Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Антонов, С. Г. Чеканов, Конечные разрешимые группы с C -замкнутыми инвариантными подгруппами, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 5, 789–791

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3725>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 06:51:12

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Конечные разрешимые группы с C -замкнутыми инвариантными подгруппами

В. А. Антонов, С. Г. Чеканов

Подгруппа H группы G называется C -замкнутой, если $H = C(C(H))$. Здесь и в дальнейшем $C(H)$ следует понимать как $C_G(H)$. Несложно заметить, что подгруппа H группы G в том и только том случае C -замкнута, когда $H = C(M)$ для некоторого подмножества M группы G . В. Гашюц [1] описал конечные группы, в которых C -замкнута любая подгруппа (группы Гашюца). Такие группы исчерпываются прямыми произведениями неабелевых групп порядка pq попарно взаимно простых порядков. В работах [2], [3] исследовано строение групп, у которых C -замкнута любая подгруппа, содержащая центр группы. Кроме того, изучено строение групп, в которых C -замкнуты все нециклические [4] или все подгруппы, которые не являются нормальными [5].

Предлагаемая работа посвящена изучению конечных разрешимых групп, в которых C -замкнуты все нормальные подгруппы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – конечная разрешимая группа, в которой C -замкнута любая нормальная подгруппа. Тогда G представима в виде прямого произведения таких подгрупп G_i , $i = 1, 2, \dots, k$, что

- 1) $G_i = P_i \lambda \langle x_i \rangle$, где $P_i = G'_i$ – примарная группа, порядки элементов x_i , $i = 1, 2, \dots, k$, попарно взаимно просты и свободны от квадратов;
- 2) если $|x_i| = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$, q_j – простые числа, то G_i имеет в точности n минимальных нормальных подгрупп A_j , $C_{G_i}(P_i) = Z(P_i) = \prod_{j=1}^n A_j$ и при подходящей нумерации множителей $C_{G_i}(A_j) = P_i \lambda \langle x_i^{q_j} \rangle$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как единичная подгруппа E нормальна в G и $C(E) = G$, то $Z(G) = C(G) = E$. Кроме того, из C -замкнутости нормальных подгрупп следует, что если A и B нормальны в G , то $C(A \cap B) = C(A) \cdot C(B)$, $C(A \cdot B) = C(A) \cap C(B)$, и из $A < B$ следует $C(A) > C(B)$.

Покажем, сначала, что G/G' является циклической группой. Пусть A – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда $C(A)$ – максимальная нормальная подгруппа группы G и, следовательно, $G/C(A)$ – простая группа, т.е. $|G/C(A)| = q$ – простое число. Так как $G/C(A)$ действует на A регулярно, то $(|A|, q) = 1$. Кроме того, из $C(A) \geq G'$ следует, что все минимальные нормальные подгруппы группы G лежат в $C(G')$. В частности, если $K \triangleleft G$ и $K \neq E$, то $K \cap C(G') \neq E$ и, следовательно, $C(K) \cdot G' = C(K \cap C(G')) < G$. Это означает, что если $G' \cdot H = G$, то H не лежит в собственной нормальной подгруппе группы G . В самом деле, если $H \leq T \triangleleft G$, то $T \cdot G' = H \cdot G' = G$, и из $C(T) \cap C(G') = E$ и $C(T) \triangleleft G$ следует, что $C(T) = E$, т.е. $T = G$. В дальнейшем H – минимальная подгруппа группы G со свойством $H \cdot G' = G$.

Если $K < H$, то $K \cdot G' \triangleleft G$ и $K \cdot G' \neq G$. Но тогда $K \cdot (G' \cap H) \triangleleft H$ и $K \cdot (G' \cap H) \neq H$, т.е. любая собственная подгруппа группы H лежит в собственной нормальной подгруппе

группы H . Поэтому группа H нильпотентна. Покажем, что H является циклической группой.

Пусть $K \triangleleft H$ и $B = K \cap C(G') \neq E$. Тогда $B \triangleleft H$ и, следовательно, $B \cap Z(H) \neq E$, что противоречит тому, что $C(H) \cap C(G') = C(H \cdot G') = E$. Это означает, в частности, что $H \cap C(G') = E$, и если $E < K \leq H$, то $K \not\triangleleft G$.

