Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Ваньков, Образ локального ряда Гекке рода 4 при сферическом отображении, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 5, 676–680

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3722>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 12:57:38

Образ локального ряда Гекке рода 4 при сферическом отображении

К. А. Ваньков

Получена явная формула образа при сферическом отображении дроби многочленов, предложенная Шимурой в 1963 г. для производящих рядов Гекке рода 4. Для вычислений мы использовали формулы Андрианова для сферического отображения Сатаке, которые подробно описаны в нашей предыдущей статье.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. В этой заметке мы продолжаем вычисления формальных степенных рядов в алгебре Гекке. Предыдущая статья [1] содержит необходимые теоретические сведения и формулы, которые мы использовали в общем случае рода n , а так же результат вычислений при $n = 3$ в явном операторном виде и при сферическом отображении.

Рассмотрим группу положительных симплектических подобий

$$S = S^n = \mathrm{GSp}_n^+(\mathbb{Q}) = \{M \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{Q}) : {}^t M J_n M = \mu(M) J_n, \mu(M) > 0\},$$

$$\text{где } J_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}.$$

Для модулярной группы Зигеля $\Gamma = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ рассмотрим двойные смежные классы $(M) = \Gamma M \Gamma \subset S$ и операторы Гекке

$$\mathbf{T}(a) = \sum_{M \in \mathrm{SD}_n(a)} (M),$$

где M пробегает множество целых матриц

$$\mathrm{SD}_n(a) = \{\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n; e_1, \dots, e_n) : d_i \mid d_{i+1}, d_n \mid e_n, e_{i+1} \mid e_i, d_i e_i = a\}.$$

Для операторов Гекке используем следующее обозначение:

$$\mathbf{T}(d_1, \dots, d_n; e_1, \dots, e_n) = (\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n; e_1, \dots, e_n)).$$

Пусть p – простое число. Формальный производящий ряд операторов Гекке рода n для симплектической группы записывается в следующем виде:

$$\mathbf{D}_p(X) = \sum_{\delta=0}^{\infty} \mathbf{T}(p^\delta) X^\delta \in \mathcal{L}_{n,\mathbb{Z}}[[X]],$$

где алгебра Гекке $\mathcal{L}_{n,\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[\mathbf{T}(p), \mathbf{T}_1(p^2), \dots, \mathbf{T}_n(p^2)]$ порождена операторами Гекке

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(p) &= \mathbf{T}(\underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{p, \dots, p}_n), \\ \mathbf{T}_i(p^2) &= \mathbf{T}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-i}, \underbrace{p, \dots, p}_i, \underbrace{p^2, \dots, p^2}_{n-i}, \underbrace{p, \dots, p}_i) \quad \text{для } i = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Применяя сферическое отображение Ω , можно проводить все вычисления в кольце обычных многочленов вместо кольца Гекке симплектической группы. Эта теория была развита в [2]–[4]. В нашей предыдущей статье [1] описан в деталях метод Андрианова для нахождения образов операторов Гекке. В частности, мы использовали формулы из публикации [5]. Здесь результат представлен в форме симметрических многочленов $\text{sym}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$, порожденных по аналогичной схеме, как и в [1], но в этом случае они зависят от четырех переменных x_1, x_2, x_3 и x_4 . А именно,

$$\text{sym}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4 / \text{Stab}(x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} x_4^{i_4})} \sigma(x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} x_4^{i_4}),$$

где сумма мономов нормирована таким образом, что коэффициент после суммирования равен единице, а также $i_1 \geq i_2 \geq i_3 \geq i_4 \geq 0$; например,

$$\text{sym}_{1,1,0,0} = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4, \quad \text{sym}_{3,3,3,3} = x_1^3 x_2^3 x_3^3 x_4^3.$$

Формальные алгебраические вычисления в своем большинстве были проведены в системе **Maple** аналогично случаю $n = 3$. Для рода 4 количество необходимых элементов $\omega(t)$ увеличилось до 680 по сравнению с 28 при $n = 3$. Вычисления заняли многие часы, а промежуточные слагаемые и множители потребовали гигантских объемов памяти.

2. Образ ряда $\mathbf{D}_p$ при сферическом отображении.

