_{\alpha, \beta} \mathbf{V}_\Phi(f, E_\alpha^\beta \setminus \{t\}),$$

где инфимум берется по $\alpha \in E_t^-, \beta \in E_t^+, \alpha < t < \beta$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon), \beta_0 = \beta_0(\varepsilon) \in E, \alpha_0 < t < \beta_0$, такие, что

$$\mathbf{V}_\Phi(f, E_\alpha^\beta \setminus \{t\}) \leq U(\beta, \alpha) + \varepsilon \quad \forall \alpha \in E_{\alpha_0}^t \setminus \{t\}, \quad \forall \beta \in E_t^{\beta_0} \setminus \{t\}. \quad (13)$$

По определению $\mathbf{V}_\Phi(f, E \setminus \{t\})$ для $\varepsilon > 0$ найдем такое разбиение $T = \{t_i\}_{i=0}^m$ множества $E \setminus \{t\}$, что $t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t < t_k < \dots < t_{m-1} < t_m$ для некоторого $1 \leq k \leq m$ и $\mathbf{V}_\Phi(f, E \setminus \{t\}) \leq \sum_{i=1}^m U(t_i, t_{i-1}) + \varepsilon$. Положим $T_1 = \{t_i\}_{i=0}^{k-1}, T_2 = \{t_i\}_{i=k}^m, \alpha_0 = t_{k-1}$ и $\beta_0 = t_k$. Если теперь $\alpha, \beta \in E$ такие, что $\alpha_0 < \alpha < t < \beta < \beta_0$, то, учитывая, что $T_1 \cup \{\alpha\} \in \mathcal{T}(E_\alpha^-)$ и $T_2 \cup \{\beta\} \in \mathcal{T}(E_\beta^+)$, в силу первого неравенства (12) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_\Phi(f, E \setminus \{t\}) &\leq \mathbf{V}_\Phi[f; T_1] + U(\alpha, t_{k-1}) + U(\beta, \alpha) + U(t_k, \beta) + \mathbf{V}_\Phi[f; T_2] + \varepsilon \\ &\leq \mathbf{V}_\Phi(f, E_\alpha^-) + U(\beta, \alpha) + \mathbf{V}_\Phi(f, E_\beta^+) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Это доказывает (13), если учесть, что лемма 2(с) дает равенство

$$\mathbf{V}_\Phi(f, E \setminus \{t\}) = \mathbf{V}_\Phi(f, E_\alpha^-) + \mathbf{V}_\Phi(f, E_\alpha^\beta \setminus \{t\}) + \mathbf{V}_\Phi(f, E_\beta^+). \quad (14)$$

Остается перейти к пределу при $\alpha \rightarrow t - 0, \beta \rightarrow t + 0$ в (13) и неравенстве $U(\beta, \alpha) \leq \mathbf{V}_\Phi(f, E_\alpha^\beta \setminus \{t\})$, справедливым для всех $\alpha \in E_t^-, \beta \in E_t^+, \alpha < t < \beta$.

(d) Из леммы 2(с) и равенства (14) для $\alpha, \beta \in E, \alpha < t < \beta$, имеем

$$\mathbf{V}_\Phi(f, E) - \mathbf{V}_\Phi(f, E \setminus \{t\}) = \phi(\beta) - \phi(\alpha) - \mathbf{V}_\Phi(f, E_\alpha^\beta \setminus \{t\}).$$

Равенство в (d) получается отсюда в пределе при $\alpha \rightarrow t - 0, \beta \rightarrow t + 0$.

СЛЕДСТВИЕ 7. *Отображение $f \in BV_\Phi(E; X)$ является*

- (а) *непрерывным справа в точке $t \in E \setminus \{\sup E\}$ или слева в точке $t \in E \setminus \{\inf E\}$ тогда и только тогда, когда в точке t этим же свойством обладает его функция Φ -вариации ϕ ;*
- (б) *непрерывным на E вне не более чем счетного множества точек.*

СЛЕДСТВИЕ 8. *Пусть $f \in BV_\Phi(E; X), t \in E$ и $[\Phi] = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi(\rho)/\rho < \infty$. Тогда*

- (а) *если $t \in E_t^{-'}$, то*

$$\mathbf{V}_\Phi(f, E_t^-) = \mathbf{V}_\Phi(f, E_t^- \setminus \{t\}) + [\Phi] \lim_{\alpha \rightarrow t-0} d(f(t), f(\alpha));$$

- (б) *если $t \in E_t^{+'}$, то*

$$\mathbf{V}_\Phi(f, E_t^+) = \mathbf{V}_\Phi(f, E_t^+ \setminus \{t\}) + [\Phi] \lim_{\beta \rightarrow t+0} d(f(\beta), f(t));$$

- (с) *если же $t \in E_t^{-'} \cap E_t^{+'}$, то дополнительно к (а) и (б) имеем*

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_\Phi(f, E) &= \mathbf{V}_\Phi(f, E \setminus \{t\}) + [\Phi] \left(\lim_{\alpha \rightarrow t-0} d(f(t), f(\alpha)) \right. \\ &\quad \left. + \lim_{\beta \rightarrow t+0} d(f(\beta), f(t)) - \lim_{\substack{\alpha \rightarrow t-0 \\ \beta \rightarrow t+0}} d(f(\beta), f(\alpha)) \right). \end{aligned}$$

В случае полного метрического пространства X в точках $t \in E_t^{\pm'}$ существуют односторонние пределы $f(t \pm 0) = \lim_{\alpha \rightarrow t \pm 0} f(\alpha)$ соответственно, поэтому знаки пределов в следствии 8 можно “втащить” под знак метрики d .

Для $f \in GV_{\Phi}(E; X)$ формула (а) из следствия 8 приобретает такой вид: если $t \in E_t^{-'}$, то

$$p_{\Phi}(f, E_t^{-}) \leq p_{\Phi}(f, E_t^{-} \setminus \{t\}) + [\Phi] \lim_{\alpha \rightarrow t-0} d(f(t), f(\alpha)).$$

Доказательство этого проводится так же, как лемма 4(f). Аналогично модифицируются и другие формулы из следствия 8.

Следствие 8 в различной общности устанавливалось в работах [11], [12].

