Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Симич, Некоторые свойства целых функций с неотрицательными коэффициентами Тейлора, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 5, 760–765

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3720>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 12:28:52

УДК 517.547.2

Некоторые свойства целых функций с неотрицательными коэффициентами Тейлора

С. Сими́ч

Пусть f – целая функция произвольного конечного порядка с неотрицательными коэффициентами Тейлора. Доказано, что ее сужение на положительную часть действительной оси принадлежит классу Хаана Г. Также показано, что f/f' – медленно меняющаяся функция Берлинга.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Класс трансцендентных целых функций конечного порядка ρ , $0 \leq \rho < \infty$, с неотрицательными коэффициентами Тейлора будем обозначать через A_ρ .

В этой статье доказываются некоторые свойства этого класса, которые представляют интерес в отдельных разделах действительного или комплексного анализа, а также в теории экстремальных значений.

Сначала приведем некоторые определения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Положительная измеримая функция $a(\cdot)$ называется *регулярно меняющейся с индексом* $\mu \in \mathbb{R}$, если асимптотическое соотношение

$$\frac{a(tx)}{a(x)} \rightarrow t^\mu, \quad x \rightarrow \infty, \quad (1)$$

выполняется при любом $t > 0$.

Кроме того, соотношение (1) выполняется равномерно на любом компактном t -множестве на полуоси $(0, \infty)$ (см. [1; с. 6]).

Теория регулярной вариации в настоящее время достаточно хорошо развита и находит многочисленные применения в анализе, теории вероятностей, теории чисел и т.д. (см. [1], [2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Измеримая функция $b(\cdot)$ называется *медленно меняющейся функцией Берлинга*, если $b(x) = o(x)$, $x \rightarrow \infty$, и

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{b(x + tb(x))}{b(x)} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty, \quad (2)$$

(см. [1; с. 120–122]).

Класс таких функций используется для построения обобщений тауберовой теоремы Винера (см. [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Класс Γ состоит из неубывающих и непрерывных справа функций $c(\cdot)$, для которых существует такая произвольная измеримая функция $b(\cdot)$, что

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{c(x + tb(x))}{c(x)} \rightarrow e^t, \quad x \rightarrow \infty \quad (3)$$

(см. [1; с. 174–180]).

Если $c \in \Gamma$ имеет произвольную функцию b , то будем писать $c \in \Gamma(b)$.

Класс Γ чрезвычайно важен в теории экстремальных значений (см. [4], [5]).

2. Основные результаты. Основной результат этой статьи состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1. Для любой трансцендентной $f \in A_\rho$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r)f''(r)}{(f'(r))^2} = 1$$

независимо от порядка ρ .

Имеет место следующее простое следствие этой теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Для $f \in A_\rho$ определим

$$\tilde{f}(r) := \frac{f(r)}{f'(r)}.$$

Тогда $\tilde{f}$ является медленно меняющейся функцией Берлинга, т.е.

$$\frac{\tilde{f}(r + t\tilde{f}(r))}{\tilde{f}(r)} \rightarrow 1, \quad r \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует асимптотическая эквивалентность типа Харди для производной n -го порядка (см. [6]).

ТЕОРЕМА 3. Для $f \in A_\rho$ выполняется соотношение

$$f^{(n)}(r) \sim \frac{f(r)}{(\tilde{f}(r))^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Наконец, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Если $f \in A_\rho$, то $f \in \Gamma(\tilde{f})$. Следовательно,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{f(r + t\tilde{f}(r))}{f(r)} \rightarrow e^t, \quad r \rightarrow \infty.$$

3. Доказательства. Для $f \in A_\rho$ введем обозначение $T(r) := f(r)f''(r)/(f'(r))^2$. Сначала докажем, что

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} T(r) \geq 1.$$

Если

$$f(z) := \sum a_n z^n, \quad a_n \geq 0,$$

то введем обозначение

$$f_0(z) := f(z), \quad f_1(z) := zf'(z) = \sum na_n z^n, \quad f_2(z) := zf_1'(z) = \sum n^2 a_n z^n.$$

Тогда

$$T(r) = \frac{f_0(r)f_2(r)}{(f_1(r))^2} - \frac{f_0(r)}{f_1(r)}$$

и при $r > 0$

$$\frac{f_0(r)f_2(r)}{(f_1(r))^2} > 1$$

в силу неравенства Коши [7; с. 28].