ТЕОРЕМА 2.1. При $n = 4$ образ $\mathbf{D}_p(\mathbf{X})$ представляется в явном виде как дробь многочленов

$$\Omega(\mathbf{D}_p(\mathbf{X})) = \frac{P_4(\mathbf{X})}{Q_4(\mathbf{X})},$$

где

$$\begin{aligned}Q_4(\mathbf{X}) &= (1 - x_0 \mathbf{X})(1 - x_0 x_1 \mathbf{X})(1 - x_0 x_2 \mathbf{X})(1 - x_0 x_3 \mathbf{X})(1 - x_0 x_4 \mathbf{X}) \\ &\quad \times (1 - x_0 x_1 x_2 \mathbf{X})(1 - x_0 x_1 x_3 \mathbf{X})(1 - x_0 x_1 x_4 \mathbf{X})(1 - x_0 x_2 x_3 \mathbf{X}) \\ &\quad \times (1 - x_0 x_2 x_4 \mathbf{X})(1 - x_0 x_3 x_4 \mathbf{X})(1 - x_0 x_1 x_2 x_3 \mathbf{X})(1 - x_0 x_1 x_2 x_4 \mathbf{X}) \\ &\quad \times (1 - x_0 x_1 x_3 x_4 \mathbf{X})(1 - x_0 x_2 x_3 x_4 \mathbf{X})(1 - x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 \mathbf{X}), \\ P_4(\mathbf{X}) &= \sum_{k=0}^{14} K_k(p, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \mathbf{X}^k,\end{aligned}$$

со следующими коэффициентами K_k :

