Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Юхименко, Полнота и базисные свойства систем экспонент в весовых пространствах $L^p(-\pi, \pi)$, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 5, 776–788

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3723>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:48:07

Полнота и базисные свойства систем экспонент в весовых пространствах $L^p(-\pi, \pi)$

А. А. Юхименко

Рассмотрена система экспонент $e(\Lambda) = \{e^{i\lambda_n t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, где

$$\lambda_n = n + \left(\frac{1 + \alpha}{p} + l(|n|) \right) \operatorname{sign} n,$$

$l(t)$ – медленно меняющаяся функция и $l(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Получена оценка для порождающей функции последовательности $\{\lambda_n\}$ и с ее помощью найден критерий полноты и условие базиса системы $e(\Lambda)$ в весовых пространствах $L^p(-\pi, \pi)$. Рассмотрены некоторые частные случаи функции $l(t)$.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Хорошо известна следующая теорема Левинсона [1]: если $\lambda_n \in \mathbb{C}$ и $|\lambda_n| \leq |n| + 1/(2p)$, то система $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ полна в $L^p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, причем константа $1/(2p)$ точная (т.е. при ее увеличении полнота нарушается). То, что полнота сохраняется в случае

$$|\lambda_n| \leq |n| + \frac{1}{2p} + \varepsilon_{|n|}, \quad \varepsilon_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} < \infty,$$

обнаружил А. М. Седлецкий [2], а также Р. Редхеффер и Р. Янг [3]. Но условие $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n/n < \infty$ не является необходимым. Это следует, например, из следующей теоремы А. И. Хейфица [4]: для полноты в $L^2(-\pi, \pi)$ системы $\{e^{i\lambda_n t}\}$, где

$$\lambda_n = n + \left(\frac{1}{4} + \frac{\Delta}{\ln |n|} \right) \operatorname{sign} n, \quad n \neq 0, \pm 1, \quad \Delta \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = -\lambda_{-1} = c,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\Delta \leq 1/4$.

В статье [3] для функции $F(z)$ (порождающей для последовательности $\{\lambda_n\}$), определяемой следующим образом:

$$F(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{\lambda_n} \right)^2 \right),$$

где

$$\lambda_n = n + \left(\frac{1}{2p} + \frac{\Delta}{\ln |n|} \right) \operatorname{sign} n, \quad n \neq 0, \pm 1, \quad \Delta \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = -\lambda_{-1} = c, \quad (1)$$

получена оценка

$$|F(x+i)| = O(|x|^{-1/p}(\log x)^{-2\Delta}), \quad |x| \geq 2. \quad (2)$$

С помощью этой оценки в [3] было установлено, что система экспонент, построенная по последовательности (1), полна в $L^p(-\pi, \pi)$, если $\Delta \leq \min(1/4, 1/(2p))$, и неполна, если $\Delta > \max(1/4, 1/(2p))$. Позже в [5] было показано, что полнота этой системы в $L^p(-\pi, \pi)$, $1 < p \leq 2$, равносильна условию $\Delta \leq 1/(2q)$, $1/p + 1/q = 1$.

В последнее время проявляется интерес к весовым пространствам $L^p_{\alpha, \pi}$, определяемым следующим образом: $L^p_{\alpha, \pi} = L^p((-\pi, \pi), \omega_\alpha(t) dt)$, где

$$\omega_\alpha(t) = \prod_{j=1}^s |t - b_j|^\alpha, \quad 2 \leq s \leq N, \quad -\pi = b_1 < \dots < b_s = \pi. \quad (3)$$

В [6] есть обобщение приведенной выше теоремы Левинсона на случай пространства $L^p_{\alpha, \pi}$: если $\lambda_n \in \mathbb{C}$ и $|\lambda_n| \leq |n| + (1 + \alpha)/(2p)$, то система $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ полна в $L^p_{\alpha, \pi}$, $1 < p < \infty$, $-1 < \alpha < p - 1$, причем константа $(1 + \alpha)/(2p)$ точная.

В [6] рассмотрен вопрос о полноте в $L^p_{\alpha, \pi}$ системы $\{e^{i\lambda_n t}\}$, когда

$$\lambda_n = n + \left(\frac{1 + \alpha}{2p} + \frac{\Delta}{\ln |n|} \right) \operatorname{sign} n, \quad n \neq 0, \pm 1, \quad \Delta \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = -\lambda_{-1} = c. \quad (4)$$

Была доказана следующая теорема: если $1 < p < \infty$, $\max(0, p - 2) \leq \alpha < p - 1$, то для полноты $\{e^{i\lambda_n t}\}$ в $L^p_{\alpha, \pi}$ необходимо и достаточно, чтобы $\Delta \leq 1/(2q)$, $1/p + 1/q = 1$. Заметим, что в этой теореме доказательство необходимости опирается на оценку (2).