Для любого подмножества M группы G положим $\overline{M} = (M \cdot G')/G'$. Пусть $\overline{S}$ – нециклическая силовская p -подгруппа из $\overline{H}$, а H_0 – такая нормальная подгруппа из H , содержащая $H \cap G'$, что $H/H_0 = \langle \tilde{a} \rangle \times \langle \tilde{b} \rangle$, где $\tilde{a}^p = \tilde{b}^p = 1$. Если $\tilde{a} = aH_0$ и $\tilde{b} = bH_0$, то в силу минимальности H каждая из подгрупп $H_1 = \langle a \rangle H_0 G'$ и $H_2 = \langle b \rangle H_0 G'$ отлична от G . Положим $A_1 = C(H_1)$ и $A_2 = C(H_2)$. Тогда A_1 и A_2 – различные минимальные нормальные подгруппы группы G и $C(H_0 G') = A_1 \times A_2$. Подгруппа $A_3 = C(\langle ab \rangle H_0 G')$ тоже является минимальной нормальной подгруппой группы G , содержится в $A_1 \times A_2$ и отлична от A_1 и A_2 . Пусть $x \in A_1$ и $y \in A_2$ – такие элементы, что $xy \in A_3 \setminus E$. Тогда $(xy)^a = xy^a \in A_3$ и $(xy^a)(xy)^{-1} = y^a y^{-1} \in A_3$. Отсюда $y^a y^{-1} \in A_2 \cap A_3 = E$, т.е. $y^a = y$ и $a \in C(A_2)$, что невозможно. Таким образом, все силовские подгруппы из $\overline{H}$ циклические. Но тогда и группа $\overline{H} = G/G'$ тоже является циклической группой. В силу минимальности H имеем $H = \langle h \rangle$ для некоторого элемента h .

Покажем теперь, что $|\overline{H}|$ свободен от квадратов. Предположим противное. Пусть $|\overline{H}/\overline{H}_0| = p^2$ и $H = H_0 \cdot \langle a \rangle$. Положим $H_1 = \langle a^p \rangle H_0 G'$, $H_2 = H_0 G'$, $A_1 = C(H_1)$ и $A = C(H_2)$. Тогда A_1 – минимальная нормальная подгруппа группы G , $A_1 < A$ и в A нет отличных от A_1 собственных нормальных в G подгрупп. Если группа A неабелева, и B – произвольная максимальная абелева подгруппа из A , то подгруппа

$$B = C(B) \cap A = C(B) \cap C(H_2) = C(H_2 \cdot B)$$

является C -замкнутой и $G > C(B) = H_2 \cdot B > H_2$. Так как G/H_2 – циклическая группа порядка p^2 , то $C(B) = H_1$ и $B = C(C(B)) = C(H_1) = A_1$. Но неабелева группа содержит по крайней мере три различные максимальные абелевы подгруппы. Таким образом, группа A абелева.

Так как A содержит только одну нормальную в G собственную подгруппу A_1 , то A является q -группой для некоторого простого числа q . Если $q \neq p$, то $A = C_A(a^p) \times [A, a^p] = A_1 \times [A, a^p]$ и из $G = C(A) \cdot \langle a \rangle$ следует $[A, a^p] \triangleleft G$, что невозможно. Поэтому $q = p$. Но тогда подгруппа $K = A_1 \cdot \langle a \rangle$ нильпотентна и, следовательно, $T = A_1 \cap Z(K) \neq E$. Поэтому $C(T) < G$. В то же время, $C(T) \geq C(A_1) = H_1$ и $C(T) \geq \langle a \rangle$, т.е. $C(T) \geq H_1 \cdot \langle a \rangle = G$.

Итак, все силовские подгруппы из G/G' имеют простой порядок. Поэтому G' совпадает с пересечением максимальных нормальных подгрупп группы G , а $C(G')$ совпадает с произведением минимальных нормальных подгрупп группы G . Но тогда $C(G')$ абелева и $C(G') \leq G'$.

Предположим, что G' – абелева группа, т.е. $C(G') = G' = \prod_{i=1}^n A_i$, где A_i – минимальные нормальные подгруппы группы G , и $G = G' \cdot \langle h \rangle$. Так как $Z(G) = E$, то $G' \cap \langle h \rangle = E$, т.е. $G = G' \lambda \langle h \rangle$. Пусть $\langle h \rangle = \prod_{i=1}^n \langle h_i \rangle$, где $G = C(A_i) \lambda \langle h_i \rangle$. Тогда $G_i = A_i \lambda \langle h_i \rangle \triangleleft G$ и $C(G_i) = \prod_{j \neq i} G_j$, т.е. $G = \prod_{i=1}^n G_i$.

