Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Савельев, Сообщение об игре на универсуме множеств, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 5, 797–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3727>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 03:44:12

Сообщение об игре на универсуме множеств

Д. И. Савельев

Мы работаем в теории множеств Цермело–Френкеля ZF без аксиомы регулярности AR; мы не используем аксиому выбора AC, исключая лишь один случай. Пусть ZF^- и ZFC^- – это ZF и ZFC без AR. Обозначения, общепринятые в теории множеств (см. [1]): V – универсум, т.е. класс всех множеств, On – класс всех ординалов, V_α – α -й уровень кумулятивной иерархии, tc – транзитивное замыкание, cf – конфинальность, и т.д. Пусть также V_∞ обозначает класс всех фундированных множеств и r – функцию ранга.

Предположим, что два игрока, I и II, начиная с данного множества x , пытаются так построить $\in$ -убывающую последовательность множеств x_n , чтобы противник не смог продолжить ее: вначале I выбирает $x_0 \in x$, затем II выбирает $x_1 \in x_0$, и т.д.; игрок *выигрывает*, если противник не может сделать никакого следующего хода, т.е. если он смог выбрать пустое множество. (Эту игру – но не наши результаты – можно найти в [2], где она рассматривается в теории Куайна NF (изложение содержит неточности); кроме того, близкая игра упоминается в [3].) Назовем множество *выигрышным*, если оно допускает выигрышную стратегию для некоторого игрока. Пусть W – класс всех выигрышных множеств, а W_I и W_{II} – классы множеств, выигрышных для I и II соответственно. Очевидно, $W_I \cup W_{II} = W$ и $W_I \cap W_{II} = \emptyset$. Класс W имеет естественную иерархию: пусть γ – ординал; назовем множество 2γ -*выигрышным*, если каждый его элемент является $(2\delta + 1)$ -выигрышным для некоторого $\delta < \gamma$, и $(2\gamma + 1)$ -*выигрышным*, если оно содержит 2γ -выигрышный элемент. Пусть W_ν – класс всех ν -выигрышных множеств. Очевидно, $W_0 = \{\emptyset\}$, $W_{2\gamma+1} = V \setminus \mathcal{P}(V \setminus W_{2\gamma})$, $W_{2\gamma} = \mathcal{P}(\bigcup_{\delta < \gamma} W_{2\delta+1})$ и $W = \bigcup_{\nu \in On} W_\nu$. Также $W_I = V \setminus \mathcal{P}(V \setminus W_{II}) = \bigcup_{\gamma \in On} W_{2\gamma+1}$ и $W_{II} = \mathcal{P}(W_I) = \bigcup_{\gamma \in On} W_{2\gamma}$. Пусть S_ν – ν -й уровень выигрышной иерархии: $S_\nu = W_\nu \setminus \bigcup_{\mu < \nu} W_\mu$. Очевидно, $W_{2\gamma} = \bigcup_{\delta \leq \gamma} S_{2\delta}$ и $W_{2\gamma+1} = \bigcup_{\delta \leq \gamma} S_{2\delta+1}$. Классы S_ν допускают рекуррентное определение:

$$S_{2\gamma+1} = \mathcal{P}\left(V \setminus \bigcup_{\delta < \gamma} S_{2\delta}\right) \setminus \mathcal{P}(V \setminus S_{2\gamma}),$$

$$S_{2\gamma} = \mathcal{P}\left(\bigcup_{\delta < \gamma} S_{2\delta+1}\right) \setminus \bigcup_{\varepsilon < \gamma} \mathcal{P}\left(\bigcup_{\delta < \varepsilon} S_{2\delta+1}\right).$$

Для $x \in W$ положим $w(x) = \min\{\nu : x \in S_\nu\}$. Если x непусто,

$$w(x) = \begin{cases} \min\{w(x_0) + 1 : x_0 \in x \cap W_{II}\}, & \text{если } x \in W_I, \\ \sup\{w(x_0) + 1 : x_0 \in x\}, & \text{если } x \in W_{II}. \end{cases}$$

ЛЕММА 1. S_ν непусты для всех ν .

Пусть HW – класс всех наследственно выигрышных множеств: $HW = \{x : tc(\{x\}) \subseteq W\}$.