Итак, при $r > 0$ имеем

$$r \left(\frac{f_0(r)}{f_1(r)} \right)' = 1 - \frac{f_0(r)f_2(r)}{(f_1(r))^2} < 0,$$

откуда следует, что функция f_0/f_1 монотонно убывает и приближается к нулю в пределе; в противном случае, существует $a > 0$ такое, что $\forall r > 0 \quad f_0(r)/f_1(r) > a$. Следовательно, $f'(r)/f(r) < 1/ar$, и после интегрирования мы получаем $f(r) = O(r^{1/a})$. Отсюда следует, что, в этом случае f является полиномом, а не трансцендентной функцией.

Следовательно,

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} T(r) \geq 1.$$

Докажем, что

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} T(r) \leq 1.$$

Доказательство этого утверждения основано на предложениях 1 и 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть целая функция g конечного порядка ρ удовлетворяет соотношениям

$$M(r) := \max_{|z|=r} |g(z)|, \quad M_1(r) := \max_{|z|=r} |g'(z)|.$$

Тогда

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(rM_1(r)/M(r))}{\log r} = \rho$$

(см. [2; с. 13]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть h – положительная функция, обладающая свойством

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log h(x)}{\log x} = \rho, \quad 0 \leq \rho < \infty.$$

Тогда существует регулярно меняющаяся функция $k \in K_\rho$ такая, что $h(x) \leq k(x)$
и

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{k(x)}{h(x)} = 1.$$

Это предложение известно как *теорема об аппроксимации регулярно меняющейся функцией* (см. [1; с. 81]).

Введем обозначения

$$t_0(r) := \frac{f_1(r)}{f_0(r)}, \quad t_1(r) := \frac{f_2(r)}{f_1(r)}.$$

Тогда имеем

$$T(r) = \frac{t_1(r)}{t_0(r)} - \frac{1}{t_0(r)}. \quad (4)$$

Простым следствием предложения 1 является следующая лемма.

ЛЕММА 1. Если $f \in A_\rho$, то

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log t_0(r)}{\log r} = \rho.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f \in A_\rho$ можно представить как

$$f(z) = \sum a_n z^n, \quad a_n \geq 0,$$

для $|z| = r$ получаем

$$|f(z)| = \left| \sum a_n z^n \right| \leq \sum a_n |z|^n = f(r),$$

т.е. $M(r) = f(r)$ и, аналогично, $M_1(r) = f'(r)$.

Теперь, объединяя лемму 1 и предложение 2, получим, что для $f \in A_\rho$ существует регулярно меняющаяся функция $k \in R_\rho$ такая, что

$$t_0(r) \leq k(r), \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{k(r)}{t_0(r)} = 1.$$

Таким образом, для произвольного $C > 1$ имеем

$$\frac{k(r)}{C} < t_0(r) \leq k(r), \quad r > r_0(C), \quad (5)$$

и, следовательно, при любом $t > 1$

$$\frac{k(tr)}{C} < t_0(tr) \leq k(tr), \quad r > r_0(C). \quad (6)$$

Объединяя (5) и (6), получим

$$\frac{t_0(tr)}{t_0(r)} < C \frac{k(tr)}{k(r)}, \quad r > r_0(C),$$

т.е., применяя оценки Поттера [1; с. 25], в силу определения 1 окончательно получаем, что неравенство

$$\frac{t_0(tr)}{t_0(r)} < C^2 t^{\rho+1}, \quad r > r_1(C), \quad (7)$$

выполняется при каждом $t > 1$.

Приведем еще одно важное утверждение.

