Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Свистула, Критерий правильной квазимеры, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 5, 751–759

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3721>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:15:10

Критерий правильной квазимеры

М. Г. Свистула

В известной теореме о разложении квазимеры в сумму меры и правильной квазимеры дано новое представление слагаемого – меры, что позволило получить критерий правильной квазимеры. С помощью этого критерия решена проблема о сумме правильных квазимер. Полученные результаты перенесены на квазисостояния.

Библиография: 6 названий.

1. Далее всюду X – компактное хаусдорфово пространство, τ – класс всех открытых, $\mathcal{C}$ – класс всех замкнутых (совпадающий с классом компактных) множеств, $\mathcal{A} = \tau \cup \mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ – борелевская σ -алгебра, $\beta(X)$ – множество всех подмножеств X , символом EF обозначаем пересечение множеств E и F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Квазимерой* называется функция множества $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$, удовлетворяющая условиям

- 1) если $E, F \in \mathcal{A}$ и $E \subset F$, то $\mu(E) \leq \mu(F)$;
- 2) если $E, F \in \mathcal{A}$, $E \cap F = \emptyset$ и $E \cup F \in \mathcal{A}$, то $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$;
- 3) если $U \in \tau$, то $\mu(U) = \sup\{\mu(C): C \in \mathcal{C}, C \subset U\}$.

Нетрудно проверить, что квазимеры образуют положительный конус, а также обладают следующими свойствами [1; предложение 2.1]:

- а) $\mu(\emptyset) = 0$;
- б) если $C \in \mathcal{C}$, то $\mu(C) = \inf\{\mu(U): U \in \tau, C \subset U\}$;
- в) если $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{A}$, то $\mu(\bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $C(X)$ – пространство вещественнозначных непрерывных функций на X . *Квазисостоянием* называется функционал $\rho: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий условиям

- 1) если $a \in C(X)$ и $a \geq 0$, то $\rho(a) \geq 0$;
- 2) для любой функции $a \in C(X)$ функционал ρ является линейным на наименьшей банаховой подалгебре $C(X)$, содержащей a и тождественную единицу.

Очевидно, квазисостояние является обобщением положительного линейного функционала на $C(X)$.

Впервые квазимеры рассмотрел И. Ф. Аарнес в работе [1], где было установлено взаимнооднозначное соответствие между квазимерами и квазисостояниями, что и

вызвало первоначальное внимание к квазимерам. Однако квазимеры представляют и самостоятельный интерес как функции множества, обобщающие регулярные борелевские меры.

Очевидно, сужение регулярной борелевской меры на $\mathcal{A}$ является квазимерой. Вообще говоря, не всякая квазимера может быть продолжена до регулярной борелевской меры. (Заметим, что если квазимера продолжается до борелевской меры, то эта мера будет внешне регулярной на классе $\mathcal{C}$ и, следовательно, регулярной [2; § 52, теорема 6]. Из регулярности продолжения следует его единственность.) Квазимера допускает такое продолжение тогда и только тогда, когда она полуаддитивна, т.е. для любых $E, F \in \mathcal{A}$, где $E \cup F \in \mathcal{A}$, выполняется $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$ (см. [3] или [4]). В связи с этим полуаддитивную квазимеру принято называть мерой. Примеры квазимер, не являющихся мерами, содержатся в работах [1], [3], [5], [6] и других.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Квазимеру $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ называют *правильной*, если из того, что $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ является мерой и $\lambda \leq \mu$, следует, что $\lambda = 0$.

Д. Дж. Грубб и Тим Лаберже в работе [5; п. 2] доказывают теорему о разложении квазимеры единственным образом в сумму меры и правильной квазимеры и ставят вопрос, будет ли сумма правильных квазимер тоже правильной квазимерой. В нашей статье дается положительное решение этого вопроса.