ЛЕММА 2. Имеем $\mathcal{P}(W) \subseteq W$ и $\mathcal{P}(HW) = HW$.

ТЕОРЕМА 1. HW – внутренняя модель ZF^- . Более того, $HW \supseteq V_\infty$.

Какие из классов $V \supseteq W \supseteq HW \supseteq V_\infty$ могут не совпадать? Утверждение 1) леммы 3 говорит, что достаточно знать ответ для $V \supseteq HW$ и $HW \supseteq V_\infty$, а теорема 4 далее – что все четыре остающихся случая непротиворечивы.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 06-01-00608-а.

- ЛЕММА 3. 1) $V = W$ равносильно $W = HW$.
 2) Если $V \setminus W$ непуст, то $V \setminus W$ и $W \setminus HW$ собственные.
 3) Если $HW \setminus V_\infty$ непуст, то он собственный.
 4) AR равносильно $W = V_\infty$.

Как много ν -выигрышных фундированных множеств с данным ν имеют данный ранг? Пусть $S_{\alpha,\nu} = V_\alpha \cap S_\nu$, или рекуррентно

$$S_{\alpha+1,2\gamma+1} = \mathcal{P}\left(V_\alpha \setminus \bigcup_{\delta < \gamma} S_{\alpha,2\delta}\right) \setminus \mathcal{P}(V_\alpha \setminus S_{\alpha,2\gamma}),$$

$$S_{\alpha+1,2\gamma} = \mathcal{P}\left(\bigcup_{\delta < \gamma} S_{\alpha,2\delta+1}\right) \setminus \bigcup_{\varepsilon < \gamma} \mathcal{P}\left(\bigcup_{\delta < \varepsilon} S_{\alpha,2\delta+1}\right).$$

- ЛЕММА 4. 1) Для всех фундированных x выполнено $w(x) \leq r(x)$.
 2) $S_{\alpha,\nu}$ непуст, если и только если $\nu < \alpha$.
 3) $S_{\alpha+1,\nu} \setminus S_{\alpha,\nu}$ непуст, если и только если $0 = \nu = \alpha$ или $0 < \nu \leq \alpha$.
 4) $S_{\alpha,\nu} \in S_{\alpha+1,\nu+1} \setminus S_{\alpha,\nu+1}$, если и только если $0 = \nu < \alpha = 1$ или $0 < \nu < \alpha$.

ЛЕММА 5. Пусть в $s_{\alpha,\nu}$ всегда $\alpha > \nu$ и, кроме случая 1), $\nu > 0$. Тогда

- 1) (тривиальный случай) для всех α верно $|S_{\alpha,0}| = 1$;
 2) (конечный случай) для всех $m < \omega$ верно

$$|S_{m+1,2k+1}| = 2^{|V_m| - \sum_{j < k} |S_{m,2j}|} - 2^{|V_m| - \sum_{j \leq k} |S_{m,2j}|},$$

$$|S_{m+1,2k+2}| = 2^{\sum_{j \leq k} |S_{m,2j+1}|} - 2^{\sum_{j < k} |S_{m,2j+1}|};$$

- 3) (бесконечный случай) для всех $\alpha \geq \omega$ верно $|S_{\alpha,\nu}| = |V_\alpha|$ и $|S_{\alpha+1,\nu} \setminus S_{\alpha,\nu}| = |V_{\alpha+1}|$.

Это приводит к интересному вероятностному результату. Пусть

$$\Pr(S_{\omega,n}) = \lim_{m \rightarrow \omega} \frac{|S_{\omega,n} \cap V_m|}{|V_m|}.$$

Легкие вычисления показывают, что эти пределы существуют (и $\Pr$ порождает вероятность на V_ω); более того, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Имеем $\Pr(S_{\omega,1}) = \Pr(S_{\omega,3}) = 1/2$ (и $\Pr(S_{\omega,n}) = 0$ для прочих n).

То есть “половина” наследственно конечных фундированных множеств состоит из 1-выигрышных множеств, а другая “половина” – из множеств 3-, но не 1-выигрышных. Как следствие, игрок I почти всегда имеет выигрышную стратегию, причем может выиграть очень быстро: за 1 или 3 хода.

