Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Шкаликов, Д.-Г. Бак, Мультипликаторы в дуальных соболевских пространствах и операторы Шрёдингера с потенциалами-распределениями, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 5, 643–651

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm373>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 08:25:39

УДК 517.983

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ В ДУАЛЬНЫХ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ И ОПЕРАТОРЫ ШРЁДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛАМИ-РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Дж.-Г. Бак, А. А. Шкаликов

В работе получены достаточные условия принадлежности функций-распределений пространству мультипликаторов из соболевского пространства $H_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$ в дуальное пространство $H_{p'}^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$. При $\alpha > n/p$ найден критерий, т.е. дано полное описание рассматриваемого пространства мультипликаторов. Полученные результаты применяются для определения операторов Шрёдингера с потенциалами-распределениями.

Библиография: 8 названий.

Целью этой статьи является изучение мультипликаторов из соболевского пространства $H_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$ в дуальное пространство $H_{p'}^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, где $\alpha \geq 0$, $p \geq 1$ и p, p' – сопряженные по Гёльдеру числа, т.е. $1/p + 1/p' = 1$.

Мультипликаторам в соболевских пространствах с неотрицательными индексами посвящена обширная литература. Подробности можно найти в книге Мазьи и Шапошниковой [1]. В недавней работе Нейман-заде и Шкаликова [2] было показано, что мультипликаторы из пространства Соболева $H_2^\alpha(\mathbb{R}^n)$ в $H_2^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ играют важную роль в теории операторов Шрёдингера. Там же, в [2], были получены эффективные достаточные условия принадлежности функций таким пространствам мультипликаторов. В этой работе мы получим полное описание пространства мультипликаторов из $H_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$ в $H_{p'}^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ (мы обозначаем его через M_p^α) при условии $\alpha > n/p$. В случае $\alpha \leq n/p$ мы получим теоремы вложения соболевских пространств с негативными индексами гладкости в пространства M_p^α (достаточные условия принадлежности к M_p^α).

Напомним, что пространства Соболева (или бесселевых потенциалов) $H_p^\alpha := H_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$ определяются как замыкание пространства основных функций D по норме

$$\|u\|_{\alpha, p} := \|\Lambda^\alpha u\|_{L_p},$$

где $\Lambda^\alpha = F^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{\alpha/2} F]$, а F – преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$.

Введем обозначение

$$H_{p, \text{loc}}^\alpha(\mathbb{R}^n) = \{v \in D' : v(x)\varphi(x) \in H_p^\alpha \quad \forall \varphi \in D\},$$

Работа первого автора выполнена при поддержке фонда KOSEF (Korea Science and Engineering Foundation), грант № 1999-2-102-003-5. Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00691.

где D' – пространство распределений на D . Функцию $\mu(x) \in H_{p', \text{loc}}^{-\alpha}$ назовем *мультипликатором* из H_p^α в $H_{p'}^{-\alpha}$, если

$$\|\mu(x)\varphi(x)\|_{-\alpha, p'} \leq C\|\varphi\|_{\alpha, p} \quad \forall \varphi \in D, \quad (1)$$

где через C обозначается (здесь и в дальнейшем) константа, не зависящая от $\varphi \in D$.

В этом определении предполагается, что $\varphi \in D$ (вместо $\varphi \in H_p^\alpha$), поскольку при $\mu(x) \in H_{p', \text{loc}}^{-\alpha}$ произведение $\mu(x)\varphi(x)$ определено в D' лишь для бесконечно гладких φ . Однако D плотно в H_p^α , поэтому из оценки (1) для $\varphi \in D$ следует, что оператор умножения на функцию $\mu(x)$ может быть продолжен на все H_p^α как ограниченный оператор из H_p^α в $H_{p'}^{-\alpha}$. Очевидно, функции $\mu(x)$, удовлетворяющие неравенству (1), образуют банахово пространство, которое мы обозначим через $M[H_p^\alpha \rightarrow H_{p'}^{-\alpha}]$, или более кратко M_p^α . Норма в этом пространстве определяется как

$$\|\mu\|_{M_p^\alpha} = \inf C,$$

где нижняя грань берется по всем константам C , для которых выполнено неравенство (1).