ЛЕММА 2. При любых $t > 1$, $r > 0$ имеем

$$t_i(r) \log t < \log \frac{f_i(tr)}{f_i(r)} < t_i(tr) \log t, \quad i = 0, 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $t_i(r)$ монотонно возрастает при $r > 0$, имеем

$$t_i(r) \log t = t_i(r) \int_r^{tr} \frac{du}{u} < \int_r^{tr} t_i(u) \frac{du}{u} = \log \frac{f_i(tr)}{f_i(r)} < t_i(tr) \log t.$$

Теперь, объединяя это утверждение с леммой 2 и соотношением (7) и учитывая тот факт, что $t_0 = f_1/f_0$, получим

$$\begin{aligned} t_1(r) \log t &< \log \frac{f_1(tr)}{f_1(r)} < \log(C^2 t^{\rho+1}) + \log \frac{f_0(tr)}{f_0(r)} < \log(C^2 t^{\rho+1}) + t_0(tr) \log t \\ &< \log(C^2 t^{\rho+1}) + (C^2 t^{\rho+1} \log t) t_0(r), \quad r > r_1(C). \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку $t_0(r) \uparrow \infty$, полагая $t = C^{1/(\rho+1)}$ в (8), получим

$$\frac{t_1(r)}{t_0(r)} < C^3 + o(1), \quad r \rightarrow \infty.$$

Так как $C > 1$ произвольно, из соотношения (4) окончательно следует, что

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} T(r) \leq 1.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Имеем $\tilde{f}(r) = r/t_0(r)$. Поскольку $t_0(r) \uparrow \infty$, получим

$$\tilde{f}(r) = o(r), \quad r \rightarrow \infty.$$

Итак, из теоремы 1 выводим, что

$$(\tilde{f}(r))' = 1 - T(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\tilde{f}(r + t\tilde{f}(r)) - \tilde{f}(r) = t\tilde{f}(r)(\tilde{f})'(r + \theta t\tilde{f}(r)), \quad 0 < \theta < 1,$$

т.е.

$$\frac{\tilde{f}(r + t\tilde{f}(r))}{\tilde{f}(r)} - 1 = t(\tilde{f})' \left(r \left(1 + \frac{\theta t}{t_0(r)} \right) \right). \quad (9)$$

Теперь очевидно, что правая часть равенства (9) стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$ равномерно на любом конечном интервале оси $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из теоремы 1 следует, что

$$\frac{f''(r)}{f'(r)} \sim \frac{f'(r)}{f(r)}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Однако, если $f \in A_\rho$, то также $f^{(m)} \in A_\rho$, $m = 1, 2, \dots, n$. Следовательно,

$$\frac{f^{(n)}(r)}{f^{(n-1)}(r)} \sim \frac{f^{(n-1)}(r)}{f^{(n-2)}(r)} \sim \dots \sim \frac{f''(r)}{f'(r)} \sim \frac{f'(r)}{f(r)}, \quad r \rightarrow \infty,$$

т.е.

$$\frac{f^{(n)}(r)}{f(r)} \sim \left(\frac{f'(r)}{f(r)} \right)^n, \quad r \rightarrow \infty,$$

откуда следует утверждение теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Из теоремы 2 следует, что

$$\log \frac{f(r + t\tilde{f}(r))}{f(r)} = \int_r^{r+t\tilde{f}(r)} \frac{f'(u)}{f(u)} du = \int_0^t \frac{\tilde{f}(r)}{\tilde{f}(r + u\tilde{f}(r))} du \rightarrow t, \quad r \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular Variation*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **27**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
- [2] R. P. Boas, *Entire Functions*, Academic Press Inc. Publ., New York, 1954.
- [3] S. Bloom, "A characterisation of B -slowly varying functions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **54** (1976), 243–250.
- [4] S. I. Resnick, *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*, Applied Probability, **4**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1987.
- [5] M. R. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootzen, *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [6] G. H. Hardy, *Orders of Infinity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1924.
- [7] Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Г. Поля, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.

С. Симич

Математический институт Сербской Академии наук,
г. Белград, Сербия
E-mail: ssimic@turing.mi.sanu.ac.yu

Поступило

20.12.2005

Исправленный вариант

08.09.2006