Статья организована следующим образом: в п. 2 мы рассматриваем функцию φ_μ , порождаемую квазимерой μ по аналогии с внешней мерой, индуцированной мерой; с помощью этой функции в п. 3 передоказываем теорему о разложении квазимеры, при этом, в отличие от известного доказательства [5], получаем выражение слагаемого – меры через квазимеру; в п. 4, опираясь на теорему о разложении, даем критерий правильной квазимеры; с помощью этого критерия в п. 5 доказываем теорему о сумме квазимер; п. 6 посвящен перенесению полученных результатов на квазисостояния.

2. Пусть $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ – квазимера. Определим функцию множества $\varphi_\mu: \beta(X) \rightarrow [0, +\infty)$ следующим образом:

$$\varphi_\mu(E) = \varphi(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \mu(E_i) : E_i \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{i=1}^n E_i \right\}, \quad E \subset X.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Функция φ обладает следующими свойствами:

- 1) $\varphi(\emptyset) = 0$;
- 2) если $E \subset F$, то $\varphi(E) \leq \varphi(F)$;
- 3) $\varphi(E \cup F) \leq \varphi(E) + \varphi(F)$;
- 4) $\varphi(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \mu(U_i) : U_i \in \tau, E \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \right\}$;
- 5) если $E \in \mathcal{A}$, то $\varphi(E) \leq \mu(E)$;
- 6) если $U \in \tau$, то $\varphi(U) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \mu(U_i) : U_i \in \tau, U = \bigcup_{i=1}^n U_i \right\}$;
- 7) если $C \in \mathcal{C}$, то $\varphi(C) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \mu(C_i) : C_i \in \mathcal{C}, C = \bigcup_{i=1}^n C_i \right\}$;
- 8) если $K, C \in \mathcal{C}$ и $K \cap C = \emptyset$, то $\varphi(K \cup C) = \varphi(K) + \varphi(C)$;
- 9) $\varphi(E) = \inf \{ \varphi(U) : U \in \tau, E \subset U \}$;
- 10) если $U \in \tau$, то $\varphi(U) = \sup \{ \varphi(C) : C \in \mathcal{C}, C \subset U \}$;
- 11) φ является внешней мерой, ее сужение $\varphi|_{\mathcal{A}}$ – регулярной борелевской мерой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты 1, 2, 3, 5 легко следуют из определения φ .

4) Обозначим правую часть равенства через α . Согласно определению $\varphi(E) \leq \alpha$ и для любого $\epsilon > 0$ существует такой набор $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$, что $E \subset \bigcup_{i=1}^n E_i$ и $\sum_{i=1}^n \mu(E_i) < \varphi(E) + \epsilon$. По свойству (6) квазимеры для любого E_i найдется такое $U_i \in \tau$, что $E_i \subset U_i$, $\mu(U_i) < \mu(E_i) + \epsilon/n$. Тогда $\sum_{i=1}^n \mu(U_i) < \varphi(E) + 2\epsilon$. Отсюда $\alpha \leq \varphi(E)$.

6) следует из 4).

7) Обозначим правую часть равенства через γ . Из определения $\varphi(C) \leq \gamma$. Согласно 4) для любого $\epsilon > 0$ существует такой набор $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, что $C \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ и $\sum_{i=1}^n \mu(U_i) < \varphi(C) + \epsilon$. Известно [2; § 50, теорема 1], что существует набор $\{C_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{C}$, для которого $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$ и $C_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $\sum_{i=1}^n \mu(C_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(U_i) < \varphi(C) + \epsilon$. Отсюда $\gamma \leq \varphi(C)$.

8) Согласно 7) для любого $\epsilon > 0$ существует такой набор $\{C_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{C}$, что $K \cup C = \bigcup_{i=1}^n C_i$ и $\sum_{i=1}^n \mu(C_i) < \varphi(K \cup C) + \epsilon$. Имеем $\sum_{i=1}^n \mu(C_i) = \sum_{i=1}^n \mu(KC_i) + \sum_{i=1}^n \mu(CC_i) \geq \varphi(K) + \varphi(C)$. Тогда $\varphi(K) + \varphi(C) \leq \varphi(K \cup C)$. Противоположное неравенство выполняется в силу 3).