5. Обобщенный принцип выбора Хелли. Здесь мы распространим принцип выбора Хелли [28] на пространство $GV_{\Phi}(E; X)$. Частные случаи приводимой ниже теоремы 9 устанавливались в работах [21], [11], [12], [14] и [17].

ТЕОРЕМА 9. Пусть Φ – выпуклая φ -функция, X – полное метрическое пространство, семейство $\mathcal{F} \subset X^{[a,b]}$ бесконечно и при любом $t \in [a, b]$ множество $\{f(t) \mid f \in \mathcal{F}\}$ предкомпактно в X . Если $\sup_{f \in \mathcal{F}} p_{\Phi}(f, [a, b]) < \infty$, то $\mathcal{F}$ содержит последовательность, которая поточечно на $[a, b]$ сходится к некоторому отображению из $GV_{\Phi}([a, b]; X)$. Если, в дополнение, $\Phi \in \mathcal{N}$, то эту последовательность в $\mathcal{F}$ можно выбрать сходящейся равномерно на $[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $f \in \mathcal{F}$ и $t \in [a, b]$ положим $\nu_f(t) = \mathbf{V}_1(f, [a, t])$. Семейство неубывающих функций $\{\nu_f \mid f \in \mathcal{F}\}$ бесконечно и ограничено в силу (11), а потому из принципа выбора Хелли для монотонных функций (см. [28], [21, гл. 8, § 4]) следует, что найдутся последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ и неубывающая функция $\nu: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_{f_n}(t) = \nu(t)$ для всех $t \in [a, b]$. Поскольку множество точек разрыва функции ν не более чем счетно и при любом $t \in [a, b]$ множество $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ предкомпактно в X , не ограничивая общности, будем считать (извлекая, если необходимо, с помощью стандартного диагонального процесса подпоследовательность в $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$), что $f_n(s)$ сходится в X к элементу $f(s)$ во всех рациональных точках $s \in [a, b]$, во всех точках s разрыва функции ν и в точках $s = a$ и $s = b$.

Осталось показать, что $f_n(t)$ имеет предел в X в любой иррациональной точке $a < t < b$ непрерывности функции ν . Для $\varepsilon > 0$ найдем такое рациональное число $a < s < t$, что $0 \leq \nu(t) - \nu(s) \leq \varepsilon/9$, и выберем номер $N_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы $|\nu_{f_n}(t) - \nu(t)| \leq \varepsilon/9$ и $|\nu_{f_n}(s) - \nu(s)| \leq \varepsilon/9$ при $n \geq N_0$. Тогда

$$d(f_n(t), f_n(s)) \leq |\nu_{f_n}(t) - \nu(t)| + (\nu(t) - \nu(s)) + |\nu(s) - \nu_{f_n}(s)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad n \geq N_0.$$

Если $N_1 \in \mathbb{N}$ такой номер, что $d(f_n(s), f_m(s)) \leq \varepsilon/3$ при $n, m \geq N_1$, то для всех $n, m \geq \max\{N_0, N_1\}$ будем иметь

$$d(f_n(t), f_m(t)) \leq d(f_n(t), f_n(s)) + d(f_n(s), f_m(s)) + d(f_m(s), f_m(t)) \leq \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в X . Остается положить $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ и применить лемму 4(e).

Если известно, что $\Phi \in \mathcal{N}$, то отрезок $[a, b]$ можно заменить на компакт E в $\mathbb{R}$. В этом случае равномерная сходимость некоторой последовательности из $\mathcal{F}$ вытекает из

теоремы Арцела–Асколи, поскольку в силу леммы 4(а) и равенства (2) семейство $\mathcal{F}$ равномерно непрерывно.

Покажем, что условия теоремы 9 не могут быть ослаблены. Для выпуклой φ -функции φ обозначим через ℓ_φ пространство всех последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ таких, что существует число $\lambda > 0$ (зависящее от x), для которого $\sum_{n=1}^\infty \varphi(\lambda|x_n|) < \infty$ (см. [19, §§ 3, 10]). Пространство ℓ_φ является бесконечномерной банаховой алгеброй относительно нормы $\|x\|_\varphi = \inf\{\lambda > 0 \mid \sum_{n=1}^\infty \varphi(|x_n|/\lambda) \leq 1\}$ и имеет стандартный базис $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, где $e_n = \{x_i\}_{i=1}^\infty$ с $x_i = 0$ при $i \neq n$ и $x_n = 1$. Для выпуклой φ -функции Φ , $f \in BV_\Phi([0, 1]; \mathbb{R})$, $f \neq 0$, и $n \in \mathbb{N}$ положим $f_n(t) = f(t)e_n$, $t \in [0, 1]$, так что $f_n: [0, 1] \rightarrow \ell_\varphi$ и $\mathbf{V}_\Phi(f_n, [0, 1]) = \mathbf{V}_\Phi(f, [0, 1])/\varphi^{-1}(1)$. Таким образом, последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ имеет равномерно ограниченную Φ -вариацию, но множества $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ не предкомпактны в ℓ_φ , поэтому обобщенный принцип выбора Хелли нарушается: никакая подпоследовательность последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ не сходится в ℓ_φ ни в одной точке $t \in [0, 1]$.

При помощи стандартного диагонального метода принцип выбора Хелли распространяется на семейства отображений, областью определения которых служат ограниченные или неограниченные интервалы или полуинтервалы.

6. Селекции многозначных отображений обобщенной Φ -вариации. Многозначное отображение $F: E \rightarrow c(X)$ называется *липшицевым, отображением конечной Φ -вариации* или *отображением конечной обобщенной Φ -вариации*, если оно обладает этим свойством (в смысле п. 2) относительно хаусдорфовой метрики D , порожденной метрикой d на X . Соответственно пишем

$$F \in \text{Lip}(E; c(X)), \quad F \in BV_\Phi(E; c(X)), \quad F \in GV_\Phi(E; c(X)).$$

Заметим, что на пространстве $c(X)$ хаусдорфова топология (т.е. топология, порожденная хаусдорфовой метрикой) зависит только от топологии X (а не от метрики на X , см., например, [4, следствие II-7]).

