Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Захарова, Об общей части спектров разностных операторов, порожденных системами многочленов совместной ортогональности, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 5, 703–706

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3724>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 18:29:38

Об общей части спектров разностных операторов, порожденных системами многочленов совместной ортогональности

Е. В. Захарова

В работе исследуются спектры разностных операторов, порожденных системами многочленов совместной ортогональности и соответствующих системам мер типа Стильтеса. Показано, что общий носитель мер ортогональности совпадает с пересечением спектров семейства разностных операторов с одним и тем же набором функций Вейля.

Библиография: 7 названий.

1. Постановка задачи. Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ – положительные борелевские меры с носителями в $\mathbb{C}$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ – мульти-индекс. Многочлен совместной ортогональности $Q_{\mathbf{n}}(x)$, соответствующий заданным мерам и мульти-индексу $\mathbf{n}$, определяется (неоднозначно) условиями (см. [1]): $\deg Q_{\mathbf{n}} \leq n$, $n := \sum_{j=1}^m n_j$ и

$$\int Q_{\mathbf{n}}(x) x^\nu d\mu_j(x) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1)$$

При $m = 1$ это обычный ортогональный многочлен.

Для последовательности мульти-индексов

$$\mathbf{I} := \{(0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), (1, 1, 0, \dots, 0), \dots\},$$

$\mathbf{n} \in \mathbf{I} \iff n = km + d$, многочлены совместной ортогональности $Q_{\mathbf{n}} = Q_n$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$xQ_n(x) = \sum_{k=-1}^m a_{n,n-k} Q_{n-k}(x).$$

Это позволяет связать с системой таких многочленов разностный оператор $(m+1)$ -го порядка, определяемый в каноническом базисе $\{e_k\}_{k=0}^\infty$ пространства $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ следующим условием ($a_{-1,0} = 0$):

$$Ae_n = a_{n-1,n}e_{n-1} + a_{n,n}e_n + \dots + a_{n+m,n}e_{n+m}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00697, и INTAS NECCA, грант № 03-51-6637.

Матрицей оператора A является $(m+2)$ -диагональная матрица Хессенберга. Естественным является вопрос о связи спектра такого оператора и носителей мер, порождающих систему многочленов совместной ортогональности. Спектральные свойства оператора A связаны со следующим набором функций (называемых *функциями Вейля* оператора, см. [2], [3]):

$$f_j(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k e_{j-1}, e_0)}{z^{k+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Основным соотношением, связывающим меры и функции Вейля, является следующее равенство:

$$(A^k e_{j-1}, e_0) = s_k^{(j)} := \int x^k d\mu_j(x).$$

Так как ортогональные многочлены определяются соотношениями (1) с точностью до постоянного множителя, то одному и тому же набору мер соответствует семейство операторов вида (2). Все такие операторы имеют один и тот же набор функций Вейля. При $m = 1$ пересечение спектров всех этих операторов совпадает со спектром одного из них, обладающего некоторым свойством “симметрии” (подробнее см. [4]). Как следствие, для положительных мер с компактным носителем на действительной оси спектр соответствующего трехдиагонального симметричного (ограниченного самосопряженного) оператора совпадает с носителем меры ортогональности. Этот факт хорошо известен в теории оператора Якоби. В общем случае при $m > 1$ не существует оператора с минимальным спектром и вопрос о связи носителей мер и спектров остается открытым. Отметим, что умножение спектральных мер оператора на положительные константы не меняет их носителей. В настоящее время наиболее хорошо изучены три класса многочленов совместной ортогональности, соответствующие системам мер Анжелеско, Никишина [1] и Стилтеса [5]. Для всех трех случаев соответствующие операторы являются компактными возмущениями некоторых стандартных операторов, обладающих свойством периодичности элементов на диагоналях матрицы Хессенберга (общая теорема такого типа доказана в [6]). В настоящей работе рассмотрен случай операторов класса Стилтеса. Основной результат (теорема 1) показывает, что в этом случае пересечение существенных спектров операторов с одним и тем же набором (с точностью до умножения на константы) функций Вейля совпадает с общим носителем мер ортогональности.

2. Класс Стилтеса. Пусть матрица оператора A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Оператор A определен на всем пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ и ограничен тогда и только тогда, когда выполнено условие $\sup_n |a_n| < \infty$. Если все $a_n > 0$, то как показано

в [5] существует набор положительных мер $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ с общим носителем на лучах $\exp(2\pi i k / (m+1))$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$, такой, что функции Вейля оператора A имеют представление

$$f_j(z) = \int \frac{d\mu_j(x)}{z-x}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Набор мер $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ естественно назвать набором спектральных мер оператора A . Обозначим через A_0 оператор, для которого все $a_n = a_n^0 = 1$. Если для оператора A выполнено соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, то A является компактным возмущением A_0 и их существенные спектры совпадают. Задача о пересечении существенных спектров операторов с одним и тем же набором (с точностью до умножения на константы) функций Вейля в этом случае сводится к задаче о пересечении спектров таких операторов с тем же набором функций Вейля как и для оператора A_0 . В [5] показано, что носителем спектральных мер оператора A_0 является множество отрезков, полученных из отрезка $[0, \alpha]$, $\alpha = (m+1)(1/m)^{m/(m+1)}$, вращением на углы $2\pi k / (m+1)$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$. Обозначим это множество через S .