9) Если $U \in \tau$ и $E \subset U$, то $\varphi(E) \leq \varphi(U)$ в силу монотонности φ . Согласно 4) для любого $\epsilon > 0$ существует такой набор $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, что $E \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ и $\sum_{i=1}^n \mu(U_i) < \varphi(E) + \epsilon$. Положим $V = \bigcup_{i=1}^n U_i$. Тогда $V \in \tau$, $E \subset V$ и $\varphi(V) \leq \sum_{i=1}^n \varphi(U_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(U_i) < \varphi(E) + \epsilon$.

10) В силу монотонности φ , если $C \in \mathcal{C}$ и $C \subset U$, то $\varphi(C) \leq \varphi(U)$. По определению квазимеры для любого $\epsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset U$ и $\mu(U \setminus C) < \epsilon$. Тогда $\varphi(U) \leq \varphi(U \setminus C) + \varphi(C) \leq \mu(U \setminus C) + \varphi(C) < \epsilon + \varphi(C)$.

11) Сужение $\varphi|_{\mathcal{C}}$ является объемом в силу пунктов 1, 2, 3, 8 [2; § 53]. В силу 10) внутренний объем, индуцированный этим объемом, равен φ . Тогда внешняя мера будет равна $\varphi^*(E) = \inf\{\varphi(U) : U \in \tau, E \subset U\}$, $E \subset X$. На основании 9) $\varphi^* = \varphi$. Как известно [2; § 53, теорема 5], сужение $\varphi^*|_{\mathcal{B}}$ является регулярной борелевской мерой.

Используя функцию φ , легко доказать известный критерий о продолжении квазимеры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Квазимера $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ продолжима до регулярной борелевской меры тогда и только тогда, когда она полуаддитивна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Из пунктов 6, 7 предложения 1 и полуаддитивности μ следует, что для любого $E \in \mathcal{A}$ $\varphi(E) = \mu(E)$. Согласно пункту 11 $\varphi|_{\mathcal{B}}$ – регулярная борелевская мера.

3. Теорему Грубба и Лаберже о разложении квазимеры [5; пункт 2] докажем с использованием функции φ . Нам понадобится также следующая простая

ЛЕММА 1. Пусть $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ – квазимеры и $\mu_1 \leq \mu_2$. Тогда $\nu = \mu_2 - \mu_1$ тоже квазимера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ и условие 2 определения 1 выполняется. Отсюда следует, что если $C \in \mathcal{C}$, $U \in \tau$ и $C \subset U$, то $\nu(C) \leq \nu(U)$, так как $\nu(U) = \nu(C) + \nu(U \setminus C)$, где $\nu(U \setminus C) \geq 0$. Далее, для любого $\epsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset U$ и $\mu_2(U \setminus C) < \epsilon$. Тогда $\nu(U \setminus C) < \epsilon$ и $\nu(U) - \epsilon < \nu(C)$. Значит, $\nu(U) = \sup\{\nu(C) : C \in \mathcal{C}, C \subset U\}$, где $U \in \tau$. Осталось доказать монотонность ν .

Пусть $V, U \in \tau$ и $V \subset U$. Если $C \in \mathcal{C}$ и $C \subset V$, то $C \subset U$ и, как показано выше, $\nu(C) \leq \nu(U)$. Переходя к супремуму в левой части неравенства по всем таким C , получаем $\nu(V) \leq \nu(U)$. Остальные случаи легко сводятся к предыдущим, так как $\nu(E) = \nu(X) - \nu(X \setminus E)$ для $E \in \mathcal{A}$.

Заметим, что при доказательстве леммы попутно доказано, что в определении квазимеры условие 1 следует из условий 2 и 3.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ – квазимера. Тогда $\varphi|_{\mathcal{A}}$ является наибольшей из мер, мажорируемых μ , и $\nu = \mu - \varphi|_{\mathcal{A}}$ будет правильной квазимерой. Разложение $\mu = \varphi|_{\mathcal{A}} + \nu$ является единственным разложением μ в виде суммы меры и правильной квазимеры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ – мера и $\psi \leq \mu$. Возьмем $E \in \mathcal{A}$. По определению φ для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$, что $E \subset \bigcup_{i=1}^n E_i$ и $\sum_{i=1}^n \mu(E_i) \leq \varphi(E) + \varepsilon$. Тогда $\psi(E) \leq \sum_{i=1}^n \psi(E_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(E_i) \leq \varphi(E) + \varepsilon$. Отсюда $\psi \leq \varphi|_{\mathcal{A}}$.