В дальнейшем считаем, что G' неабелева, $C(G') = Z(G') = \prod_{i=1}^n A_i$, где A_i – минимальные нормальные подгруппы группы G , и $C(A_i) = G' \lambda \langle h^{q_i} \rangle$. Покажем, что G' является нильпотентной группой. Пусть $F = F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G , и B/F – минимальная нормальная подгруппа группы G/F . Из $C(F) = Z(F)$ следует, что $C(B) = Z(B) < Z(F)$. Так как группа B не нильпотентна, найдется силовская p -подгруппа B_p группы B , которая не является нормальной в B . Но тогда $B = H \lambda B_p$, где H – нильпотентная холлова p' -подгруппа из B . Если $Z(H) \leq Z(B)$, то $B \leq C(Z(H)) = H \cdot C(H)$, т.е. подгруппа $B = H \times (C(H) \cap B_p)$ нильпотентна, что невозможно. Поэтому $Z(H) \not\leq Z(B)$. Но тогда

$$Z(H) = (Z(H) \cap C(B_p)) \times [Z(H), B_p].$$

Так как $[Z(H), B_p] = [Z(H), B]$ – неединичная нормальная в группе G подгруппа, то можно считать, что $[Z(H), B_p] \geq A_1$, и из $B_p \not\leq C(A_1)$ следует, что B_p содержит элемент $h_1 a$ для некоторого $a \in G'$.

Если $F \neq G'$, то можно считать, что $B \leq G' \cdot F$. Но тогда $C(B) \geq C(G') \cap Z(F)$. Так как $C(G') = \prod_{i=1}^n A_i \leq F$ и группа F нильпотентна, то $[F, A_i] < A_i$, т.е. $A_i \leq Z(F)$. Но тогда $F = C(Z(F)) \leq C(C(G')) = G'$ и $B \leq G' \cdot F = G'$, что противоречит тому, что $h_1 a \in B$.

Таким образом, $G' = F(G)$ – нильпотентная группа. Пусть $G' = \prod_{p \in \pi(G')} S_p$ – представление G' в виде произведения своих силовских p -подгрупп, $q \in \pi(G')$ и $\prod_{i=1}^k \langle h_i \rangle = C_{\langle h \rangle}(\prod_{A_i \leq S_q} A_i)$. Положим $K = S_q \lambda \prod_{i=k+1}^n \langle h_i \rangle$. Если $p \neq q$ и $[S_p, h_i] \neq 1$ для некоторого $i \in \{k+1, \dots, n\}$, а A_1 и A_2 – минимальные нормальные в группе G подгруппы из S_q и S_p соответственно, то $C(A_1)$ и $C(A_2)$ не содержат h_i , что невозможно, так как $|G : C(A_1)|$ и $|G : C(A_2)|$ – различные простые числа. Поэтому $h_i \in C(\prod_{p \neq q} S_p)$. Но тогда $K \triangleleft G$. Так как

$$C(Z(K)) = C(K) \cdot K \geq \prod_{i=1}^k \langle h_i \rangle \cdot \prod_{i=k+1}^n \langle h_i \rangle = \langle h \rangle,$$

то $C(Z(K)) = E$ и $G = K \times C(K)$. В силу произвольности $q \in \pi(G')$ группа G удовлетворяет условию теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Gaschutz, *Arch. Math.*, **6** (1954), 5–8. [2] Y. Cheng, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **86**:2 (1982), 205–208. [3] В. А. Антонов, *Матем. заметки*, **27**:6 (1980), 839–857. [4] В. А. Антонов, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 1979, № 7, 3–9. [5] В. А. Антонов, *Сиб. матем. журн.*, **20**:6 (1979), 1171–1184.

В. А. Антонов

Южно-Уральский государственный университет,
г. Челябинск

Поступило

24.11.2005

Исправленный вариант

28.06.2006

С. Г. Чеканов

Южно-Уральский государственный университет,
г. Челябинск

E-mail: chekanov@yandex.ru