Напомним, что без условия выпуклости образов многозначного отображения $F: I = [a, b] \rightarrow c(\mathbb{R}^n)$, $n = 1, 2$, непрерывных селекций может не иметь непрерывное отображение F (см. [1], [6], [29]) и даже отображение F с компактными образами в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющее при любом $0 < \alpha < 1$ условию Гёльдера $D(F(t), F(s)) \leq C|t - s|^\alpha$, $t, s \in I$ (см. [30]). Отметим также, что для многозначных отображений F , определенных на промежутке в $\mathbb{R}$ и принимающих в топологическом пространстве связные значения, образующие равномерно локально связное семейство множеств, непрерывные селекции существуют без каких-либо метрических ограничений – достаточно, чтобы F было полунепрерывно снизу (см. [5]).

ТЕОРЕМА 10. Пусть (X, d) – метрическое пространство, Φ – выпуклая φ -функция, $F \in GV_\Phi([a, b]; c(X))$ – компактнозначное многозначное отображение конечной обобщенной Φ -вариации, $t_0 \in [a, b]$ и $x_0 \in X$. Тогда F обладает селекцией $f \in GV_\Phi([a, b]; X)$ такой, что

$$d(x_0, f(t_0)) = \text{dist}(x_0, F(t_0)), \quad p_\Phi(f, [a, b]) \leq p_\Phi(F, [a, b]), \\ \mathbf{V}_1(f, [a, b]) \leq \mathbf{V}_1(F, [a, b]).$$

Если, кроме того, F непрерывно, то и эту селекцию f также можно выбрать непрерывной, а если $F \in \text{Lip}([a, b]; c(X))$, то и селекцию $f \in \text{Lip}([a, b]; X)$ можно выбрать такой, что $\mathbf{L}(f) \leq \mathbf{L}(F)$. Отметим, в частности, что если $x_0 \in F(t_0)$, то $f(t_0) = x_0$.

Прежде чем доказывать эту теорему, установим следующую лемму.

ЛЕММА 11. Если $F \in BV_1(E; c(X))$, где $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ и (X, d) – метрическое пространство, то образ $\text{Im}(F) = F(E)$ отображения F , определяемый правилом $\text{Im}(F) = \bigcup_{t \in E} F(t)$, является вполне ограниченным и сепарабельным подмножеством X ; а если, к тому же, X полное, то $\text{Im}(F)$ предкомпактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\varepsilon > 0$, $x \in X$ и компактного множества $K \subset X$ положим $B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(y, x) < \varepsilon\}$ и $\mathcal{O}_\varepsilon(K) = \{y \in X \mid \text{dist}(y, K) < \varepsilon\}$. Чтобы доказать, что $\text{Im}(F)$ вполне ограничено, нужно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ множество $\text{Im}(F)$ можно покрыть конечным числом шаров $B_\varepsilon(\cdot)$ с центрами в $\text{Im}(F)$, т.е. что найдутся номер N , зависящий от ε , и точки $t_n \in E$ и $x_n \in F(t_n)$, $n = 1, \dots, N$, такие, что $\text{Im}(F) \subset \bigcup_{n=1}^N B_\varepsilon(x_n)$. Учитывая, что для компактного $K \subset X$ имеет место равенство $\mathcal{O}_\varepsilon(K) = \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x)$, найдем, что условие вполне ограниченности $\text{Im}(F)$ эквивалентно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют номер N и точки $t_n \in E$, $n = 1, \dots, N$, такие, что $\text{Im}(F) \subset \bigcup_{n=1}^N \mathcal{O}_\varepsilon(F(t_n))$. От противного предположим, что $\varepsilon > 0$ – такое число, что утверждение в последнем предложении нарушается. Построим последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty \subset \text{Im}(F)$ по индукции следующим образом. Произвольно зафиксируем $t_0 \in E$ и $x_0 \in F(t_0)$, выберем $x_1 \in \text{Im}(F)$ так, чтобы $x_1 \notin \mathcal{O}_\varepsilon(F(t_0))$, и будем считать, что $x_1 \in F(t_1)$ для некоторого $t_1 \in E$. Если точки $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \text{Im}(F)$, $n \geq 2$, уже определены, причем $x_j \in F(t_j)$ для $t_j \in E$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, то выберем точку $x_n \in \text{Im}(F) \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} \mathcal{O}_\varepsilon(F(t_j))$ и будем считать, что $x_n \in F(t_n)$ для некоторого $t_n \in E$. Поскольку для $n > k$ $D(F(t_n), F(t_k)) \geq \text{dist}(x_n, F(t_k)) \geq \varepsilon$, то $t_n \neq t_k$, поэтому без ограничения общности можно считать, что $t_{n-1} < t_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда для разбиения $T_m = \{t_i\}_{i=0}^m$ множества E имеем

$$\mathbf{V}_1(F, E) \geq \sum_{i=1}^m D(F(t_i), F(t_{i-1})) \geq m\varepsilon,$$

а в силу произвольности m заключаем, что $\mathbf{V}_1(F, E) = \infty$, что противоречит предположению. Известно, что в метрическом пространстве вполне ограниченное множество сепарабельно, а в полном метрическом пространстве оно предкомпактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. Установим эту теорему вначале для F из класса $BV_\Phi([a, b]; c(X))$. Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим разбиение $T_n = \{t_i^n\}_{i=0}^n \in \mathcal{T}_a^b$ со следующими двумя свойствами:

- 1) $t_0 \in T_n$, т.е. $t_0 = t_{k(n)}^n$ для некоторого $k(n) \in \{0, 1, \dots, n\}$;
- 2) если $I_i^n = [t_{i-1}^n, t_i^n]$ и $|I_i^n| = t_i^n - t_{i-1}^n$, $i = 1, \dots, n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} |I_i^n| = 0$.

В силу компактности множества $F(t_0)$ выберем элемент $y_0 \in F(t_0)$ так, чтобы $d(x_0, y_0) = \text{dist}(x_0, F(t_0))$. По индукции определим элементы $x_i^n \in F(t_i^n)$, $i = 0, 1, \dots, n$, следующим образом. Пусть вначале $a < t_0 < b$.