По лемме 1 функция $\nu = \mu - \varphi|_{\mathcal{A}}$ будет квазимерой, причем правильной, так как в противном случае $\varphi|_{\mathcal{A}}$ не была бы наибольшей из мер, мажорируемых μ .

Докажем единственность разложения. Пусть $\mu = \varphi_1 + \nu_1$, где $\varphi_1, \nu_1: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$, φ_1 – мера, ν_1 – правильная квазимера. Имеем $\varphi + \nu = \varphi_1 + \nu_1$, откуда $(\varphi - \varphi_1) + \nu = \nu_1$. Здесь $0 \leq \varphi - \varphi_1 \leq \nu_1$, $\varphi - \varphi_1$ – мера, ν_1 – правильная квазимера. Тогда $\varphi - \varphi_1 = 0$. Значит, $\varphi_1 = \varphi$ и $\nu_1 = \nu$. Теорема доказана.

Квазимеру μ называют *экстремальной*, если $\mu(X) = 1$ и справедлива импликация: если μ_1, μ_2 – квазимеры, для которых $\mu_1(X) = \mu_2(X) = 1$, $\lambda \in (0, 1)$ и $\mu = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$, то $\mu = \mu_1 = \mu_2$.

Квазимеру μ называют *простой*, если она принимает только два значения 0 и 1. Легко проверить, что простая квазимера является экстремальной.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ – экстремальная квазимера (например, простая). Тогда μ либо мера, либо правильная квазимера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 справедливо разложение $\mu = \varphi + \nu$, где φ – мера, ν – правильная квазимера. Предположим, что $\varphi(X) \neq 0$ и $\nu(X) \neq 0$. Имеем $\varphi(X) + \nu(X) = \mu(X) = 1$. Можно представить $\mu = \varphi(X)\mu_1 + \nu(X)\mu_2$, где $\mu_1 = \frac{1}{\varphi(X)}\varphi$, $\mu_2 = \frac{1}{\nu(X)}\nu$. Это противоречит экстремальности μ . Таким образом, либо $\varphi(X) = 0$ и тогда $\mu = \nu$, либо $\nu(X) = 0$ и тогда $\mu = \varphi$.

4. Следующая теорема дает критерий правильной квазимеры.

ТЕОРЕМА 2. Квазимера $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ является правильной тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, что $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ и $\sum_{i=1}^n \mu(U_i) < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о разложении квазимера μ будет правильной тогда и только тогда, когда $\varphi(X) = 0$. Согласно пункту 4 предложения 1 это эквивалентно тому, что

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^n \mu(U_i) : U_i \in \tau, X = \bigcup_{i=1}^n U_i \right\} = 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. В формулировке теоремы вместо конечного набора открытых множеств можно брать набор замкнутых множеств или множеств из $\mathcal{A}$ и при доказательстве обращаться к пункту 7 предложения 1 или, соответственно, определению φ .

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Для простой квазимеры μ следующие условия эквивалентны:

- 1) μ правильная;
- 2) существует такой набор $\{U_i\}_{i=1}^n$ открытых множеств (или замкнутых, или множеств из $\mathcal{A}$), что $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ и $\mu(U_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$;
- 3) для любого $x \in X$ $\mu(\{x\}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий 1) и 2) легко следует из теоремы 2. В силу монотонности квазимеры 2) $\implies$ 3). Если выполнено условие 3), то для любого $x \in X$ существует открытая окрестность $U(x)$, для которой $\mu(U(x)) = 0$. В силу компактности пространства X из полученного открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Таким образом, 3) $\implies$ 2).