$$\begin{aligned}K_0 &= 1, \quad K_1 = 0, \\ K_2 &= -x_0^2 p^{-2} (p(\text{sym}_{2211} + \text{sym}_{2110} + \text{sym}_{1100}) \\ &\quad + (p^2 + p + 1)(\text{sym}_{2111} + \text{sym}_{1110}) + (2p^2 + 4p + 1) \text{sym}_{1111}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_3 &= x_0^3 p^{-3} (p(p+1)(\text{sym}_{3222} + \text{sym}_{3221} + \text{sym}_{3211} + \text{sym}_{3111} + \text{sym}_{2220} \\
&\quad + \text{sym}_{2210} + \text{sym}_{2110} + \text{sym}_{1110}) \\
&\quad + (p^3 + 5p^2 + 5p + 1)(\text{sym}_{2222} + \text{sym}_{2221} + \text{sym}_{2211} + \text{sym}_{2111} + \text{sym}_{1111})), \\
K_4 &= -x_0^4 p^{-4} (p^2(\text{sym}_{4322} + \text{sym}_{4221} + \text{sym}_{3220} + \text{sym}_{2210}) \\
&\quad + p(p^2 + p + 1)(\text{sym}_{4222} + \text{sym}_{3333} + \text{sym}_{3331} + \text{sym}_{3311} \\
&\quad + \text{sym}_{3111} + \text{sym}_{2220} + \text{sym}_{1111}) \\
&\quad + p(p^2 + 4p + 1)(\text{sym}_{3332} + \text{sym}_{3321} + \text{sym}_{3211} + \text{sym}_{2111}) \\
&\quad + p(3p^2 + 6p + 4)(\text{sym}_{3322} + \text{sym}_{3221} + \text{sym}_{2211}) \\
&\quad + (5p^3 + 15p^2 + 6p + 1)(\text{sym}_{3222} + \text{sym}_{2221}) + (12p^3 + 22p^2 + 16p + 1)\text{sym}_{2222}), \\
K_5 &= x_0^5 p^{-4} ((p^2 + p)(\text{sym}_{4433} + \text{sym}_{4432} + \text{sym}_{4422} + \text{sym}_{4331} + \text{sym}_{4321} \\
&\quad + \text{sym}_{4221} + \text{sym}_{3311} + \text{sym}_{3211} + \text{sym}_{2211}) \\
&\quad + (4p^2 + 5p + 1)(\text{sym}_{4333} + \text{sym}_{4332} + \text{sym}_{4322} + \text{sym}_{4222} \\
&\quad + \text{sym}_{3331} + \text{sym}_{3321} + \text{sym}_{3221} + \text{sym}_{2221}) \\
&\quad + (-p^4 + 14p^2 + 18p + 5)(\text{sym}_{3333} + \text{sym}_{3332} + \text{sym}_{3322} + \text{sym}_{3222} + \text{sym}_{2222})), \\
K_6 &= x_0^6 p^{-6} (p^2(p^3 - 5p - 4)(\text{sym}_{4432} + \text{sym}_{4322} + \text{sym}_{3222} + \text{sym}_{4443}) \\
&\quad + p(p^5 + 5p^4 - 17p^2 - 15p - 1)(\text{sym}_{4333} + \text{sym}_{3332}) \\
&\quad - p^2(p + 1)(\text{sym}_{4331} + \text{sym}_{3321} + \text{sym}_{5332} + \text{sym}_{5433}) \\
&\quad + p(3p^4 - 12p^2 - 6p - 1)(\text{sym}_{4332} + \text{sym}_{3322} + \text{sym}_{4433}) \\
&\quad + p^2(p^3 - 3p - 1)(\text{sym}_{4222} + \text{sym}_{3331} + \text{sym}_{2222} + \text{sym}_{4422} \\
&\quad + \text{sym}_{4442} + \text{sym}_{4444} + \text{sym}_{5333}) \\
&\quad + p^3(\text{sym}_{6333} - \text{sym}_{5443} - \text{sym}_{5432} - \text{sym}_{5322} - \text{sym}_{4431} \\
&\quad - \text{sym}_{4321} + \text{sym}_{3330} - \text{sym}_{3221}) \\
&\quad + (2p^6 + 12p^5 - 32p^3 - 22p^2 - 4p + 1)\text{sym}_{3333}), \\
K_7 &= -x_0^7 p^{-5} (p(p^2 - 1)(\text{sym}_{5544} + \text{sym}_{5543} + \text{sym}_{5533} + \text{sym}_{5442} + \text{sym}_{5432} \\
&\quad + \text{sym}_{5332} + \text{sym}_{4422} + \text{sym}_{4322} + \text{sym}_{3322}) \\
&\quad + (p^4 + 4p^3 - 4p - 1)(\text{sym}_{5444} + \text{sym}_{5443} + \text{sym}_{5433} + \text{sym}_{5333} \\
&\quad + \text{sym}_{4442} + \text{sym}_{4432} + \text{sym}_{4332} + \text{sym}_{3332}) \\
&\quad + (5p^4 + 14p^3 - 14p - 5)(\text{sym}_{4444} + \text{sym}_{4443} + \text{sym}_{4433} + \text{sym}_{4333} + \text{sym}_{3333})), \\
K_8 &= x_0^8 p^{-6} ((p^5 + 15p^4 + 17p^3 - 5p - 1)(\text{sym}_{5444} + \text{sym}_{4443}) \\
&\quad - p^3(\text{sym}_{7444} - \text{sym}_{6554} - \text{sym}_{6543} - \text{sym}_{6433} - \text{sym}_{5542} \\
&\quad - \text{sym}_{5432} + \text{sym}_{4441} - \text{sym}_{4332}) \\
&\quad + p(4p^3 + 5p^2 - 1)(\text{sym}_{5554} + \text{sym}_{5543} + \text{sym}_{5433} + \text{sym}_{4333}) \\
&\quad + p^3(p + 1)(\text{sym}_{6544} + \text{sym}_{6443} + \text{sym}_{5442} + \text{sym}_{4432}) \\
&\quad + p(p^3 + 3p^2 - 1)(\text{sym}_{4442} + \text{sym}_{5333} + \text{sym}_{5533} + \text{sym}_{5555} \\
&\quad + \text{sym}_{6444} + \text{sym}_{5553} + \text{sym}_{3333}) \\
&\quad - (p^6 - 4p^5 - 22p^4 - 32p^3 + 12p + 2)\text{sym}_{4444} \\
&\quad + p(p^4 + 6p^3 + 12p^2 - 3)(\text{sym}_{5544} + \text{sym}_{5443} + \text{sym}_{4433})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_9 &= -x_0^9 p^{-6} (p^2(p+1)(\text{sym}_{6655} + \text{sym}_{6654} + \text{sym}_{6644} + \text{sym}_{6553} + \text{sym}_{6543} \\
&\quad + \text{sym}_{6443} + \text{sym}_{5533} + \text{sym}_{5433} + \text{sym}_{4433}) \\
&\quad + p^2(p^2 + 5p + 4)(\text{sym}_{6555} + \text{sym}_{6554} + \text{sym}_{6544} + \text{sym}_{6444} \\
&\quad + \text{sym}_{5553} + \text{sym}_{5543} + \text{sym}_{5443} + \text{sym}_{4443}) \\
&\quad + (5p^4 + 18p^3 + 14p^2 - 1)(\text{sym}_{5555} + \text{sym}_{5554} + \text{sym}_{5544} + \text{sym}_{5444} + \text{sym}_{4444})), \\
K_{10} &= x_0^{10} p^{-5} ((p^2 + p + 1)(\text{sym}_{4444} + \text{sym}_{5553} + \text{sym}_{6444} + \text{sym}_{6644} \\
&\quad + \text{sym}_{6664} + \text{sym}_{6666} + \text{sym}_{7555}) \\
&\quad + (p^2 + 4p + 1)(\text{sym}_{5444} + \text{sym}_{6544} + \text{sym}_{6654} + \text{sym}_{6665}) \\
&\quad + p(\text{sym}_{5543} + \text{sym}_{6553} + \text{sym}_{7554} + \text{sym}_{7655}) \\
&\quad + (4p^2 + 6p + 3)(\text{sym}_{5544} + \text{sym}_{6554} + \text{sym}_{6655}) \\
&\quad + (p^3 + 6p^2 + 15p + 5)(\text{sym}_{5554} + \text{sym}_{6555}) \\
&\quad + (p^3 + 16p^2 + 22p + 12) \text{sym}_{5555}), \\
K_{11} &= -x_0^{11} p^{-6} (p(p+1)(\text{sym}_{7666} + \text{sym}_{7665} + \text{sym}_{7655} + \text{sym}_{7555} + \text{sym}_{6664} \\
&\quad + \text{sym}_{6654} + \text{sym}_{6554} + \text{sym}_{5554}) \\
&\quad + (p^3 + 5p^2 + 5p + 1)(\text{sym}_{6666} + \text{sym}_{6665} + \text{sym}_{6655} + \text{sym}_{6555} + \text{sym}_{5555})), \\
K_{12} &= x_0^{12} p^{-6} ((p^2 + p + 1)(\text{sym}_{6665} + \text{sym}_{7666}) + (p^2 + 4p + 2) \text{sym}_{6666} \\
&\quad + p(\text{sym}_{7665} + \text{sym}_{7766} + \text{sym}_{6655})), \\
K_{13} &= 0, \\
K_{14} &= -x_0^{14} p^{-6} \text{sym}_{7777}.
\end{aligned}$$