Насколько класс W похож на модель ZFC? Можно показать, что или $W = V$, или W не может быть моделью многих аксиом ZFC. Неожиданно, что AR не входит в их число: AR^W совместима с $\neg AR$. Пусть $\varsigma(C)$ означает “некоторое $x \in C$ не имеет $\in$ -минимальных элементов”.

- ЛЕММА 6. 1) $\neg AR^W$ равносильно $\varsigma(\mathcal{P}(W))$.
 2) $\neg AR^{HW}$ равносильно $\varsigma(HW)$.
 3) AR^{HW} равносильно $HW = V_\infty$.
 4) AR^W влечет AR^{HW} .

Для результатов о непротиворечивости мы предлагаем новую конструкцию нефундированных моделей (см. также [4]). Обычное построение (основанное на факторизации по бисимуляциям; см. [3], [5]–[7]) приводит к моделям, слишком “нерасслоенным” для нас. Наша конструкция больше напоминает кумулятивную иерархию: мы берем подходящий (M_0, E_0) в качестве начального уровня и применяем итерацию определенного

аналога операции $\mathcal{P}$. В полученной иерархии верхние уровни будут конечными расширениями нижних; интересующие нас свойства отражаются от нижних уровней и поэтому легко контролируемы. Скажем, что $v \in A$ *представляет* множество $y \subseteq A$ в (A, R) , если $y = \{u : u R v\}$, и что (A, R) *густой*, если для любого множества $y \subseteq A$ существует $v \in A$, представляющий y в (A, R) . Пусть $\mathcal{S}(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$ состоит из всех непустых подмножеств класса A , кроме представленных в (A, R) . Пусть $B \supseteq A$. (B, S) – *концевое расширение* (A, R) , если $S \cap (B \times A) = R$. (A, R) *отражает* формулу φ над (B, S) , если $\varphi^{A,R}(x, \dots) \leftrightarrow \varphi^{B,S}(x, \dots)$ для всех $x, \dots \in A$. Для данного (M_0, E_0) определяем (M_α, E_α) рекурсией по α :

$$\begin{aligned} M_{\alpha+1} &= M_\alpha \cup \mathcal{S}(M_\alpha), & E_{\alpha+1} &= E_\alpha \cup (\in \cap (M_\alpha \times \mathcal{S}(M_\alpha))), \\ M_\alpha &= \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta, & E_\alpha &= \bigcup_{\beta < \alpha} E_\beta, & \text{если } \alpha \text{ предельно,} \\ M &= \bigcup_{\alpha \in On} M_\alpha, & E &= \bigcup_{\alpha \in On} E_\alpha. \end{aligned}$$

В действительности, для нас важны (M_0, E_0) со свойствами (i)–(iv):

- (i) $\{u : u E_0 v\}$;
- (ii) $x \notin \text{tc}(y)$, если $x, y \in M_0$;
- (iii) $(M_0, E_0) \models$ “существует пустое множество”;
- (iv) $(M_0, E_0) \models$ аксиома экстенциональности.

ЛЕММА 7. Пусть (M_0, E_0) удовлетворяет (i), (ii). Тогда

- 1) (M, E) – концевое расширение каждого (M_α, E_α) ;
- 2) (M_0, E_0) отражает аксиому экстенциональности над (M, E) ;
- 3) если (M_0, E_0) удовлетворяет также (iii), то (M, E) густой;
- 4) (M_1, E_1) отражает $\varsigma(W_{2\gamma})$ и $\varsigma(W_{II})$ над (M, E) ;
- 5) (M_1, E_1) отражает AR^W над (M, E) ;
- 6) $(M, E) \models \varsigma(S_{2\gamma})$ влечет $(M_1, E_1) \models \varsigma(S_{2\delta})$ для некоторого $\delta \leq \gamma$.

Мы нуждаемся в 4)–6) только для результатов о выигрышности; согласно [8] для выполнения аксиом ZF^- достаточно иметь 1)–3).

ТЕОРЕМА 3. Если (M_0, E_0) удовлетворяет (i)–(iv), то (M, E) – модель ZF^- . Более того, это модель ZFC^- (если V – модель ZFC^-).

