Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Лопушанская, Некоторые вопросы аппроксимации обобщенной функции Каратеодори в специальной области Ω_ν , *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 5, 792–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3726>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:50:47

Некоторые вопросы аппроксимации обобщенной функции Каратеодори в специальной области Ω_ν

Е. В. Лопушанская

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция f называется *обобщенной функцией Каратеодори*, если она мероморфна в открытом единичном круге $\mathbb{D}$ и ядро

$$K_f = \frac{f(\lambda) + \overline{f(\mu)}}{1 - \lambda\bar{\mu}}$$

имеет конечное число отрицательных квадратов.

Обозначим через C_κ класс обобщенных функций Каратеодори с κ отрицательными квадратами.

Известно (см., например, [1; гл. V, § 3]), что функция f принадлежит классу C_κ тогда и только тогда, когда существует пространство Понтрягина Π_κ , унитарный оператор $V: \Pi_\kappa \rightarrow \Pi_\kappa$ и его порождающий элемент $v \in \Pi_\kappa$ такие, что

$$f(\lambda) = f(0) + 2\lambda[(V - \lambda)^{-1}v, v], \quad \lambda \in \mathbb{D} \setminus \sigma_p(V). \quad (1)$$

ЛЕММА 2. Функция f удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $f(\lambda) \in C_\kappa$,
- 2) $\overline{\lim}_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \in \Omega_\nu}} \frac{\operatorname{Re} f(\lambda)}{|1 - \lambda|} < \infty$,
- 3) $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \in \Omega_\nu}} f(\lambda) = 0$

тогда и только тогда, когда порождающий элемент $v \in \Pi_\kappa$ в представлении (1) принадлежит области определения оператора $(V - I)^{-1}$: $v \in \operatorname{dom}(V - I)^{-1}$ и представление (1) функции f принимает вид

$$f(\lambda) = -2(\lambda - 1)[(V - \lambda)^{-1}v, (V - I)^{-1}v], \quad \lambda \in \Omega_\nu \setminus \sigma_p(V). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для функции f выполнены условия 1)–3) леммы. Из представления (1) следует, что

$$\frac{f(\lambda) + \overline{f(\mu)}}{1 - \lambda\bar{\mu}} = 2[(V - \lambda)^{-1}v, (V - \mu)^{-1}v].$$

Используя условие 2), имеем

$$\overline{\lim}_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \in \Omega_\nu}} [(V - \lambda)^{-1}v, (V - \lambda)^{-1}v] < \infty. \quad (3)$$

Покажем, что $v \in \operatorname{dom}(V - I)^{-1}$. Пусть A – π -самосопряженный оператор, связанный с оператором V преобразованием Кэли–Неймана:

$$A = -i(V + I)(V - I)^{-1} = -i - 2i(V - I)^{-1}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00203-а.

Тогда $\text{dom } A = \text{dom}(V - I)^{-1}$, а

$$(V - \lambda)^{-1} = \frac{1}{2i}(\alpha + i)(A + i)(A - \alpha)^{-1}, \quad \text{где } \alpha = -i \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}.$$

Из неравенства (3) получаем

$$\overline{\lim}_{\substack{\alpha \rightarrow \infty \\ \alpha \in W_\nu}} [(\alpha + i)(A + i)(A - \alpha)^{-1}v, (\alpha + i)(A + i)(A - \alpha)^{-1}v] < \infty. \quad (4)$$

Так как $A: \Pi_\varkappa \rightarrow \Pi_\varkappa$ – самосопряженный оператор, то (см. [2; § 1]) $\Pi_\varkappa$ можно разложить на инвариантные подпространства оператора A :

$$\Pi_\varkappa = \Pi'_\varkappa[+]H, \quad (5)$$

где $\Pi'_\varkappa$ – пространство Понтрягина с $\varkappa$ отрицательными квадратами и $\{H, [\cdot, \cdot]\}$ – гильбертово пространство, причем $A' = A|_{\Pi'_\varkappa}$ – ограниченный оператор, а $A'' = A|_H$ – гильбертов самосопряженный оператор. Тогда, разложив относительно (5) порождающий элемент $v = v' + v''$, перепишем

$$\begin{aligned} & [(\alpha + i)(A + i)(A - \alpha)^{-1}v, (\alpha + i)(A + i)(A - \alpha)^{-1}v] \\ &= [(\alpha + i)(A' + i)(A' - \alpha)^{-1}v', (\alpha + i)(A' + i)(A' - \alpha)^{-1}v'] \\ &+ [(\alpha + i)(A'' + i)(A'' - \alpha)^{-1}v'', (\alpha + i)(A'' + i)(A'' - \alpha)^{-1}v'']. \end{aligned}$$