3. Замечания. Мы обнаружили очень интересное свойство симметрии для коэффициентов K_k . Заранее зная об этом факте, можно ограничиться в вычислениях коэффициентов только до степени 7, а наиболее трудоемкие вычисления старших коэффициентов заменить на это простое уравнение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Многочлен $P_4(\mathbf{X}) = P_4(p, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \mathbf{X})$ имеет следующее функциональное свойство для коэффициентов K_k , $k = 0, \dots, 14$:*

$$\begin{aligned}
&K_{14-k}(p, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \\
&= -p^{-6} (x_0^2 x_1 x_2 x_3 x_4)^{7-k} K_k \left(\frac{1}{p}, x_0 x_1 x_2 x_3 x_4, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4} \right).
\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Имеется предположение о том, что данное функциональное свойство справедливо для всех n в следующем виде:

$$P(x_0, \dots, x_n, \mathbf{X}) = (-1)^{n-1} \frac{(x_0^2 x_1 \cdots x_n \mathbf{X}^2)^{2^{n-1}-1}}{p^{n(n-1)/2}} P\left(\frac{1}{x_0}, \dots, \frac{1}{x_n}, \frac{p}{\mathbf{X}}\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Результат теоремы 2.1 полностью согласуется с полученным ранее в [1] результатом для $n = 3$ посредством применения проекции $x_4 = 0$ (соответствующей оператору Зигеля из Sp_4 в Sp_3).

Автор выражает глубокую признательность научному руководителю профессору А. А. Панчишкину за постановку задачи и активное обсуждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. A. Panchishkin, K. A. Vankov, “Explicit Shimura’s conjecture for Sp_3 on a computer”, *Math. Res. Lett.*, 2007 (to appear); [arXiv:math.NT/0607158](#).
- [2] G. Shimura, “On modular correspondences for $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$ and their congruence relations”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **49** (1963), 824–828.
- [3] A. N. Andrianov, *Quadratic Forms and Hecke Operators*, Grundlehren Math. Wiss., **286**, Berlin, Springer-Verlag, 1987.
- [4] А. Н. Андрианов, В. Г. Журавлев, *Модулярные формы и операторы Гекке*, Наука, М., 1990.
- [5] А. Н. Андрианов, “Сферические функции для GL_n над локальными полями и суммирование рядов Гекке”, *Матем. сб.*, **83 (125)**:3 (11) (1970), 429–451.

К. А. Ваньков

Institut Fourier, Université Grenoble 1

E-mail: kvankov@fourier.ujf-grenoble.fr

Поступило

10.09.2006

Исправленный вариант

12.11.2006