- а) Положим $x_{k(n)}^n = y_0$.

б) Если $i \in \{1, \dots, k(n)\}$ и элемент $x_i^n \in F(t_i^n)$ уже определен, выберем элемент $x_{i-1}^n \in F(t_{i-1}^n)$ так, чтобы $d(x_i^n, x_{i-1}^n) = \text{dist}(x_i^n, F(t_{i-1}^n))$.

с) Если $i \in \{k(n) + 1, \dots, n\}$ и элемент $x_i^n \in F(t_i^n)$ уже определен, выберем элемент $x_i^n \in F(t_i^n)$ так, чтобы $d(x_{i-1}^n, x_i^n) = \text{dist}(x_{i-1}^n, F(t_i^n))$.

Для $t_0 = a$, т.е. $k(n) = 0$, определяем x_i^n согласно а) и с), а если $t_0 = b$, так что $k(n) = n$, следуем а) и б). Благодаря б), с) и (1) имеем

$$d(x_i^n, x_{i-1}^n) \leq D(F(t_i^n), F(t_{i-1}^n)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (15)$$

В силу (9) $\mathbf{V}_1(F, [a, b]) < \infty$, поэтому по лемме 11 образ $\text{Im}(F)$ отображения F (вполне) ограничен в X . Обозначим через $Y = C_b(\text{Im}(F); \mathbb{R})$ банахово пространство всех непрерывных ограниченных функций из $\text{Im}(F)$ в $\mathbb{R}$ с равномерной нормой

$$\|y\| = \sup_{x \in \text{Im}(F)} |y(x)|, \quad y \in Y.$$

Отображение $\text{Im}(F) \ni x \mapsto R(x) \in Y$, где $R(x)(x') = d(x, x')$, $x' \in \text{Im}(F)$, определяет (согласно Куратовскому) изометрическое вложение множества $\text{Im}(F)$ в пространство Y , так что, в частности, $\|R(x) - R(x')\| = d(x, x')$ для всех $x, x' \in \text{Im}(F)$.

Для $n \in \mathbb{N}$ определим отображение $f_n: [a, b] \rightarrow Y$ правилом

$$f_n(t) = R(x_{i-1}^n) + \frac{(t - t_{i-1}^n)(R(x_i^n) - R(x_{i-1}^n))}{|I_i^n|}, \quad t \in I_i^n, \quad i = 1, \dots, n. \quad (16)$$

Отметим, что $f_n(t_0) = R(y_0)$, $f_n(t_i^n) = R(x_i^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, \dots, n$, поэтому из леммы 2(с), (15), (16) и изометричности R для всех $n \in \mathbb{N}$ находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_\Phi(f_n, [a, b]) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_\Phi(f_n, I_i^n) = \sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{d(x_i^n, x_{i-1}^n)}{|I_i^n|}\right) |I_i^n| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{D(F(t_i^n), F(t_{i-1}^n))}{|I_i^n|}\right) |I_i^n| \leq \mathbf{V}_\Phi(F, [a, b]). \end{aligned} \quad (17)$$

В силу леммы 4(с) получаем, что $p_\Phi(f_n, [a, b]) \leq \max\{1, \mathbf{V}_\Phi(F, [a, b])\}$, $n \in \mathbb{N}$, а из неравенства (17) при $\Phi(\rho) = \rho$ следует также, что $\mathbf{V}_1(f_n, [a, b]) \leq \mathbf{V}_1(F, [a, b])$.

Для $t \in [a, b]$ покажем, что последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ предкомпактна в Y . Пусть вначале $\Phi \in \mathcal{N}$, так что F (абсолютно) непрерывно на $[a, b]$ относительно D . Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует номер $i(n) \in \{1, \dots, n\}$ (зависящий также от t) такой, что $t \in I_{i(n)}^n$, поэтому из условия 2) следует, что $t_{i(n)}^n \rightarrow t$ и $t_{i(n)-1}^n \rightarrow t$ при $n \rightarrow \infty$. Выберем элемент $x_n(t) \in F(t)$ так, чтобы $d(x_{i(n)-1}^n, x_n(t)) = \text{dist}(x_{i(n)-1}^n, F(t))$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $F(t)$ компактно, можно считать (переходя к подпоследовательности), что $x_n(t)$ сходится в X к некоторому элементу $x(t) \in F(t)$. Тогда в силу (16) и (15)

$$\begin{aligned} \|f_n(t) - R(x(t))\| &\leq \|f_n(t) - R(x_n(t))\| + \|R(x_n(t)) - R(x(t))\| \\ &\leq \|R(x_{i(n)-1}^n) - R(x_n(t))\| + \|R(x_{i(n)}^n) - R(x_{i(n)-1}^n)\| \\ &\quad + \|R(x_n(t)) - R(x(t))\| \\ &\leq D(F(t_{i(n)-1}^n), F(t)) + D(F(t_{i(n)}^n), F(t_{i(n)-1}^n)) + d(x_n(t), x(t)) \\ &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

а это означает, что

$$f_n(t) \rightarrow R(x(t)) \quad \text{в } Y \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (18)$$

и доказывает предкомпактность $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$. В случае, когда $[\Phi] < \infty$, перенумеруем множество точек разрыва F , которое в силу следствия 7(b) не более чем счетно. В каждое рассмотренное выше разбиение T_n добавим n первых точек разрыва F и получившееся разбиение по-прежнему обозначим через T_n , так что новое разбиение T_n снова удовлетворяет условиям 1) и 2). Предкомпактность $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ в точке t непрерывности F вытекает из приведенных выше рассуждений. Если же $t \in [a, b]$ есть точка разрыва F , то найдется номер $N(t) \in \mathbb{N}$ такой, что $t \in T_n$ для всех $n \geq N(t)$, т.е. $t = t_{\ell(n)}^n$ для некоторого номера $\ell(n) \in \{0, 1, \dots, n\}$, также зависящего от t . По построению $x_{\ell(n)}^n \in F(t_{\ell(n)}^n) = F(t)$, $n \geq N(t)$, поэтому в силу компактности множества $F(t)$ некоторая подпоследовательность в $\{x_{\ell(n)}^n\}_{n=1}^\infty$ (для которой сохраним это же обозначение) сходится в X к некоторой точке $x(t) \in F(t)$. Поскольку $f_n(t) = R(x_{\ell(n)}^n)$ при $n \geq N(t)$, то снова выполнено условие (18).