3. Основной результат.

ТЕОРЕМА 1. *Пересечение спектров всех ограниченных операторов, имеющих такой же набор функций Вейля, как и у оператора A_0 , совпадает с общим носителем S спектральных мер этого оператора.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 1. Рассмотрим операторы вида

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Оператор $A_{a,b}$ имеет одинаковый (с точностью до умножения на константы) с A_0 набор функций Вейля тогда и только тогда, когда выполнено условие $ab^m = 1$ или эквивалентно $a = 1/b^m$. Для проверки этого факта достаточно вычислить моменты $s_k^{(j)}$ для этих двух операторов и убедиться, что они пропорциональны. Для определения спектра оператора $A_{a,b}$ преобразуем его в оператор в пространстве Харди H^2 функций, аналитических в единичном круге (стандартный прием для операторов Тёплица, см. также [7] для более общего случая комплексного периодического оператора Якоби). Именно, с любой последовательностью $\{x_k\}_{k=0}^\infty \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ свяжем функцию $x(w) := \sum_{k=0}^\infty x_k w^k \in H^2$ и определим действие оператора $K_{a,b}$ на x по правилу

$$K_{a,b}x = y, \quad y(w) = b \frac{x(w) - x(0)}{w} + aw^2x(w).$$

Оператор $K_{a,b}$ изоморфен оператору $A_{a,b}$ и имеет одинаковую с ним структуру спектра. Для определения точек резольвентного множества оператора $K_{a,b}$ рассмотрим оператор $K_{a,b} - zI$ и найдем все значения z , при которых этот оператор

ограниченно обратим (т.е. резольвентное множество оператора $K_{a,b}$). По теореме Банаха об открытом отображении для этого достаточно проверить, что уравнение $(K_{a,b} - zI)x = y$ имеет единственное решение в пространстве H^2 для любой правой части из этого пространства. Имеем для любого решения

$$x(w) = \frac{wy(w) + bx(0)}{aw^{m+1} - zw + b} = \frac{(w/b)y(w) + x(0)}{1 - z(w/b) + (w/b)^{m+1}}.$$

Уравнение $1 - z(w/b) + (w/b)^{m+1} = 0$ определяет алгебраическую функцию $w(z)$, у которой одна ветвь $w_0(z)$ в бесконечности имеет нуль, остальные ветви $w_j(z)$, $j = 1, 2, \dots, m$, имеют в бесконечности полюсы. Пусть $b < 1$. Условие Виета $(w_0/b)(w_1/b) \cdots (w_m/b) = 1$ означает, что хотя бы одно из комплексных чисел (w_j/b) лежит в единичном круге. Тогда для одного из j выполнено $|w_j| < 1$. Для того чтобы функция $x(w)$ была в классе H^2 необходимо и достаточно, чтобы для всех остальных w_i , $i \neq j$, было выполнено $|w_i| > 1$. Определим алгебраическую функцию $W(z)$ уравнением $1 - zW + W^{m+1} = 0$. Тогда $w_j = bW_j$. Точка резольвентного множества определится теперь условием: для одного из значений W_j выполнено $|W_j| < 1/b$, для всех остальных $|W_i| > 1/b$. Для $b > 1$ условие резольвентной точки аналогично. Это означает, что условие резольвентной точки можно сформулировать так: в точке z значение одной из функций $W_j(z)$ по модулю строго меньше всех остальных. Анализ поведения функции W показывает, что в комплексной плоскости переменного z с разрезом по множеству S ветвь W_0 однозначна и имеет минимальный модуль среди всех остальных ветвей алгебраической функции. При этом на границах разреза функция W_0 совпадает по модулю с одной из ветвей W_j , $j = 1, 2, \dots, m$. Заметим, что для всех ветвей $W_i(0) = 1$. Следовательно, резольвентным множеством оператора $K_{a,b}$ является комплексная плоскость с разрезом по множеству S . Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988.
- [2] A. I. Aptekarev, V. A. Kaliaguine, "Complex rational approximation and difference operators", *Proceedings of the Third International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory*, vol. I (Acquafredda di Maratea, 1996), Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl., **52**, 1998, 3–21.
- [3] В. А. Калягин, "Аппроксимации Эрмита–Паде и спектральный анализ несимметричных разностных операторов", *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 79–100.
- [4] B. Beckermann, V. Kaliaguine, "Diagonal of the Padé table and the approximation of the Weyl function of second order difference operator", *Constr. Approx.*, **13**:4 (1997), 481–510.
- [5] A. Aptekarev, V. Kaliaguine, J. Van Iseghem, "Genetic sum representations for the moments of Stieltjes functions and their applications", *Constr. Approx.*, **16**:4 (2000), 487–524.
- [6] A. Aptekarev, V. Kalyagin, G. Lopez, I. Rocha, "On the limit behavior of recurrence coefficients for multiple orthogonal polynomials", *J. Approx. Theory*, **139**:1–2 (2006), 346–370.
- [7] J. Gilewicz, E. Zakharova, *Le spectre de l'opérateur complexe périodique de Jacobi dans $l^2(N)$* , Preprint no. 4167, CPT, Luminy, 2000.

Е. В. Захарова

Высшая школа экономики, Нижегородский филиал
E-mail: kalia@hse.nnov.ru

Поступило

13.10.2006

Исправленный вариант

09.11.2006