В настоящей статье рассмотрен более общий по сравнению с (4) случай: исследуется полнота в $L^p_{\alpha, \pi}$ систем экспонент вида

$$e(\Lambda) = \left\{ e^{i\lambda_n t} \mid \lambda_n \in \Lambda = \left\{ \lambda_0 = 0, \lambda_n = n + \frac{1 + \alpha}{2p} + l(n) \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_{-n} = -\lambda_n \right\} \right\}, \quad (5)$$

где $l(t)$ – медленно меняющаяся функция и $l(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

Основная трудность в данной работе состоит в получении (при некоторых ограничениях на $l(t)$) следующей оценки для порождающей функции F_Λ последовательности Λ :

$$|F_\Lambda(z)| \asymp |z|^{-(1+\alpha)/p} R(|z|), \quad \operatorname{Im} z = 1, \quad R(t) = \exp \left(-2 \int_c^t \frac{l(u)}{u} du \right), \quad c > 0.$$

На основе этой оценки в статье получен (при тех же ограничениях на функцию $l(t)$) следующий критерий полноты: если $1 < p < \infty$, $\max(0, p - 2) \leq \alpha < p - 1$, то для полноты системы (5) в $L^p_{\alpha, \pi}$ необходимо и достаточно, чтобы $R^q(x)/x \notin L^1(c, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$.

Кроме того найдено условие базиса в $L^p_{\alpha, \pi}$ системы вида

$$e(\Lambda) = \{e^{i\lambda_n t} \mid \lambda_n \in \Lambda = \{\lambda_0 = 0, \lambda_n = n + a + l(n) \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \lambda_{-n} = -\lambda_n\}\}.$$

А при $\alpha = 0$ это условие базиса в $L^p(-\pi, \pi)$.

В статье используются следующие обозначения.

- $\Lambda(t)$ – считающая функция последовательности $\Lambda \setminus \{0\}$, т.е. функция, которая при $t > 0$ равна количеству членов Λ на промежутке $(0, t]$, а при $t < 0$ равна минус количеству членов Λ на $[t, 0)$. В нашем случае $\Lambda(t)$ будет нечетной, поскольку $\lambda_{-n} = -\lambda_n$.
- В случае, когда найдутся m, M такие, что $0 < m \leq |F(z)/G(z)| \leq M < \infty$, $z \in B \subseteq \mathbb{C}$, будем писать $F(z) \asymp G(z)$, $z \in B$.
- $\hat{f}$ обозначает преобразование Фурье функции f .
- $L_\alpha^p(\mathbb{R}) := L^p(\mathbb{R}, |t|^\alpha dt)$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Основные определения и используемые теоремы.

ЛЕММА 1 [6; § 5.2]. Пусть $\Lambda, M \subset \mathbb{R}$,

$$F(z) = \prod_{\lambda_n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \quad G(z) = \prod_{\mu_n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\mu_n}\right).$$

Если

$$\int_1^\infty \left(\sup_{I_u} \sum_{\lambda_n, \mu_n \in I_u} |\lambda_n - \mu_n| \right) \frac{du}{u^2} < \infty,$$

(где I_u – произвольный интервал длины u), то $F(z) \asymp G(z)$ на прямой $\operatorname{Im} z = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\varphi(t)$ – неотрицательная, невозрастающая функция,

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t} dt < \infty \quad u \quad \lambda_n - \mu_n = O(\varphi(n)).$$

Тогда $F(z) \asymp G(z)$ на прямой $\operatorname{Im} z = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу монотонности $\varphi(t)$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \left(\sup_{I_u} \sum_{\lambda_n, \mu_n \in I_u} |\lambda_n - \mu_n| \right) \frac{du}{u^2} &\leq C \int_1^\infty \left(\int_1^{u+1} \varphi(t) dt \right) \frac{du}{u^2} \\ &= -\frac{C}{u} \int_1^{u+1} \varphi(t) dt \Big|_1^\infty + C \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t} dt < \infty. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2 [6; § 4.4]. Пусть $\Phi(x)$, $x > 0$, – положительная неубывающая функция. Тогда для того, чтобы из условия

$$\sum_{n=k}^N \frac{\max |\lambda_{\pm n}| - |n| - (1 + \alpha)/(2p)}{n} \leq \ln \Phi(N), \quad N = k, k+1, \dots,$$

где k – некоторое натуральное число, следовала полнота системы $\{e^{i\lambda_n t}\}$, $n \in \mathbb{Z}$, в $L_{\alpha, \pi}^p$, $1 < p < \infty$, $-1 < \alpha < p-1$, для любой вещественной последовательности $\{\lambda_n\}$ со свойством $|\lambda_n| - |n| \leq C < \infty$, достаточно, чтобы

$$\int_k^\infty \frac{dt}{t \Phi^{2q}(t)} = \infty.$$

ТЕОРЕМА 1 (Питт, уточненная формулировка) [6; § 1.5]. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $\max(0, p-2) \leq \alpha < p-1$, $-1 \leq \beta \leq 0$ и

$$\frac{1+\alpha}{p} + \frac{1+\beta}{q} = 1.$$

Тогда если $f \in L^p_\alpha(\mathbb{R})$, то $\hat{f} \in L^q_\beta(\mathbb{R})$ и $\|\hat{f}\|_{q,\beta} \leq C\|f\|_{p,\alpha}$, где C от f не зависит.