Применяя обобщенный принцип выбора Хелли (теорема 9), найдем подпоследовательность в $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n=1}^\infty$, поточечно на $[a, b]$ сходящуюся в пространстве Y к некоторому отображению $g: [a, b] \rightarrow Y$ вида (см. (18)) $g(t) = R(f(t))$, $t \in [a, b]$, где $f(t) \in F(t)$ для всех $t \in [a, b]$, причем $g(t_0) = R(y_0)$, а лемма 2(d) и неравенство (17) гарантируют, что $\mathbf{V}_\Phi(g, [a, b]) \leq \mathbf{V}_\Phi(F, [a, b])$ и $\mathbf{V}_1(g, [a, b]) \leq \mathbf{V}_1(F, [a, b])$. Поскольку R – изометрия, заключаем, что $f(t_0) = y_0$, $\mathbf{V}_\Phi(f, [a, b]) \leq \mathbf{V}_\Phi(F, [a, b])$ и $\mathbf{V}_1(f, [a, b]) \leq \mathbf{V}_1(F, [a, b])$.

Если известно, что $F \in \text{Lip}([a, b]; c(X))$, то в силу (16) и (15) для $n \in \mathbb{N}$ и $i = 1, \dots, n$ достаточно дополнительно учесть неравенства

$$\|f_n(t) - f_n(s)\| \leq \frac{|t - s| d(x_i^n, x_{i-1}^n)}{|I_i^n|} \leq \mathbf{L}(F) |t - s|, \quad t, s \in I_i^n.$$

Тогда селекция $f \in \text{Lip}([a, b]; X)$ отображения F такова, что $\mathbf{L}(f) \leq \mathbf{L}(F)$.

Пусть $F \in BV_\Phi([a, b]; c(X))$ непрерывно. По лемме 5(a) имеем разложение $F = G \circ \nu$, где функция $\nu(t) = \mathbf{V}_1(F, [a, t])$, $t \in [a, b]$, принадлежит пространству $BV_\Phi([a, b]; \mathbb{R})$ и непрерывна, а многозначное отображение G из $\text{Lip}([0, \ell]; c(X))$ обладает следующими свойствами: $\ell = \mathbf{V}_1(F, [a, b]) = \mathbf{V}_1(\nu, [a, b])$, $\mathbf{L}(G) \leq 1$ и $\mathbf{V}_\Phi(\nu, [a, b]) = \mathbf{V}_\Phi(F, [a, b])$. Положим $\tau_0 = \nu(t_0) \in [0, \ell]$, так что $G(\tau_0) = F(t_0)$. Существует $g \in \text{Lip}([0, \ell]; X)$ такое, что $d(x_0, g(\tau_0)) = \text{dist}(x_0, G(\tau_0))$, $g(\tau) \in G(\tau)$ для всех $\tau \in [0, \ell]$ и $\mathbf{L}(g) \leq \mathbf{L}(G) \leq 1$. Полагая $f = g \circ \nu$, найдем, что $f \in BV_\Phi([a, b]; X)$ непрерывно, $f(t_0) = g(\tau_0)$, $f(t) \in F(t)$ для всех точек $t \in [a, b]$ и имеют место следующие неравенства: $\mathbf{V}_1(f, [a, b]) \leq \mathbf{V}_1(F, [a, b])$ и

$$\mathbf{V}_\Phi(f, [a, b]) = \mathbf{V}_\Phi(g \circ \nu, [a, b]) \leq \mathbf{V}_\Phi(\nu, [a, b]) = \mathbf{V}_\Phi(F, [a, b]).$$

Пусть, наконец, $F \in GV_\Phi([a, b]; X)$. Полагая $\lambda = p_\Phi(F, [a, b])$, в силу леммы 4(a) можно считать, что $\lambda > 0$, так что $\mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(F, [a, b]) \leq 1$ по лемме 4(b). По доказанному выше существует селекция $f \in BV_{\Phi_\lambda}([a, b]; X)$ такая, что $\mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(f, [a, b]) \leq \mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(F, [a, b])$. Следовательно, $p_\Phi(f, [a, b]) \leq \lambda$.

Рассмотрим банахово пространство ℓ_1 суммируемых последовательностей с нормой $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^\infty |x_n|$, $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell_1$. Для $t \in [0, 1]$ определим многозначное отображение

$$F(t) = \{x \in \ell_1 : \|x\|_1 = 1 \text{ и } x_1 = t\}.$$

Тогда хаусдорфова метрика $D(F(t), F(s)) = 2|t - s|$ при $t, s \in [0, 1]$, и любое отображение вида

$$f(t) = (t, (1-t)\{x_n\}_{n=2}^\infty), \quad t \in [0, 1], \quad \text{где} \quad \sum_{n=2}^\infty |x_n| = 1,$$

является липшицевой селекцией F . Если теперь $\nu \in GV_\Phi([a, b]; \mathbb{R})$ и $\nu([a, b]) = [0, 1]$, то $f \circ \nu$ есть селекция $F \circ \nu$ в классе отображений $GV_\Phi([a, b]; \cdot)$.