На основании следствия 2.1 для простой квазимеры μ можно сделать вывод, что если $\mu(\{x\}) = 0$ для всех $x \in X$, то μ правильная, если же существует $x_0 \in X$, для которого $\mu(\{x_0\}) = 1$, то μ является мерой Дирака.

ПРИМЕР. Пусть $X = [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$, $\mathcal{D} = [-1/2, 1/2] \times \{0\}$, λ – мера Лебега в X . Пусть C – замкнутый солид в X , т.е. такое замкнутое подмножество X , что и оно само, и его дополнение являются связными.

Положим

$$\mu(C) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathcal{D} \subset C; \\ \lambda(C), & \text{если } \mathcal{D} \cap C \neq \emptyset \text{ и } \mathcal{D} \cap (X \setminus C) \neq \emptyset; \\ 0, & \text{если } \mathcal{D} \subset X \setminus C. \end{cases}$$

Так определенная функция множества μ является солид-функцией и, следовательно, может быть однозначно продолжена до квазимеры μ на $\mathcal{A}$. (Подробнее см. [3], где разработана теория солид-функций и содержится аналогичный пример.)

Возьмем $0 < \varepsilon < 1/2$. Положим

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \times [-\varepsilon, \varepsilon], & C_2 &= \left[0, \frac{1}{2}\right] \times [-\varepsilon, \varepsilon], \\ C_3 &= \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[\varepsilon, \frac{1}{2}\right], & C_4 &= \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, -\varepsilon\right]. \end{aligned}$$

Очевидно, все C_i – замкнутые солиды, $\bigcup_{i=1}^4 C_i = X$, $\sum_{i=1}^4 \mu(C_i) = 2\varepsilon$. По теореме 2 квазимера μ является правильной.

5. Далее, используя теорему 2, решаем вопрос о сумме правильных квазимер.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mu_1, \mu_2: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ – правильные квазимеры. Тогда $\mu_1 + \mu_2$ тоже правильная квазимера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ – мера и $\mu \leq \mu_1 + \mu_2$. Продолжим μ на $\mathcal{B}$ до регулярной борелевской меры и будем считать, что μ и есть это продолжение.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Так как квазимеры μ_1 и μ_2 правильные, то по теореме 2 существуют такие наборы $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ и $\{F_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{A}$, что $X = \bigcup_{i=1}^n E_i = \bigcup_{j=1}^m F_j$, $\sum_{i=1}^n \mu_1(E_i) < \varepsilon$, $\sum_{j=1}^m \mu_2(F_j) < \varepsilon$.

Положим $A_1 = E_1$, $A_2 = E_2 \setminus E_1$, $A_n = E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$; аналогично, $B_1 = F_1$, $B_2 = F_2 \setminus F_1, \dots, B_m = F_m \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} F_j$. Очевидно, все множества A_i и B_j борелевские, A_i попарно не пересекаются, B_j также попарно не пересекаются, $A_i \subset E_i$, $B_j \subset F_j$, $X = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$.

Рассмотрим набор $\{A_i B_j\}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Эти множества борелевские, попарно не пересекаются, $\bigcup_{i,j} A_i B_j = X$, $\bigcup_{j=1}^m A_i B_j = A_i$, $\bigcup_{i=1}^n A_i B_j = B_j$.