ТЕОРЕМА 4. Все непротиворечивые соотношения между V, W, HW, V_∞ и релятивизациями AR на них – это в точности следующие пять:

- 1) $V = W = HW = V_\infty + \text{AR} + \text{AR}^W + \text{AR}^{HW}$;
- 2) $V \neq W \neq HW = V_\infty + \neg \text{AR} + \text{AR}^W + \text{AR}^{HW}$;
- 3) $V \neq W \neq HW = V_\infty + \neg \text{AR} + \neg \text{AR}^W + \text{AR}^{HW}$;
- 4) $V = W = HW \neq V_\infty + \neg \text{AR} + \neg \text{AR}^W + \neg \text{AR}^{HW}$;
- 5) $V \neq W \neq HW \neq V_\infty + \neg \text{AR} + \neg \text{AR}^W + \neg \text{AR}^{HW}$.

Более тонкие результаты о $\varsigma(C)$ для различных $C \subseteq W$ следующие.

ЛЕММА 8. 1) $\varsigma(W_I)$ равносильно $\neg \text{AR}$.

2) $\varsigma(W_{II})$ влечет $\neg \text{AR}^W$.

3) $\neg \varsigma(W_{II})$ совместимо с $\neg \text{AR}^W$.

4) $\varsigma(W_{II})$ непротиворечиво.

5) $\neg \varsigma(\mathcal{P}(W_{II}))$.

ЛЕММА 9. 1) $\varsigma(S_\nu)$ влечет $\nu > 1$.

2) $\neg AR$ влечет $\varsigma(S_\nu)$ для всех нечетных $\nu > 1$.

3) Если μ четно, $\varsigma(S_\mu)$ влечет $\varsigma(S_\nu)$ для всех $\nu \geq \mu$.

4) Если μ предельно, $\varsigma(S_\mu)$ влечет $\varsigma(S_\nu)$ для некоторого $\nu \leq \mu$, $\text{cf } \nu = \omega$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $A \subseteq \text{On}$. Тогда $\{\nu : \varsigma(S_\nu)\} = A$ совместимо с ZFC^- в точности в одном из трех случаев:

1) A пусто;

2) $A = \{\nu > 1 : \nu \text{ нечетно}\}$;

3) $A = \{\nu > 1 : \nu \text{ нечетно или } \nu \geq \mu\}$ для некоторого μ , $\text{cf } \mu \leq \omega$.

Единственное применение AC – доказательство 4) леммы 9 (и, как следствие, 3) теоремы 5); мне неизвестно, можно ли его избежать. Результаты о непротиворечивости остаются верными при предположениях, не добавляющих новых выигрышных множеств, таких, как “все множества сильно экстенциональны” (см. [3], [6]), “не существует $\in$ -циклов”, “существуют наследственно невыигрышные множества любой структуры”, “любое множество без $\in$ -минимальных элементов имеет мощность больше любой данной”, и т.п. В целом, мы наблюдаем сильное различие нечетно- и четно-выигрышных множеств; последние более редки и причудливы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. J. Jech, *Set Theory*, The third millennium edition, revised and expanded, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003. [2] T. E. Forster, *Set Theory with a Universal Set*, Exploring an Untyped Universe, Oxford Logic Guides, **31**, The Clarendon Press, New York, 1995. [3] J. Barwise, L. Moss, *Vicious Circles*, On the Mathematics of Non-Wellfounded Phenomena, CSLI Lecture Notes, **60**, CSLI Publ., Stanford, CA, 1996. [4] D. I. Saveliev (to appear). [5] M. Forti, F. Honsell, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **10**:3 (1983), 493–522. [6] P. Aczel, *Non-Well-Founded Sets*, CSLI Lecture Notes, **14**, CSLI Publ., Stanford, CA, 1988. [7] G. D’Agostino, *Modal Logic and Non-Well-Founded Set Theory: Translation, Bisimulation, Interpolation*, Ph.D. Thesis, ILLC Diss. Ser., **4**, Institute for Logic, Language and Computation, Amsterdam, 1998. [8] L. Rieger, *Czechoslovak Math. J.*, **7** (82) (1957), 323–357.

Д. И. Савельев

Независимый московский университет, ВИНТИ

E-mail: saveliev@mccme.ru, denissaveliev@mail.ru

Поступило

12.05.2004

Исправленный вариант

21.12.2006