СЛЕДСТВИЕ 12. *Теорема 10 справедлива, если в ней заменить $[a, b]$ на $\mathbb{R}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала пусть многозначное отображение F принадлежит $BV_\Phi(\mathbb{R}; c(X))$. Пусть $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ – возрастающая последовательность такая, что $t_k \rightarrow \infty$ и $t_{-k} \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Полагая $I_k = [t_k, t_{k+1}]$ для $k \in \mathbb{Z}$, применим теорему 10 на отрезке I_0 и найдем селекцию $f_0 \in BV_\Phi(I_0; X)$ отображения F (точнее, сужения $F|_{I_0}$ отображения F на отрезок I_0) такую, что $d(x_0, f_0(t_0)) = \text{dist}(x_0, F(t_0))$, $\mathbf{V}_\Phi(f_0, I_0) \leq \mathbf{V}_\Phi(F, I_0)$ и $\mathbf{V}_1(f_0, I_0) \leq \mathbf{V}_1(F, I_0)$. “Двигаясь по отрезкам I_k вправо” от точки t_1 , будем последовательно применять теорему 10: на отрезке I_1 с начальным условием $x_0 = f_0(t_1) \in F(t_1), \dots$, на отрезке I_k с начальным условием $x_0 = f_{k-1}(t_k) \in F(t_k)$, $k \in \mathbb{N}$. В результате для любого $k \in \mathbb{N}$ найдем селекцию $f_k \in BV_\Phi(I_k; X)$ отображения $F|_{I_k}$ такую, что

$$f_k(t_k) = f_{k-1}(t_k), \quad \mathbf{V}_\Phi(f_k, I_k) \leq \mathbf{V}_\Phi(F, I_k), \quad \mathbf{V}_1(f_k, I_k) \leq \mathbf{V}_1(F, I_k). \quad (19)$$

Аналогично будем “двигаться по отрезкам I_k влево” от точки t_0 . Тогда при любом $k \in \mathbb{Z}$ на отрезке I_k имеется селекция f_k отображения F такая, что справедливы соотношения (19). Если $t \in \mathbb{R}$, так что $t \in I_k$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$, положим $f(t) = f_k(t)$. Ясно, что отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow X$ является селекцией F на $\mathbb{R}$, $f(t_0) = f_0(t_0)$, а в силу леммы 2(h,c) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_\Phi(f, \mathbb{R}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{V}_\Phi(f, [t_{-k}, t_k]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=-k}^{k-1} \mathbf{V}_\Phi(f_i, I_i) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=-k}^{k-1} \mathbf{V}_\Phi(F, I_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{V}_\Phi(F, [t_{-k}, t_k]) = \mathbf{V}_\Phi(F, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

и, аналогично, $\mathbf{V}_1(f, \mathbb{R}) \leq \mathbf{V}_1(F, \mathbb{R})$.

Если теперь $F \in GV_\Phi(\mathbb{R}; X)$, то для $\lambda = p_\Phi(f, \mathbb{R}) > 0$ имеем $\mathbf{V}_{\Phi_\lambda}(F, \mathbb{R}) \leq 1$, и остается воспользоваться только что доказанным результатом.

Утверждение, подобное следствию 12, справедливо и для ограниченных или неограниченных интервалов и полуинтервалов вещественной прямой.

Отметим, что липшицевы селекции для липшицевых многозначных отображений в различных контекстах устанавливались в работах [7], [8], [10]–[12], [16], [17], [31].

Отображение $f: [a, b] \rightarrow X$ называется *правильным*, если оно имеет не более чем счетное множество точек разрыва, в которых существуют односторонние пределы слева и справа. Говорят, что последовательность $f_n: [a, b] \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, является *представлением Кастэна* для многозначного отображения $F: [a, b] \rightarrow c(X)$, если для почти всех $t \in [a, b]$ последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ плотна в $F(t)$. Напомним [4, теорема III.8], что измеримость отображения F с замкнутыми образами эквивалентна наличию для него представления Кастэна из последовательности измеримых селекций. Приводимое ниже следствие базируется на теореме 10 и устанавливается подобно теореме Д1.9 из [10].

СЛЕДСТВИЕ 13. Пусть X – полное метрическое пространство, Φ – выпуклая φ -функция и $F \in GV_{\Phi}([a, b]; c(X))$. Тогда

- (а) для любой измеримой селекции f отображения F найдется последовательность правильных селекций F , которая почти всюду на $[a, b]$ сходится к f ;
- (б) существует последовательность правильных селекций F , которая является представлением Кастэна для отображения F .

7. Селекции многозначных отображений на произведении двух пространств. Пусть X и Y – два (хаусдорфовых) топологических пространства. Напомним, что многозначное отображение Γ из X в Y называется:

полунепрерывным снизу (сокращенно *п.н.сн.*) на X , если для любого открытого множества $\mathcal{U} \subset Y$ его предобраз $\Gamma^{-}(\mathcal{U}) = \{x \in X \mid \Gamma(x) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\}$ открыт в X ;

полунепрерывным сверху (*п.н.св.*) на X , если $\Gamma^{-}(\mathcal{U})$ замкнут в X для любого замкнутого $\mathcal{U} \subset Y$;

непрерывным на X , если Γ является п.н.сн. и п.н.св. на X одновременно.

Многозначное отображение Γ из X в метрическое пространство Y называется *слабо п.н.св.*, если для любого замкнутого шара $\mathcal{U}$ в Y предобраз $\Gamma^{-}(\mathcal{U})$ замкнут в X . Если метрическое пространство Y обладает свойством:

$$\text{замыкание в } Y \text{ любого открытого шара есть замкнутый шар,} \quad (20)$$

то из слабой п.н.св. многозначного отображения Γ вытекает его п.н.св. Например, свойством (20) обладает любое линейное метрическое пространство.

Напомним также, что топологическое пространство называется *экстремально несвязным* (см. [32, § 46.VI]), если замыкание всякого открытого в нем множества открыто.

Нам потребуется следующий результат из [33] (другое более простое доказательство этого результата содержится в [34]).

ЛЕММА 14. Пусть X – экстремально несвязное хаусдорфово топологическое пространство, Y – регулярное хаусдорфово $\mathcal{T}_3$ -пространство и Γ – п.н.св. многозначное отображение из X в Y с компактными значениями. Тогда Γ обладает непрерывной селекцией $\gamma: X \rightarrow Y$.

Пусть I – промежуток (связное подмножество $\mathbb{R}$) и многозначное отображение $H = H(t, x)$ действует из $I \times X$ в Y . Для фиксированного $x \in X$ определим многозначное отображение $H(\cdot, x)$ из I в Y правилом $H(\cdot, x)(t) = H(t, x)$, $t \in I$, а если $t \in I$ фиксировано, аналогично полагаем $H(t, \cdot)(x) = H(t, x)$, $x \in X$, так что $H(t, \cdot)$ отображает X в подмножества Y .