Так как A' – ограниченный оператор, то

$$\overline{\lim}_{\substack{\alpha \rightarrow \infty \\ \alpha \in W_\nu}} [(\alpha + i)(A' + i)(A' - \alpha)^{-1}v', (\alpha + i)(A' + i)(A' - \alpha)^{-1}v'] < \infty.$$

Из неравенства (4) имеем

$$\overline{\lim}_{\substack{\alpha \rightarrow \infty \\ \alpha \in W_\nu}} [(\alpha + i)(A'' + i)(A'' - \alpha)^{-1}v'', (\alpha + i)(A'' + i)(A'' - \alpha)^{-1}v''] < \infty.$$

Тогда для $\alpha = iy$

$$\overline{\lim}_{y \nearrow \infty} [(y + 1)(A'' + i)(A'' - iy)^{-1}v'', (y + 1)(A'' + i)(A'' - iy)^{-1}v''] < \infty.$$

Так как $A'' = A''^*$, положив $\sigma(t) = [E_t v, v]$, где E_t – спектральная функция оператора A'' , получим

$$\overline{\lim}_{y \nearrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(t + i)^2(y + 1)^2}{(t - iy)^2} \right| d\sigma(t) = \overline{\lim}_{y \nearrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(t + i)^2(y + 1)^2(t + iy)^2}{(t^2 + y^2)^2} \right| d\sigma(t) < \infty.$$

Для вещественной части имеем

$$\overline{\lim}_{y \nearrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t^2 - 1)(t^2 - y^2)(y + 1)^2 - 4t^2 y(y + 1)^2}{(t^2 + y^2)^2} d\sigma(t) < \infty.$$

Вычислив предел в левой части неравенства, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 - t^2) d\sigma(t) < \infty \implies \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d\sigma(t) < \infty.$$

Таким образом, по теореме из [3; гл. VI, п. 72] $v'' \in \text{dom } A''$. Следовательно, $v = v' + v'' \in \text{dom } A = \text{dom}(V - I)^{-1}$.

Покажем, что $[(V - \lambda)^{-1}v, v] \rightarrow [(V - I)^{-1}v, v]$ при $\lambda \rightarrow 1$, $\lambda \in \Omega_\nu$. Заметим, что, поскольку $((V - I)^{-1})^* = -V(V - I)^{-1}$, то $\text{dom}(V - I)^{-1} = \text{dom}(V^* - I)^{-1}$ и

$$[(V - \lambda)^{-1}v, v] - [(V - I)^{-1}v, v] = (\lambda - 1)[(V - \lambda)^{-1}v, (V^* - I)^{-1}v].$$

Введем в Π_κ гильбертово скалярное произведение: $(x, y) = (x', y')_1 + [x'', y'']$, где $x = x' + x''$, $y = y' + y''$ — представления векторов x, y относительно разложения (5), $(x', y')_1$ — какое-либо каноническое скалярное произведение в Π'_κ . Тогда

$$|[(V - \lambda)^{-1}v, v] - [(V - I)^{-1}v, v]| \leq |\lambda - 1| \|(V - \lambda)^{-1}v\| \|(V^* - I)^{-1}v\|. \quad (6)$$

Покажем, что норма $\|(V - \lambda)^{-1}v\|$ ограничена. Операторы $V' = V|_{\Pi'_\kappa}$ и $V'' = V|_H$ связаны с A' и A'' тем же преобразованием Кэли–Неймана. Так как

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \in \Omega_\nu}} [(V - \lambda)^{-1}v, (V - \lambda)^{-1}v] \\ &= [(V' - I)^{-1}v', (V' - I)^{-1}v'] + \overline{\lim}_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \in \Omega_\nu}} [(V'' - \lambda)^{-1}v'', (V'' - \lambda)^{-1}v''] < \infty, \end{aligned}$$

то

$$\overline{\lim}_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \in \Omega_\nu}} [(V'' - \lambda)^{-1}v'', (V'' - \lambda)^{-1}v''] < \infty \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \in \Omega_\nu}} \|(V'' - \lambda)^{-1}v''\| < \infty.$$