ЛЕММА 3 (аналитический эквивалент неполноты) [6; § 4.1, лемма 1]. Неполнота системы $e(\Lambda)$ в $L^p_{\alpha,\pi}$, $1 < p < \infty$, равносильна существованию нетривиальной функции $F(z)$ вида

$$F(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} f(t) dt, \quad f(t) \in L^q_{\beta,\pi}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \beta = -\frac{q}{p}\alpha,$$

такой, что $F(\Lambda) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [6; § 8.1]. Говорят, что базис $e(\Lambda)$ банахова пространства $L^p_{\alpha,\pi}$, $1 < p < \infty$, $-1 < \alpha < p-1$, обладает свойством Рисса, если проекционный оператор

$$S^+: \sum_{\lambda_n \in \Lambda} c_n e^{i\lambda_n t} \rightarrow \sum_{\operatorname{Re} \lambda_n > 0} c_n e^{i\lambda_n t}$$

ограничен в $L^p_{\alpha,\pi}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Базисом Рисса в гильбертовом пространстве называется базис, эквивалентный (изоморфный) ортонормированному.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [7; 1.1]. Положительная функция $l(t)$ называется медленно меняющейся (на бесконечности), если она измерима и при всех $\lambda > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{l(\lambda t)}{l(t)} = 1.$$

Класс медленно меняющихся функций обозначается L_∞ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [7; A.1]. Пусть на $(0, \infty)$ задана положительная, убывающая функция $\eta(t)$ и $\eta(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. И пусть для некоторых $\theta > 0$ и $T > 0$ (зависящих, вообще говоря, от η) функция $t^\theta \eta(t)$ не убывает на $[T, \infty)$. Положительная измеримая функция $l(t)$, определенная на $(0, \infty)$, называется медленно меняющейся с остаточным членом $\eta(t)$, если

$$\forall \lambda > 0 \quad \frac{\lambda(\lambda t)}{l(t)} = 1 + O(\eta(t)), \quad t \rightarrow \infty.$$

Класс медленно меняющихся функций с остатком $\eta(t)$ обозначается $K(\eta)$. Ясно, что $K(\eta) \subset L_\infty$.

Отметим необходимые для дальнейшего свойства функций из $K(\eta)$. Их можно найти в дополнениях к [7] (доказательство второго свойства содержится в доказательстве [7; A.2.4]).

Приведем свойства функций из $K(\eta)$.

СВОЙСТВО 1 (см. [7; A.2.1]). Пусть $f(t)$ измерима и $\int_1^\infty t^\rho |f(t)| dt < \infty$ для некоторого $\rho > 0$. Если $l \in K(\eta)$, то для достаточно больших x

$$\int_1^\infty |f(t)| l(xt) dt < \infty, \quad \int_1^\infty f(t) l(xt) dt = l(x) \left(\int_1^\infty f(t) dt + O(\eta(x)) \right), \quad x \rightarrow \infty.$$

СВОЙСТВО 2 (см. [7; А.2.4]). Пусть $f(t)$ измерима на $[0, 1]$ и $\int_0^1 t^{-\rho} |f(t)| dt < \infty$ для некоторого $\rho > 0$. Если $l \in K(\eta)$ и $l(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то найдется $c > 0$ такое, что

$$\int_{c/x}^1 f(t)l(xt) dt = l(x) \left(\int_{c/x}^1 f(t) dt + O(\eta(x)) \right), \quad x \rightarrow \infty.$$

3. Асимптотика финитного преобразования Лапласа. Пусть

$$\Phi_\alpha(z) = \int_0^a e^{-zu} u^{-\alpha} l\left(\frac{1}{u}\right) du, \quad a \in (0, \infty),$$

где $l(u)$ – ограниченная на $[0, \infty)$ функция из класса $K(\eta)$. Тогда верна

ЛЕММА 4. Если $\alpha < 1$, то

$$\Phi_\alpha(r) = \Gamma(1 - \alpha) r^{\alpha-1} l(r) (1 + O(e^{-ar}) + O(\eta(r))), \quad r \rightarrow +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{-ru} u^{-\alpha} l\left(\frac{1}{u}\right) du &= \left\{ u = \frac{1}{rt} \right\} = r^{\alpha-1} \int_{1/(ar)}^\infty e^{-1/t} t^{\alpha-2} l(rt) dt \\ &= r^{\alpha-1} \left(\int_{1/(ar)}^1 e^{-1/t} t^{\alpha-2} l(rt) dt + \int_1^\infty e^{-1/t} t^{\alpha-2} l(rt) dt \right) \\ &= l(r) r^{\alpha-1} \left(O(\eta(r)) + \Gamma(1 - \alpha) - \int_0^{1/(ar)} e^{-1/t} t^{\alpha-2} dt \right), \quad r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались свойствами 2 и 1 функций из $K(\eta)$. Для завершения доказательства остается лишь заметить, что

$$\int_0^{1/(ar)} e^{-1/t} t^{\alpha-2} dt = \left\{ t = \frac{1}{u} \right\} = \int_{ar}^\infty e^{-u} u^{-\alpha} du \leq e^{-ar}.$$

ЛЕММА 5. Пусть $l(t)$ – ограниченная на $[0, \infty)$ функция из класса $K(\eta)$ и

$$\int_1^\infty \frac{\eta(u)l(u)}{u} du < \infty. \quad (6)$$

Пусть также $0 < \alpha < 1$ и

$$B(z) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \Phi_\alpha(z) z^{1-\alpha}.$$

Тогда

- 1) $B(z)$ – целая функция;
- 2) $B(r) = l(r)(1 + O(\eta(r)) + O(e^{-ar}))$, $r \rightarrow +\infty$;
- 3) $B(z) = l(r)(1 + o(1))$, $r = |z| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} z \geq 0$;
- 4) $B''(r)$ монотонно убывает на $[A, \infty)$;
- 5) $\int_1^\infty \frac{1}{u} |B(u) - l(u)| du < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Следует из того, что $\Phi_\alpha(z)$ – целая функция.