Поскольку μ – регулярная борелевская мера, существует такой набор $\{C_{ij}\} \subset \mathcal{C}$, что $C_{ij} \subset A_i B_j$ и $\sum_{i,j} \mu(C_{ij}) > \sum_{i,j} \mu(A_i B_j) - \varepsilon = \mu(X) - \varepsilon$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \mu(C_{ij}) &\leq \sum_{i,j} \mu_1(C_{ij}) + \sum_{i,j} \mu_2(C_{ij}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu_1(C_{ij}) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu_2(C_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_1\left(\bigcup_{j=1}^m C_{ij}\right) + \sum_{j=1}^m \mu_2\left(\bigcup_{i=1}^n C_{ij}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \mu_1(E_i) + \sum_{j=1}^m \mu_2(F_j) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Тогда $\mu(X) < 3\varepsilon$. Отсюда $\mu(X) = 0$. Значит, $\mu = 0$ и $\mu_1 + \mu_2$ – правильная квазимера по определению.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Правильные квазимеры образуют положительный конус.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $\mu_i, \varphi_i, \nu_i: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$, μ_i – квазимеры, φ_i – меры, ν_i – правильные квазимеры, $\mu_i = \varphi_i + \nu_i$, где $i = 1, 2$. Пусть, далее, $\mu_1 \leq \mu_2$. Тогда $\varphi_1 \leq \varphi_2$ и $\nu_1 \leq \nu_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 функция $\mu_2 - \mu_1$ будет квазимерой. Тогда по теореме 1 существуют мера φ и правильная квазимера ν , для которых $\mu_2 - \mu_1 = \varphi + \nu$. Получаем $\mu_2 = \mu_1 + \varphi + \nu = (\varphi_1 + \varphi) + (\nu_1 + \nu)$. Имеем, что $\varphi_1 + \varphi$ – мера как сумма мер и $\nu_1 + \nu$ – правильная квазимера по теореме 3. В силу единственности разложения $\varphi_1 + \varphi = \varphi_2$ и $\nu_1 + \nu = \nu_2$. Отсюда $\varphi_1 \leq \varphi_2$ и $\nu_1 \leq \nu_2$.

Из предложения 3 сразу получается следующий известный результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть $\mu_1, \mu_2: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$, $\mu_1 \leq \mu_2$, μ_1 – квазимера, μ_2 – мера. Тогда μ_1 тоже мера.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu_1 = \varphi_1 + \nu_1$, где φ_1 – мера и ν_1 – правильная квазимера. Аналогичное разложение для μ_2 имеет вид $\mu_2 = \varphi_2 + \nu_2$. Тогда $0 \leq \nu_1 \leq \nu_2$ в силу предложения 3. Отсюда $\nu_1 = 0$ и $\mu_1 = \varphi_1$.

6. Перенесем результаты, полученные для квазимер, на квазисостояния.

Пусть $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ – квазимера, $a \in C(X)$, $K_\alpha = \{x \in X: a(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Очевидно, $K_\alpha \in \mathcal{C}$. Функция $\hat{a}(\alpha) = \mu(K_\alpha)$ порождает в $\mathbb{R}$ регулярную борелевскую меру μ_a , где $\mu_a([\alpha, \beta)) = \hat{a}(\alpha) - \hat{a}(\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Положим

$$\rho(a) = (I) \int_{a(X)} \alpha d\mu_a. \quad (1)$$

Аарнес в [1] показал, что определенный таким образом функционал $\rho: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ является квазисостоянием. При этом для любого $K \in \mathcal{C}$

$$\mu(K) = \inf\{\rho(a): a \in C(X), 0 \leq a \leq 1, a(x) = 1 \text{ для } x \in K\}. \quad (2)$$

Там же доказана монотонность ρ , т.е. если $a, b \in C(X)$ и $a \leq b$, то $\rho(a) \leq \rho(b)$.

Обозначим через M и S положительные конусы квазимер и соответственно квазисостояний. В работе [1] показано, что формула (1) задает биекцию $\Pi: M \rightarrow S$, обладающую свойствами:

- а) $\Pi(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2) = \alpha_1\Pi(\mu_1) + \alpha_2\Pi(\mu_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, +\infty)$, $\mu_1, \mu_2 \in M$;
- б) $\mu_1 \leq \mu_2$ эквивалентно тому, что $\Pi(\mu_1) \leq \Pi(\mu_2)$, где $\mu_1, \mu_2 \in M$;
- в) μ будет мерой тогда и только тогда, когда $\rho = \Pi(\mu)$ будет положительным линейным функционалом, при этом формула (1) примет вид