Основной результат этого пункта – следующая

ТЕОРЕМА 15. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – промежуток, X – экстремально несвязное хаусдорфово топологическое пространство, (Y, d) – полное метрическое пространство, удовлетворяющее условию (20), D – хаусдорфова метрика на $c(Y)$, порожденная d , $t_0 \in I$, $\eta: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение, $\Phi \in \mathcal{N}$ и $H: I \times X \rightarrow c(Y)$ – многозначное отображение такое, что

- (i) $H(\cdot, x) \in GV_{\Phi}(I; c(Y))$ для всех $x \in X$;
- (ii) $H(t, \cdot): X \rightarrow c(Y)$ является п.н.св. для всех $t \in I$.

Тогда существует селекция $h: I \times X \rightarrow Y$ отображения H такая, что

- (a) $h(\cdot, x) \in GV_{\Phi}(I; Y)$ для всех $x \in X$;
- (b) $p_{\Phi}(h(\cdot, x), I) \leq p_{\Phi}(H(\cdot, x), I)$ для всех $x \in X$;
- (c) $d(\eta(x), h(t_0, x)) = \text{dist}(\eta(x), H(t_0, x))$ для всех $x \in X$;
- (d) $h(t, \cdot): X \rightarrow Y$ непрерывно для всех $t \in I$.

Если, кроме того, $\sup_{x \in X} p_{\Phi}(H(\cdot, x), I) < \infty$, то селекция h будет непрерывной на $I \times X$. Отметим, что из (c) вытекает, в частности, что если η есть селекция $H(t_0, \cdot)$, то $h(t_0, \cdot) = \eta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $C(I; Y)$ пространство всех непрерывных отображений из I в Y с компактно открытой топологией, предбазой которой являются множества $\{f \in C(I; Y) \mid f(J) \subset \mathcal{U}\}$, где $J \subset I$ компактно и $\mathcal{U} \subset Y$ открыто. Определим многозначное отображение Γ из X в $C(I; Y)$ правилом

$$\Gamma(x) = \{f \in C(I; Y) \mid f(t) \in H(t, x) \quad \forall t \in I, \quad p_{\Phi}(f, I) \leq p_{\Phi}(H(\cdot, x), I), \\ d(\eta(x), f(t_0)) = \text{dist}(\eta(x), H(t_0, x))\}, \quad x \in X.$$

Для $x \in X$ имеем $\Gamma(x) \neq \emptyset$ в силу теоремы 10 и предположения (i), и $\Gamma(x)$ есть замкнутое подмножество в $GV_{\Phi}(I; Y)$ благодаря лемме 4(е). Покажем, что отображение Γ действует из X в $c(C(I; Y))$ и является п.н.св. Действительно, при любом $x \in X$ семейство $\Gamma(x)$ равномерно непрерывно в силу леммы 4(а) и условия $\Phi \in \mathcal{N}$, причем для любого $t \in I$ множество $\{f(t) \mid f \in \Gamma(x)\}$ компактно в Y в силу компактности множества $H(t, x)$, поэтому по теореме Арцела–Асколи $\Gamma(x)$ предкомпактно в $C(I; Y)$, а поскольку множество $\Gamma(x)$ замкнуто, то оно компактно в $C(I; Y)$. Для доказательства п.н.св. Γ в силу замечаний перед леммой 14 достаточно показать, что Γ слабо п.н.св. Для $\varepsilon > 0$, $g \in C(I; Y)$ и $t \in I$ положим

$$\overline{\mathcal{U}}_{\varepsilon}(g) = \{f \in C(I; Y) \mid \sup_{t \in I} d(f(t), g(t)) \leq \varepsilon\} \quad \text{и} \quad \overline{B}_{\varepsilon}(g(t)) = \{y \in Y \mid d(g(t), y) \leq \varepsilon\}.$$

Для $x \in X$ обозначим через $\Gamma_1(x)$ (компактное) множество отображений $f \in C(I; Y)$, удовлетворяющих первым двум условиям из определения $\Gamma(x)$, и через $\Gamma_2(x)$ – множество f , удовлетворяющих третьему условию из определения $\Gamma(x)$. Заметим, что

$$\Gamma_1^{-}(\overline{\mathcal{U}}_{\varepsilon}(g)) = \{x \in X \mid \Gamma_1(x) \cap \overline{\mathcal{U}}_{\varepsilon}(g) \neq \emptyset\} = \bigcap_{t \in I} H(t, \cdot)^{-}(\overline{B}_{\varepsilon}(g(t))),$$

причем любой предобраз под знаком пересечения в силу условия (ii) является замкнутым в X . Следовательно, $\Gamma_1^{-}(\overline{\mathcal{U}}_{\varepsilon}(g))$ замкнуто в X , так что многозначное отображение $\Gamma_1: X \rightarrow C(I; Y)$ п.н.св. Поскольку все значения $\Gamma_1(x)$ компактны в $C(I; Y)$ и график многозначного отображения Γ_2 замкнут в $X \times C(I; Y)$, по теореме 3.1.8 из [35] заключаем, что отображение $x \mapsto \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \cap \Gamma_2(x)$ является п.н.св.

По лемме 14 Γ имеет непрерывную селекцию $\gamma: X \rightarrow C(I; Y)$. Положим $h(t, x) = \gamma(x)(t)$, $t \in I$, $x \in X$. Из определения $\Gamma(x)$ и включения $\gamma(x) \in \Gamma(x)$, $x \in X$, вытекают соотношения (a)–(c). Установим (d). Если $t \in I$ и $\mathcal{U} \subset Y$ открыто, то, положив $\mathcal{U}(t) = \{f \in C(I; Y) \mid f(t) \in \mathcal{U}\}$, найдем, что

$$\{x \in X \mid h(t, x) \in \mathcal{U}\} = \{x \in X \mid \gamma(x)(t) \in \mathcal{U}\} = \{x \in X \mid \gamma(x) \in \mathcal{U}(t)\}.$$

Поскольку $\mathcal{U}(t)$ открыто в $C(I; Y)$ и γ непрерывно, последнее множество открыто в X , поэтому отображение $h(t, \cdot)$ непрерывно для любого $t \in I$.