2) Следует из леммы 4.

3) Следует из [6; § 3.1].

4) Покажем, что найдется A : $B^{(3)}(r) < 0$ на $[A, \infty]$. Воспользовавшись леммой 4, получаем

$$\begin{aligned} B^{(3)}(r) &= \frac{r^{-3}l(r)}{\Gamma(1-\alpha)}(\alpha(1+\alpha)(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha) + 3\alpha(1-\alpha)\Gamma(2-\alpha) \\ &\quad + 3(1-\alpha)\Gamma(3-\alpha) - \Gamma(4-\alpha) + O(\eta(r)) + O(e^{-ar})) \\ &= r^{-3}l(r)(-6 + O(\eta(r)) + O(e^{-ar})). \end{aligned}$$

5) Из уже доказанного в части 2) настоящей теоремы следует, что

$$B(u) - l(u) = l(u)(O(\eta(u)) + O(e^{-au})),$$

и остается воспользоваться условием (6).

4. Оценка для порождающей функции. Пусть $\varphi(t)$ – положительная ограниченная функция и

$$\Lambda = \{\lambda_0 = 0, \lambda_n = n + \varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_{-n} = -\lambda_n\}. \quad (7)$$

Рассмотрим порождающую функцию последовательности Λ :

$$F_\Lambda(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^2\right). \quad (8)$$

Это произведение сходится в каждой точке z , так как $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n^2 < \infty$.

Из (8) следует, что

$$\begin{aligned} \ln F_\Lambda(z) &= \ln z + \int_{\lambda_{1/2}}^{\infty} \ln\left(1 - \left(\frac{z^2}{t}\right)\right) d\Lambda(t) \\ &= \ln z + \ln\left(1 - \left(\frac{z^2}{t}\right)\right) \Lambda(t) \Big|_{\lambda_{1/2}}^{\infty} - \int_{\lambda_{1/2}}^{\infty} \frac{2\Lambda(t)z^2}{t(t^2 - z^2)} dt. \end{aligned}$$

Поскольку $\Lambda(R) = O(R)$ и $\Lambda(\lambda_1/2) = 0$, то

$$\ln\left(1 - \left(\frac{z}{t}\right)^2\right) \Lambda(t) \Big|_{\lambda_{1/2}}^R \sim \frac{\Lambda(R)z^2}{R^2} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\ln F_\Lambda(z) = \ln z + \int_{\lambda_{1/2}}^{\infty} \frac{2\Lambda(t)z^2}{t(z^2 - t^2)} dt. \quad (9)$$

ЛЕММА 6. Пусть $\varphi(t)$, $t \in [1, \infty)$, – положительная, дифференцируемая и монотонно убывающая функция, $|\varphi(t)| < 1$ на $[A, \infty)$ (при некотором достаточно большом A) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi'(\xi_n)| < \infty, \quad \xi_n: |\xi_n - n| < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Определим последовательность M следующим образом:

$$M = \{\mu_n \mid n = \mu_n - \varphi(\mu_n), \mu_0 = 0, n \in \mathbb{N}, \mu_{-n} = -\mu_n\}$$

(функция $x - \varphi(x)$ монотонна, поэтому соответствие между n и μ_n взаимнооднозначное). Тогда $F_\Lambda(z) \asymp F_M(z)$ на прямой $\operatorname{Im} z = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\lambda_n - \mu_n = \varphi(n) - \varphi(\mu_n) = (n - \mu_n)\varphi'(\xi_n) = -\varphi(\mu_n)\varphi'(\xi_n), \quad \xi_n \in [n, \mu_n].$$

Но $\xi_n - n \leq \mu_n - n = \varphi(\mu_n) < 1$; значит, в силу (10) $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n - \mu_n| < \infty$. Для завершения доказательства остается воспользоваться леммой 1.

Если $M(t)$ – считающая функция последовательности M , то по формуле (9)

$$\ln F_M(z) = \ln z + \int_{\mu_{1/2}}^{\infty} \frac{2M(t)z^2}{t(z^2 - t^2)} dt. \quad (11)$$

Покажем, что при некотором условии на $\varphi(t)$ в (11) можно заменить $M(t)$ на $K(t) = t - \varphi(t) - 1/2$ и при этом $\ln F_M(z)$ на прямой $\operatorname{Im} z = 1$ изменится не более, чем на $O(1)$.