$$\rho(a) = (L) \int_X a(x) d\mu, \quad (3)$$

где интеграл берется по регулярной борелевской мере, являющейся продолжением μ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\rho_1, \rho_2 \in S$. Пишем $\rho_1 \leq \rho_2$, если $\rho_1(a) \leq \rho_2(a)$ для всех $a \geq 0$, $a \in C(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Квазисостояние $\rho: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *правильным*, если из того, что f – положительный линейный функционал и $f \leq \rho$, следует, что $f = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Квазимера μ будет *правильной* тогда и только тогда, когда квазисостояние $\Pi(\mu)$ будет *правильным*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть μ – правильная квазимера. Положим $\rho = \Pi(\mu)$. Пусть f – положительный линейный функционал и $f \leq \rho$. В силу пунктов в) и б) $\lambda = \Pi^{-1}(f)$ будет мерой и $\lambda \leq \mu$. Тогда $\lambda = 0$ и, следовательно, $f = 0$. *Достаточность* доказывается по этой же схеме.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Сумма *правильных* квазисостояний тоже будет *правильным* квазисостоянием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ρ_1 и ρ_2 – правильные квазисостояния, μ_1 и μ_2 – правильные квазимеры, для которых $\Pi(\mu_1) = \rho_1$ и $\Pi(\mu_2) = \rho_2$. В силу теоремы 3 квазимера $\mu_1 + \mu_2$ будет *правильной*. Тогда $\rho_1 + \rho_2 = \Pi(\mu_1 + \mu_2)$ – правильное квазисостояние.

Используя предложения 3 и 4, а также свойства отображения Π , легко доказать следующие два утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть ρ_i – квазисостояния, f_i – положительные линейные функционалы, g_i – правильные квазисостояния, $\rho_i = f_i + g_i$, $i = 1, 2$. Пусть, далее, $\rho_1 \leq \rho_2$. Тогда $f_1 \leq f_2$ и $g_1 \leq g_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $\rho_1 \leq \rho_2$, где ρ_1 – квазисостояние, ρ_2 – положительный линейный функционал. Тогда ρ_1 тоже положительный линейный функционал.

Аналогом теоремы о разложении квазимеры является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Для любого квазисостояния ρ существуют положительный линейный функционал f и правильное квазисостояние g такие, что $\rho = f + g$, причем это разложение единственно и f является наибольшим положительным функционалом, мажорируемым ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем квазимеру μ , для которой $\Pi(\mu) = \rho$. По теореме о разложении квазимеры $\mu = \varphi + \nu$, где φ – наибольшая из мер, мажорируемых μ , и ν – правильная квазимера. Положим $f = \Pi(\varphi)$ и $g = \Pi(\nu)$. Получим требуемое разложение $\rho = f + g$, заявленные свойства которого следуют из соответствующих свойств квазимер и свойств отображения Π .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть $\rho = f + g$, где ρ – квазисостояние, f – положительный линейный функционал, g – правильное квазисостояние. Для любой функции $a \in C(X)$, где $a \geq 0$, выполняется

$$f(a) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \rho(a_i) : a_i \in C(X), a_i \geq 0, \bigvee_{i=1}^n a_i \geq a \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in C(X)$, $a \geq 0$, $\{a_i\}_{i=1}^n \subset C(X)$, $a_i \geq 0$ и $\bigvee_{i=1}^n a_i \geq a$. Очевидно, $a \leq \sum_{i=1}^n a_i$.

В силу монотонности f , линейности и того, что $f \leq \rho$, получаем $f(a) \leq f(\sum_{i=1}^n a_i) = \sum_{i=1}^n f(a_i) \leq \sum_{i=1}^n \rho(a_i)$.

Пусть μ и φ такие квазимера и, соответственно, мера, что $\Pi(\mu) = \rho$ и $\Pi(\varphi) = f$. Будем считать, что φ продолжена до регулярной борелевской меры. Согласно пункту в) и формуле (3) $f(a) = \int_X a(x) d\varphi$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. В силу свойств интеграла Лебега существует функция $\sum_{i=1}^n \gamma_i \chi_{E_i}$, для которой $E_i \in \mathcal{B}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^n E_i = X$, $\gamma_i \in R$, $\gamma_i > a(x)$ для всех $x \in E_i$, $\sum_{i=1}^n \gamma_i \varphi(E_i) < f(a) + \varepsilon$.