Если дополнительно известно, что $\sup_{x \in X} p_{\Phi}(H(\cdot, x), I) < \infty$, то построенная выше селекция $h: I \times X \rightarrow Y$ непрерывна. Это следует из пункта (b), леммы 4(a), условия $\Phi \in \mathcal{N}$ и следующего неравенства для $(t_0, x_0), (t, x) \in I \times X$:

$$\begin{aligned} d(h(t, x), h(t_0, x_0)) &\leq d(h(t, x), h(t_0, x)) + d(h(t_0, x), h(t_0, x_0)) \\ &\leq \omega_{\Phi}(|t - t_0|) p_{\Phi}(H(\cdot, x), I) + d(h(t_0, x), h(t_0, x_0)). \end{aligned}$$

Отметим, что существование селекций h со свойством $h(\cdot, x) \in \text{Lip}(I; Y)$ в случае, когда $H(\cdot, x) \in \text{Lip}(I; c(Y))$ в пункте (i) теоремы 15, установлено в работе [16, теорема 5].

Автор выражает признательность рецензенту за полезные советы, способствовавшие некоторому обобщению теоремы 10, и указание на ссылку [31].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Michael E. A. Continuous selections. I // *Ann. Math.* 1956. V. 63. №2. P. 361–382.
- [2] Kuratowski K., Ryll-Nardzewski C. A general theorem on selectors // *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 1965. V. 13. P. 397–403.
- [3] Чобан М. М. Многозначные отображения и борелевские множества. I // *Тр. ММО.* 1970. Т. 22. С. 229–250.
- [4] Castaing C., Valadier M. *Convex Analysis and Measurable Multifunctions. Lecture Notes in Math.* V. 580. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
- [5] Реповш Д., Семенов П. В. Теория Э. Майкла непрерывных селекций. Развитие и приложения // *УМН.* 1994. Т. 54. №6. С. 49–80.
- [6] Hermes H. Existence and properties of solutions of $\dot{x} \in R(t, x)$ // *Stud. in Appl. Math., SIAM Publications.* 1969. V. 5. P. 188–193.
- [7] Hermes H. On continuous and measurable selections and the existence of solutions of generalized differential equations // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1971. V. 29. №3. P. 535–542.
- [8] Kikuchi N., Tomita Y. On the absolute continuity of multifunctions and orientor fields // *Funkcial. Ekvac.* 1971. V. 14. №3. P. 161–170.
- [9] Zhu Qiji. Single-valued representation of absolutely continuous set-valued mappings // *Kexue Tongbao.* 1986. V. 31. №7. P. 443–446.
- [10] Мордухович Б. Ш. *Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления.* М.: Наука, 1988.
- [11] Chistyakov V. V. On mappings of bounded variation // *J. Dynam. Control Systems.* 1997. V. 3. №2. P. 261–289.
- [12] Чистяков В. В. К теории многозначных отображений ограниченной вариации одной вещественной переменной // *Матем. сб.* 1998. Т. 189. №5. С. 153–176.
- [13] Чистяков В. В. Об отображениях ограниченной вариации со значениями в метрическом пространстве // *УМН.* 1999. Т. 54. №3. С. 189–190.
- [14] Чистяков В. В. Отображения ограниченной вариации со значениями в метрическом пространстве: обобщения // *Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина. Ч. 2. Негладкий анализ и оптимизация. Итоги науки и техники. Современная математика и ее прилож.* Т. 61. М.: ВИНТИ, 1999. С. 167–189.
- [15] Chistyakov V. V. Generalized variation of mappings with applications to composition operators and multifunctions // *Positivity.* 2001. V. 5. №4. P. 323–358.
- [16] Ślęzak W. A. Concerning continuous selectors for multifunctions with nonconvex values // *Zeszyty Nauk. WSP Bydgoszcz. Problemy Matematyczne.* 1987. V. 9. P. 85–104.
- [17] Belov S. A., Chistyakov V. V. A selection principle for mappings of bounded variation // *J. Math. Anal. Appl.* 2000. V. 249. №2. P. 351–366.

- [18] Chistyakov V. V. Generalized variation of mappings and applications // Real Anal. Exchange. 1999–2000. V. 25. № 1. P. 61–64.
- [19] Maligranda L. Orlicz Spaces and Interpolation. Seminars in Math. V. 5. Brasil: Univ. of Campinas, IMECC-UNICAMP, 1989.
- [20] Красносельский М. А., Рутцкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
- [21] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
- [22] Шварц Л. Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
- [23] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
- [24] Медведев Ю. Т. Обобщение одной теоремы Ф. Рисса // УМН. 1953. Т. 8. № 6. С. 115–118.
- [25] Cybertowicz Z., Matuszewska W. Functions of bounded generalized variations // Comment. Math. Prace Mat. 1977. V. 20. P. 29–52.
- [26] Maligranda L., Orlicz W. On some properties of functions of generalized variation // Monatsh. Math. 1987. V. 104. P. 53–65.
- [27] Komura Y. Differentiability of nonlinear semi-groups // J. Math. Soc. Japan. 1969. V. 21. P. 375–402.
- [28] Helly E. Über lineare Funktionaloperationen // Sitzungsberichte der Naturwiss. Klasse. Kais. Akad. Wiss. (Wien). 1912. V. 121. P. 265–297.
- [29] Kupka I. Continuous multifunction from $[-1, 0]$ to $\mathbb{R}$ having no continuous selection // Publ. Math. Debrecen. 1996. V. 48. № 3–4. P. 367–370.
- [30] Chistyakov V. V., Galkin O. E. On maps of bounded p -variation with $p > 1$ // Positivity. 1998. V. 2. № 1. P. 19–45.
- [31] Guričan J., Kostyrko P. On Lipschitz selections of Lipschitz multifunctions // Acta Math. Univ. Comenian. 1985. V. 46/47. P. 131–135.
- [32] Куратовский К. Топология. Т. 2. М.: Мир, 1969.
- [33] Hasumi M. A continuous selection theorem for compact-valued maps // Math. Ann. 1969. V. 179. P. 83–89.
- [34] Graf S. A measurable selection theorem for compact-valued maps // Manuscripta Math. 1979. V. 27. P. 341–352.
- [35] Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: chistya@mm.unn.ac.ru

Поступило
02.02.2000
Исправленный вариант
09.02.2001