ЛЕММА 7. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi''(\xi_n)| < \infty, \quad \xi_n \in (\mu_n, \mu_{n+1}). \quad (12)$$

Тогда

$$\ln F_M(z) = \ln z + \int_c^{\infty} \left(t - \varphi(t) - \frac{1}{2} \right) \frac{2z^2}{t(z^2 - t^2)} dt + O(1), \quad \operatorname{Im} z = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задача, очевидно, сводится к тому, чтобы показать, что

$$E(z) = \left| \int_{\mu_{1/2}}^{\infty} \frac{M(t) - K(t)}{t} \frac{z^2}{z^2 - t^2} dt \right| = O(1), \quad \operatorname{Im} z = 1.$$

Из вида последовательности M ясно, что $M(t) = [t - \varphi(t)]$. Пусть $\psi(t) = M(t) - K(t) = [t - \varphi(t)] - t + \varphi(t) + 1/2$. Докажем ограниченность первообразной $\Psi(t)$ функции $\psi(t)$. Заметим, что $\psi(\mu_n + 0) = 1/2$, $\psi(\mu_{n+1} - 0) = -1/2$ и воспользуемся следующим фактом [8; с. 326]: если $f \in C^2[a, b]$, то найдется $\xi \in [a, b]$ такое, что

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x - a)(x - b) dx.$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mu_n}^{\mu_{n+1}} \psi(t) dt \right| &= \left| (\mu_{n+1} - \mu_n) \frac{\psi(\mu_n) + \psi(\mu_{n+1})}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\psi''(\xi)}{2} \int_{\mu_n}^{\mu_{n+1}} (x - \mu_n)(x - \mu_{n+1}) dx \right| \\ &\leq |\psi''(\xi)| \frac{(\mu_{n+1} - \mu_n)^3}{2} < |\psi''(\xi)| = |\varphi''(\xi)|, \quad \xi \in [\mu_n, \mu_{n+1}]. \end{aligned}$$

Пользуясь этой оценкой и условием (12), получаем ограниченность $\Psi(t)$. Поэтому при $z = x + i$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} E(z) &= \left| \int_{\mu_{1/2}}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} \frac{z^2}{z^2 - t^2} dt \right| \leq \left| \frac{\Psi(t)}{t} \frac{z^2}{z^2 - t^2} \right|_{\mu_{1/2}}^{\infty} \Big| \\ &\quad + \left| \int_{\mu_{1/2}}^{\infty} \Psi(t) \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \frac{1}{z - t} - \frac{1}{2} \frac{1}{z + t} \right)' dt \right| \\ &\leq O(1) + \|\Psi(t)\|_{C[\mu_{1/2}, \infty]} \int_{\mu_{1/2}}^{\infty} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{|z - t|^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{|z + t|^2} \right) dt \\ &\leq O(1) + \frac{1}{2} \|\Psi(t)\|_{C[\mu_{1/2}, \infty]} \int_{\mu_{1/2}}^{\infty} \left(\frac{1}{(x - t)^2 + 1} + \frac{1}{(x + t)^2 + 1} \right) dt = O(1). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $l(t)$ – ограниченная на $[0, \infty)$ функция из класса $K(\eta)$, $l(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ и

$$\int_1^{\infty} \frac{\eta(t)l(t)}{t} dt < \infty.$$

Пусть $B(t)$ – функция, определенная в лемме 5, а $\varphi(t) = a + B(t)$, $a < 1$. Тогда

$$|F_M(z)| \asymp |z|^{-2a} \exp \left(-2 \int_c^{|z|} \frac{l(u)}{u} du \right), \quad \operatorname{Im} z = 1,$$

где M – последовательность, определенная в лемме 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (12). Действительно, в силу монотонного убывания функции $B''(t)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi''(\xi_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |B''(\xi_n)| < 2 \int_A^{\infty} B''(t) dt = -2B'(A) < \infty.$$

Значит можно пользоваться леммой 7:

$$\begin{aligned} \ln F_M(z) &= \ln z + \int_c^{\infty} \left(u - a - B(u) - \frac{1}{2} \right) \frac{2z^2}{u(z^2 - u^2)} du + O(1) \\ &= \ln z + I_1(z) + I_2(z) + I_3(z) + O(1), \\ I_1(z) &= 2 \int_c^{\infty} \frac{z^2}{z^2 - u^2} du, \quad I_2(z) = -2 \left(a + \frac{1}{2} \right) \int_c^{\infty} \frac{z^2}{u(z^2 - u^2)} du, \\ I_3(z) &= -2 \int_c^{\infty} \frac{B(u)}{u} \frac{z^2}{z^2 - u^2} du. \end{aligned}$$

Оценим $I_1(z)$. Применим теорему Коши (воспользовавшись четностью подынтегральной функции) к контуру, состоящему из отрезка $[-R, R]$ и верхней половинки окружности радиуса R с центром в 0. Перейдем к пределу при $R \rightarrow \infty$ и получим

$$2I_1(z) + 2 \int_{-c}^c \frac{z^2}{z^2 - u^2} du = 2\pi i \operatorname{res}_z \frac{2z^2}{z^2 - u^2} \iff I_1(z) = -\pi i z + O(1).$$

Пусть $z = re^{i\theta}$. При оценке $I_2(z)$ перейдем от интегрирования по лучу $[c, \infty)$ к интегрированию по Γ (получается из $[c, \infty)$ поворотом на $-\theta$), а затем с Γ перейдем