Так как $1 \in \rho(V')$, то

$$\overline{\lim}_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \in \Omega_\nu}} \|(V' - \lambda)^{-1}v'\| < \infty.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \in \Omega_\nu}} \|(V - \lambda)^{-1}v\| < \infty.$$

Тогда из неравенства (6) следует, что $[(V - \lambda)^{-1}v, v] \rightarrow [(V - I)^{-1}v, v]$ при $\lambda \rightarrow 1$, $\lambda \in \Omega_\nu$. Используя равенство (1), из свойства 3) получаем $f(0) = -2[(V - I)^{-1}v, v]$. Тогда $f(\lambda) = -2(\lambda - 1)[(V - \lambda)^{-1}v, (V - I)^{-1}v]$.

Обратно, легко проверить, что функция $f(\lambda) = -2(\lambda - 1)[(V - \lambda)^{-1}v, (V - I)^{-1}v]$ является функцией Каратеодори,

$$\overline{\lim}_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \in \Omega_\nu}} \frac{\text{Re } f(\lambda)}{1 - |\lambda|} = 4 \overline{\lim}_{\substack{\alpha \rightarrow \infty \\ \alpha \in W_\nu}} \left[\frac{1}{2i}(\alpha + i)(A + i)(A - \alpha)^{-1}v, \frac{1}{2i}(\alpha + i)(A + i)(A - \alpha)^{-1}v \right].$$

Для доказательства свойства 2) достаточно проверить, что

$$\overline{\lim}_{\alpha \in W_\nu} \left[\frac{1}{2i}(\alpha + i)(A'' + i)(A'' - \alpha)^{-1}v'', \frac{1}{2i}(\alpha + i)(A'' + i)(A'' - \alpha)^{-1}v'' \right] < \infty,$$

где $v'' \in H$ и $A'' = A|_H$, а H — гильбертово пространство в разложении пространства Π_κ (5). Используя, что $\alpha \in W_\nu$, т.е. $|t - \alpha| \geq |\alpha| \cos \nu$, и то, что $v \in \text{dom } A = \text{dom}(V - I)^{-1}$, получим оценку

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{\substack{\alpha \rightarrow \infty \\ \alpha \in W_\nu}} \left[\frac{1}{2i}(\alpha + i)(A'' + i)(A'' - \alpha)^{-1}v'', \frac{1}{2i}(\alpha + i)(A'' + i)(A'' - \alpha)^{-1}v'' \right] \\ &= \overline{\lim}_{\substack{\alpha \rightarrow \infty \\ \alpha \in W_\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(t + i)^2(\alpha + i)^2}{(t - \alpha)^2} \right| d\sigma(t) \leq \frac{1}{\cos^2 \nu} \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 - 1) d\sigma(t) < \infty. \end{aligned}$$

Свойство 3) следует из представления (2) функции f .

ТЕОРЕМА 3. Для функции f следующие свойства:

- 1) $f(\lambda) \in C_{\mathcal{K}}$,
 2) для целого числа $n \geq 0$ существуют $2n$ вещественных чисел $s_0, s_1, \dots, s_{2n-1}$ таких, что

$$f(\lambda) + \sum_{\nu=0}^{2n-1} s_{\nu}(\lambda-1)^{\nu+1} = O((\lambda-1)^{2n+1}), \quad \lambda \rightarrow 1, \quad \lambda \in \Omega_{\nu}, \quad (7)$$

выполнены тогда и только тогда, когда существуют $\pi_{\mathcal{K}}$ -пространство Понтрягина $\Pi_{\mathcal{K}}$, π -унитарный оператор $V: \Pi_{\mathcal{K}} \rightarrow \Pi_{\mathcal{K}}$ и порождающий для V элемент $v \in \text{dom}((V-I)^{-(n+1)})$ такие, что

$$f(\lambda) = -2(\lambda-1)[(V-\lambda)^{-1}v, (V-I)^{-1}v], \quad \lambda \in \Omega_{\nu} \setminus \sigma_p(V); \quad (8)$$

при этом

$$s_{\nu} = \begin{cases} 2[(V-I)^{-(\nu+1)}v, (V-I)^{-1}v], & 0 \leq \nu \leq n, \\ (-1)^{\nu-n}2[(V-I)^{-(n+1)}v, V^{\nu-n}(V-I)^{-\nu+n-1}v], & n < \nu \leq 2n-1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление (7) функции f обеспечивает выполнение условий 2) и 3) леммы, откуда получаем представление (8).