Так как a непрерывна, найдутся такие $V_i \in \tau$, что $E_i \subset V_i$ и $\gamma_i > a(x)$ для всех $x \in V_i$, $i = 1, \dots, n$. В силу регулярности борелевской меры φ существует такой набор $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, что $E_i \subset U_i \subset V_i$ и $\sum_{i=1}^n \gamma_i \varphi(U_i) < \sum_{i=1}^n \gamma_i \varphi(E_i) + \varepsilon$.

Согласно свойствам компактного хаусдорфова пространства существует такой набор $\{C_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{C}$, что $C_i \subset U_i$ и $\bigcup_{i=1}^n C_i = X$. Будем иметь $\sum_{i=1}^n \gamma_i \varphi(C_i) \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i \varphi(U_i)$.

В силу пункта 7 предложения 1 для всех $i = 1, \dots, n$ найдутся такие наборы $\{C_{ij}\}_{j=1}^{k_i} \subset \mathcal{C}$, что $\bigcup_{j=1}^{k_i} C_{ij} = C_i$ и $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \gamma_i \mu(C_{ij}) < \sum_{i=1}^n \gamma_i \varphi(C_i) + \varepsilon$. Переобозначим $K_m = C_{ij}$, $\beta_m = \gamma_i$. Итак, имеем $\{K_m\}_{m=1}^p \subset \mathcal{C}$, $\bigcup_{m=1}^p K_m = X$, $\{\beta_m\}_{m=1}^p \subset R$, $\beta_m > a(x)$ для всех $x \in K_m$, $\sum_{m=1}^p \beta_m \mu(K_m) < f(a) + 3\varepsilon$.

Согласно формуле (2) для всех $m = 1, \dots, p$ существуют такие $b_m \in C(X)$, что $0 \leq b_m \leq 1$, $b_m(x) = 1$ для всех $x \in K_m$ и $\sum_{m=1}^p \beta_m \rho(b_m) < \sum_{m=1}^p \beta_m \mu(K_m) + \varepsilon$.

Положим $a_m = \beta_m b_m$. Итак, получили $a_m \in C(X)$, $a_m \geq 0$, $\bigvee_{m=1}^p a_m > a$, $\sum_{m=1}^p \rho(a_m) < f(a) + 4\varepsilon$. Предложение доказано.

Следующий критерий правильного квазисостояния сформулирован без обращения к порождающей его квазимере.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Квазисостояние ρ является правильным тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{a_i\}_{i=1}^n \subset C(X)$, что $a_i \geq 0$, $\bigvee_{i=1}^n a_i \geq 1$ и $\sum_{i=1}^n \rho(a_i) < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как доказано выше, $\rho = f + g$, где f – положительный линейный функционал, g – правильное квазисостояние. Отсюда квазисостояние ρ является правильным тогда и только тогда, когда $f = 0$. Нетрудно показать, пользуясь свойствами положительного линейного функционала, что $f = 0$ эквивалентно тому, что $f(1) = 0$. Далее применяем предложение 10.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. F. Aarnes, “Quasi-states and quasi-measures”, *Adv. Math.*, **86**:1 (1991), 41–67.
- [2] П. Халмош, *Теория меры*, ИЛ, М., 1953.
- [3] J. F. Aarnes, “Construction of non-subadditive measures and discretization of Borel measures”, *Fund. Math.*, **147**:3 (1995), 213–237.
- [4] R. F. Wheeler, “Quasi-measures and dimension theory”, *Topology Appl.*, **66**:1 (1995), 75–92.
- [5] D. J. Grubb, T. LaBerge, “Additivity of quasi-measures”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:10 (1998), 3007–3012.
- [6] T. LaBerge, “Supports of quasi-measures”, *Houston J. Math.*, **24**:2 (1998), 301–312.

М. Г. Свистула

Самарский государственный университет

E-mail: marinasvistula@mail.ru

Поступило

11.04.2006

Исправленный вариант

30.08.2006