на мнимую ось:

$$\begin{aligned}
 I_2(z) &= -2 \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \int_{\Gamma} \frac{1}{w(1-w^2)} dw = -2 \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \int_{-ic/r}^{-i\infty} \frac{1}{w(1-w^2)} dw + O(1) \\
 &= -2 \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \int_{c/r}^{\infty} \frac{1}{t(1+t^2)} dt + O(1) \\
 &= -2 \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \Big|_{c/r}^{\infty} + O(1) = -2 \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \ln r + O(1).
 \end{aligned}$$

Осталось оценить $I_3(z)$. Здесь мы и используем аналитичность $B(z)$ в правой полуплоскости и ее монотонное убывание на бесконечности:

$$I_3(z) = -2 \int_c^{\infty} \frac{B(u)}{u} \frac{z^2}{(z^2 - u^2)} du = \{u = we^{i\theta}\} = -2 \int_{\Gamma} \frac{B(we^{i\theta})}{w} \frac{r^2}{r^2 - w^2} dw.$$

Рис. 1

Мы хотим перейти от интегрирования по Γ к интегрированию по мнимой полуоси. Для этого выберем контур, состоящий из отрезков $[ce^{-i\theta}, Re^{-i\theta}]$, $[-ci, -Ri]$, $R > r$, и дуг (Γ' и Γ''), их соединяющих.

Оценим интеграл по контуру Γ' :

$$\left| \int_{\Gamma'} \frac{B(we^{i\theta})}{w} \frac{r^2}{r^2 - w^2} dw \right| \leq \int_{-\pi/2}^{-\theta} \frac{r^2}{|r^2 - R^2|} d\varphi \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Оценим интеграл по контуру Γ'' :

$$\left| \int_{\Gamma''} \frac{B(we^{i\theta})}{w} \frac{r^2}{r^2 - w^2} dw \right| \leq C \int_{-\pi/2}^{-\theta} \frac{r^2}{|r^2 - c^2|} d\varphi = O(1).$$

Таким образом, пользуясь теоремой Коши, получаем: исходный интеграл равен (с точностью до $O(1)$) интегралу от той же функции только по мнимой оси. Делая замену переменных $w = -iu$, получаем

$$I_3(z) = -2 \int_c^{\infty} \frac{B(ue^{i(\theta-\pi/2)})}{u} \frac{r^2}{r^2 + u^2} du + O(1).$$

Теперь покажем, что

$$\int_c^\infty \frac{B(ue^{i(\theta-\pi/2)})}{u} \frac{r^2}{r^2+u^2} du = \int_c^r \frac{B(ue^{i(\theta-\pi/2)})}{u} \frac{r^2}{r^2+u^2} du + O(1).$$

Действительно,

$$\left| \int_r^\infty \frac{B(ue^{i(\theta-\pi/2)})}{u} \frac{r^2}{r^2+u^2} du \right| \leq C \cdot B(r) \int_1^\infty \frac{1}{t(1+t^2)} dt = C \cdot B(r) \frac{\log 2}{2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_c^r \frac{B(ue^{i(\theta-\pi/2)})}{u} \frac{r^2}{r^2+u^2} du &= \int_c^r \frac{B(ue^{i(\theta-\pi/2)})}{u} du - \int_c^r \frac{u \cdot B(ue^{i(\theta-\pi/2)})}{r^2+u^2} du, \\ \left| \int_c^r \frac{u \cdot B(ue^{i(\theta-\pi/2)})}{r^2+u^2} du \right| &\leq \frac{C}{2r^2} \int_c^r 1 d(u^2) = \frac{C}{2r^2} (r^2 - c^2) = O(1). \end{aligned}$$

Теперь можно “вернуться” на действительную полуось (опять же с помощью теоремы Коши):

$$\int_c^r \frac{B(ue^{i(\theta-\pi/2)})}{u} du = \int_c^r \frac{B(u)}{u} du + O(1).$$

Здесь воспользуемся леммой 5 и получим

$$\int_c^r \frac{B(u)}{u} du = \int_c^r \frac{l(u)}{u} du + O(1).$$

Теперь все интегралы, входящие в выражение для $\ln F_M(z)$, оценены. Таким образом, получаем, что

$$\ln F_M(z) = \ln z - \pi i z - 2 \left(a + \frac{1}{2} \right) \ln |z| - 2 \int_c^r \frac{l(u)}{u} du + O(1), \quad \operatorname{Im} z = 1,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ясно, что все приведенные выше оценки имеют место не только на прямой $\operatorname{Im} z = 1$, но и на $\operatorname{Im} z = H > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $l(t)$ – ограниченная на $[0, \infty)$ монотонная функция из класса $K(\eta)$, $l(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ и

$$\int_1^\infty \frac{\eta(t)l(t)}{t} dt < \infty,$$

$$\mathcal{K} = \{\kappa_0 = ih_0, \kappa_n = n + a + l(n) + ih_n, a < 1, n \in \mathbb{N}, \operatorname{Re} \kappa_{-n} = -\operatorname{Re} \kappa_n, |h_i| \leq h\}.$$