Для доказательства того, что $v \in \text{dom}(V-I)^{-(n+1)}$, введем в рассмотрение функцию $g(\alpha) = if(\lambda)$, где $\alpha = i(1+\lambda)/(1-\lambda)$. Эта функция является функцией Неванлинны: $g(\alpha) = [(A-\alpha)^{-1}u, u]$, где $A = i(I+V)(I-V)^{-1}$ – самосопряженный оператор, а $u = (A+i)v$. Из теоремы [2; § 1, 1.10] мы знаем, что $u \in \text{dom } A^n = \text{dom}(V-I)^{-n}$. Из того, что $(V-I)^{-1}v = -\frac{1}{2i}u$, следует, что

$$(V-I)^{-1}v \in \text{dom}(V-I)^{-n} \implies v \in \text{dom}(V-I)^{-(n+1)}.$$

Обратно, заметим, что для $k \geq 0$ и $v \in \text{dom}((V-I)^{-(k+1)})$ выполнено тождество

$$\begin{aligned} & 2(\lambda-1)[V(V-I)^{-1}(V-\lambda)^{-1}v, v] \\ &= -\sum_{\nu=0}^{2k} s_{\nu}(\lambda-1)^{\nu+1} + 2(-1)^{k+1}(\lambda-1)^{2k+2}[(V-\lambda)^{-1}(V-I)^{-(k+1)}v, V^k(V-I)^{-(k+1)}v]. \end{aligned} \quad (9)$$

Для доказательства представления (7) проверим, что

$$\begin{aligned} & -2(\lambda-1)^{2k+1}(-1)^k[(V-I)^{-(k+1)}v, V^k(V-I)^{k-1}v] \\ &+ 2(-1)^{k+1}(\lambda-1)^{2k+2}[(V-\lambda)^{-1}(V-I)^{-(k+1)}v, V^k(V-I)^{-(k+1)}v] = O((\lambda-1)^{2k+1}). \end{aligned}$$

Для этого достаточно показать, что

$$(\lambda-1)[(V-\lambda)^{-1}(V-I)^{-(k+1)}v, V^k(V-I)^{-(k+1)}v] \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 1, \quad \lambda \in \Omega_{\nu}.$$

Переходя к π -самосопряженному оператору A , получим, что для доказательства нашего утверждения нужно проверить, что

$$[(A''-\alpha)^{-1}(A''+i)^{k+2}v'', (A''+i)(A''-i)^kv''] \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad \alpha \in W_{\nu},$$

где $u'' \in H$ и $A'' = A|_H$, а H – гильбертово пространство в разложении (5) пространства $\Pi_{\mathcal{K}}$.

Рассмотрим следующий ниже интеграл, где $\sigma(t) = [E_t u, u]$, а E_t – спектральная функция оператора A'' :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(t+i)^{k+3}(t-i)^k}{t-\alpha} \right| d\sigma(t) \\ &= \int_{-\nu}^{\nu} \left| \frac{(t+i)^{k+3}(t-i)^k}{t-\alpha} \right| d\sigma(t) + \int_{|t|>\nu} \left| \frac{(t+i)^{k+3}(t-i)^k}{t-\alpha} \right| d\sigma(t). \end{aligned}$$

Используя то, что для $\alpha \in W_\nu$ имеют место неравенства $|t-\alpha| \geq |\alpha| \cos \nu$, $|t-\alpha| \geq |t| \cos \nu$, получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t+i)^{k+3}(t-i)^k}{t-\alpha} d\sigma(t) \right| \\ & \leq \frac{1}{|\alpha| \cos \nu} \int_{-\nu}^{\nu} |(t^2+1)^{k+1}(t+i)| d\sigma(t) + \frac{1}{\cos \nu} \int_{|t|>\nu} |(t^2+1)^{k+1} \left(1 + \frac{i}{t}\right)| d\sigma(t). \end{aligned}$$

По теореме [3; гл. VI, п. 72] имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t^2+1)^{k+1} d\sigma(t) < \infty,$$

откуда и получаем нужный результат.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, Наука, М., 1986. [2] М. G. Kreĭn, H. Langer eng mit der Theorie hermitescher, *Math. Nachr.*, **77** (1977), 187–236. [3] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1966.

Е. В. Лопушанская

Воронежский государственный университет

E-mail: kate_lopushanskaya@yahoo.com

Поступило

16.11.2006