Тогда справедлива оценка

$$|F_{\mathcal{K}}(z)| \asymp |z|^{-2a} \exp \left(-2 \int_c^{|z|} \frac{l(u)}{u} du \right), \quad \operatorname{Im} z = H > h. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из того, что $|h_i| \leq h$ и [6; § 5.3, лемма 5] следует, что

$$F_{\mathcal{K}}(z) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{z}{\kappa_n}\right) \asymp z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{\operatorname{Re} \kappa_n}\right)^2\right) = F_{\operatorname{Re} \mathcal{K}}(z), \quad |\operatorname{Im} z| \geq H > h.$$

Если $\varphi(t) = a + B(t)$, а Λ – построенная по этой функции последовательность (7), то из пункта 5 леммы 5 и следствия 1 видно, что $F_{\operatorname{Re} \mathcal{K}}(z) \asymp F_{\Lambda}(z)$, $\operatorname{Im} z = H$. А из леммы 6 следует, что $F_{\Lambda}(z) \asymp F_M(z)$, $\operatorname{Im} z = H$. Остается воспользоваться оценкой для $F_M(z)$ и замечанием 1.

5. Аппроксимационные теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < p < \infty$, $\max(0, p-2) \leq \alpha < p-1$, $l(t)$ – функция из предыдущей теоремы и

$$\mathcal{K} = \left\{ \kappa_0 = ih_0, \kappa_n = n + \frac{1+\alpha}{2p} + l(n) + ih_n, n \in \mathbb{N}, \operatorname{Re} \kappa_{-n} = -\operatorname{Re} \kappa_n, |h_i| \leq h \right\}.$$

Пусть также

$$R(x) = \exp\left(-2 \int_c^x \frac{l(u)}{u} du\right).$$

Тогда для полноты системы $e(\mathcal{K})$ в $L_{\alpha, \pi}^p$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{R^q(x)}{x} \notin L^1(c, \infty), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность прямо следует из леммы 2, для этого нужно только заметить, что наше условие $R^q(x)/x \notin L^1(c, \infty)$ эквивалентно условию леммы 2. Остается доказать необходимость. Предположим противное: $R^q(x)/x \in L^1(c, \infty)$. Для порождающей функции $F_{\mathcal{K}}(z)$ последовательности $\mathcal{K}$ верна оценка (13). Пусть $\gamma = (q-2) + (q-1)\alpha$, $\beta = -(q/p)\alpha$. Докажем, что $F_{\mathcal{K}}(x+iH) \in L_{\gamma}^q(\mathbb{R})$. Ну действительно, пользуясь оценкой (13), получаем

$$\int_c^{\infty} |F_{\mathcal{K}}(x+iH)|^q x^{(q-2)+(q-1)\alpha} dx \leq M \int_c^{\infty} \frac{R^q(x)}{x} du < \infty.$$

С помощью теоремы Питта докажем, что преобразование Фурье $f_1(t)$ функции $F_{\mathcal{K}}(x+iH)$ лежит в $L_{\beta}^q(\mathbb{R})$. Проверим выполнение всех условий теоремы Питта:

$$\gamma < (q-2) + \left(\frac{p}{p-1} - 1\right)(p-1) = q-1,$$

$$p > 2 \implies \gamma \geq (q-1) + \left(\frac{p}{p-1} - 1\right)(p-2) = 0, \quad p \leq 2 \implies \gamma \geq q-1,$$

поэтому $\max(0, q-2) \leq \gamma < q-1$,

$$-1 = -q \frac{p-1}{p} < \beta = \frac{-q}{p} \alpha < 0.$$

Таким образом, $f_1(t) \in L_{\beta}^q(\mathbb{R})$. Но $F_{\mathcal{K}}(z)$ – целая функция экспоненциального типа π , поэтому $f_1(t) \equiv 0$ вне $[-\pi, \pi]$. И, обозначив $f(t) = e^{-iHt} f_1(t)$, имеем

$$F_{\mathcal{K}}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} f(t) dt, \quad f(t) \in L_{\beta}^q(\mathbb{R}).$$

Рассмотрим функцию $e^{-ibz}F(z)$, $b \in \mathbb{R}$; ее преобразованием Фурье будет функция $f(t+b)$. По доказанному $f(t+b) \in L^q_\beta(\mathbb{R})$, т.е. $f(t) \in L^q(\mathbb{R}, |t-b|^\beta dt)$. Полагая $b = b_j$, $j = 1, \dots, s$ (см. формулу (3)), делаем вывод, что $f \in L^q_{\beta, \pi}$. Значит по аналитическому эквиваленту неполноты система $e(\mathcal{H})$ неполна в $L^p_{\alpha, \pi}$; противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Имеем $R(x) = \exp\left(-2 \int_c^x \frac{l(u)}{u} du\right) \in K(l)$ (см. [7]).

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия следствия 2, $1 < p < \infty$, $\max(0, p-2) \leq \alpha < p-1$ и

$$\frac{1+\alpha}{2p} - \frac{1}{2} < a < \frac{1+\alpha}{2p}. \quad (14)$$

Тогда

- 1) для любой функции $f \in L^p_{\alpha, \pi}$ последовательность $\{c_n\}$ коэффициентов ее негармонического ряда Фурье

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\kappa_n t}$$

принадлежит l^q , $(1+\alpha)/p + 1/q = 1$ и $\|\{c_n\}\| \leq C(p, \mathcal{H})\|f\|_{p, \alpha}$;

- 2) для любой функции $f \in L^p_{\alpha, \pi}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| (\pi - |t|)^{(1+\alpha)/p} \left(\sum_{n=-N}^N c_n e^{i\kappa_n t} - \int_{\kappa_{-N}}^{\kappa_N} e^{ixt} \hat{f}(x) dx \right) \right\|_{C[-\pi, \pi]} = 0;$$

- 3) система $e(\mathcal{H})$ образует в $L^p_{\alpha, \pi}$ базис, обладающий свойством Рисса, а при $p=2$, $\alpha=0$ – базис Рисса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что коэффициенты негармонического ряда Фурье функции $f \in L^p_{\alpha, \pi}$ определяются следующим образом:

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) h_n(t) dt, \quad h_n(t) = \frac{1}{F'_{\mathcal{H}}(\kappa_n)} \left(\widehat{\frac{F_{\mathcal{H}}(t)}{t - \kappa_n}} \right).$$

Известна следующая теорема [6; § 8.1, следствие 1]: если $F(z)$ – порождающая функция последовательности Λ , Λ отделима, $-\infty < -y_1 \leq \operatorname{Im} \lambda_n \leq -y_0 < 0$, $1 < p < \infty$, $\max(0, p-2) \leq \alpha < p-1$ и

$$|F(z)| \asymp (1+|x|)^\gamma l(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{1+\alpha}{p} < \gamma < 1 - \frac{1+\alpha}{p},$$

где $l(x)$ – непрерывная функция класса L_∞ , то верны утверждения 1)–3). Докажем, что выполнены условия этой теоремы. Пользуясь оценкой (13) и замечанием 2, получаем, что вне некоторой окрестности нуля $|F_{\mathcal{H}}(x+iH)| \asymp |x|^{-2a} R(|x|)$, где $R(t)$ – непрерывная функция класса L_∞ . В силу (14) $-(1+\alpha)/p < -2a < 1 - (1+\alpha)/p$. Значит для последовательности $\{\kappa_n - iH\}_{n \in \mathbb{Z}}$ можно применить сформулированную выше теорему. Остается воспользоваться тем, что аппроксимационные свойства систем $\{e^{i\kappa_n t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ и $\{e^{i(\kappa_n - iH)t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ совпадают.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условие (14) в определенном смысле точное, поскольку для системы $\{e^{i(n+a \cdot \text{sign } n)t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (т.е. в случае $l(t) \equiv 0$) оно является критерием базиса [6; § 9.1, теорема 3].

Для краткости обозначим $\ln_{(i)} x = \underbrace{\ln \ln \dots \ln}_i x$. Рассмотрим один частный случай:

$$l(n) = \sum_{j=1}^m \beta_j \prod_{k=1}^j \frac{1}{\ln_{(k)} n}, \quad n > N(m), \quad \beta_j \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

$$l(1) = l_1, \quad \dots, \quad l(N(m)) = l_{N(m)}.$$

Легко проверить, что $l(t) \in K(1/\ln t)$ и $\int_c^\infty (l(t)/t \ln t) dt < \infty$. Поэтому мы попадаем в условия теоремы 3. В нашем случае

$$R(x) = \exp\left(-2 \sum_{j=1}^m \beta_j \int_c^x \frac{1}{u} \prod_{k=1}^j \frac{1}{\ln_{(k)} t} du\right) \asymp \prod_{j=1}^m (\ln_{(j)} x)^{-2\beta_j}.$$

Поэтому верно

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $1 < p < \infty$, $\max(0, p-2) \leq \alpha < p-1$. Тогда для полноты системы $e(\mathcal{K})$ с $l(n)$ вида (15) в $L_{\alpha, \pi}^p$ необходимо и достаточно, чтобы либо $\beta_j \leq 1/(2q)$, $j = 1, 2, \dots, m$, либо $\beta_1 = \dots = \beta_{i-1} = 1/(2q)$, $\beta_i < 1/(2q)$, β_j — произвольные для $j = i+1, \dots, m$.

Как видим, при $m = 1$ получается результат, приведенный во введении.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. Levinson, *Gap and Density Theorems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **26**, Amer. Math. Soc., New York, 1940.
- [2] А. М. Седлецкий, “Полные и равномерно минимальные системы показательных функций в $L^p(-\pi, \pi)$ ”, *Тр. МЭИ*, 1972, № 146, 167–174.
- [3] R. Redheffer, R. M. Young, “Completeness and basis properties of complex exponentials”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **277**:1 (1983), 93–111.
- [4] А. И. Хейфиц, “Характеристики нулей некоторых специальных классов целых функций конечной степени”, *Теор. функций, функционал. анализ. и их прилож.*, т. 9, Харьков, 1968, 3–13.
- [5] А. М. Sedletsii, “Nonharmonic analysis”, *Functional analysis, J. Math. Sci. (N. Y.)*, **116**:5 (2003), 3551–3619.
- [6] А. М. Седлецкий, *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Физматлит, М., 2005.
- [7] Е. Сенегал, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985.
- [8] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 2, Наука, М., 1966.

А. А. Юхименко

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: alesandro1985@mail.ru

Поступило

27.02.2006

Исправленный вариант

10.07.2006