Вначале зададимся вопросом: для каких индексов $\gamma \leq \alpha$, $r \geq 1$ имеет место непрерывное вложение с оценкой нормы

$$H_r^{-\gamma} \in M[H_p^\alpha \rightarrow H_{p'}^{-\alpha}], \quad \|\mu\|_{M_p^\alpha} \leq C\|\mu\|_{-\gamma, r} \quad (2)$$

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Вложение (2) с оценкой норм имеет место тогда и только тогда, когда выполняется мультипликативная оценка*

$$\|\varphi(x)\psi(x)\|_{\gamma, r'} \leq C\|\varphi\|_{\alpha, p}\|\psi\|_{\alpha, p} \quad \forall \varphi, \psi \in D, \quad (3)$$

где число $1 \leq r' \leq \infty$ определяется из условия сопряжения $1/r + 1/r' = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть $\mu(x) \in H_r^{-\gamma}$ и выполнена оценка (3). Тогда для всех $\varphi, \psi \in D$ имеем

$$\begin{aligned} \|\mu\varphi\|_{-\alpha, p'} &= \sup_{0 \neq \psi \in H_p^\alpha} \frac{|(\mu\varphi, \psi)|}{\|\psi\|_{\alpha, p}} = \sup_{0 \neq \psi \in H_p^\alpha} \frac{|(\mu, \bar{\varphi}\psi)|}{\|\psi\|_{\alpha, p}} \\ &\leq \sup_{0 \neq \psi \in H_p^\alpha} \frac{\|\mu\|_{-\gamma, r}\|\bar{\varphi}\psi\|_{\gamma, r'}}{\|\psi\|_{\alpha, p}} \leq C\|\mu\|_{-\gamma, r}\|\varphi\|_{\alpha, p}, \end{aligned}$$

где константа C та же, что и в (3). По определению получаем $\mu \in M_p^\alpha$ и $\|\mu\|_{M_p^\alpha} \leq C\|\mu\|_{-\gamma, r}$.

Необходимость. Пусть справедливо вложение (2) с оценкой норм. Тогда для $\varphi, \psi \in D$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|\varphi\psi\|_{\gamma, r'} &= \sup_{f \in H_r^{-\gamma}} \frac{|(f, \varphi\psi)|}{\|f\|_{-\gamma, r}} \leq \sup_{\mu \in M_p^\alpha} \frac{|(\mu\bar{\varphi}, \psi)|}{C^{-1}\|\mu\|_{M_p^\alpha}} \\ &\leq \sup_{\mu \in M_p^\alpha} \frac{\|\mu\bar{\varphi}\|_{-\alpha, p'}\|\psi\|_{\alpha, p}}{C^{-1}\|\mu\|_{M_p^\alpha}} \leq C\|\varphi\|_{\alpha, p}\|\psi\|_{\alpha, p}, \end{aligned}$$

причем для получения последнего неравенства мы использовали оценку (1) с $C = \|\mu\|_{M_p^\alpha}$. Следовательно, выполнена оценка (2), и доказательство завершено.

Выберем неотрицательную функцию $\eta(x) \in D$ такую, что $\eta(x) \equiv 1$ при $|x| \leq 1$. Введем пространство $H_{p,\text{unif}}^\alpha$ (см. [1, п. 1.3.1]), состоящее из функций $u(x) \in H_{p,\text{loc}}^\alpha$ таких, что

$$\|u\|_{\alpha,p,\text{unif}} := \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \|\eta(x-z)u(x)\|_{\alpha,p} < \infty.$$

Норма в пространстве $H_{p,\text{unif}}^\alpha$ зависит от выбора неотрицательной пробной функции $\eta(x)$, но для всех таких функций соответствующие нормы эквивалентны.

Если $\mu(x) \in M_p^\alpha$, то и $\eta(x)\mu(x) \in M_p^\alpha$. Введем новую норму в M_p^α :

$$\|\mu\|_{M_p^\alpha} = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \|\eta(x-z)\mu(x)\|_{M_p^\alpha}.$$

Приведенная ниже теорема известна для мультипликаторов в соболевских пространствах с неотрицательными индексами (см. [1, п. 2.1.3]). Здесь мы предлагаем независимое доказательство применительно к нашему случаю.

ТЕОРЕМА 2. *Нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_{M_p^\alpha}$ эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство

$$\|\mu\|_{M_p^\alpha} \leq C \|\mu\|_{M_p^\alpha}$$

следует из определения. Для доказательства обратной оценки нам потребуется известная лемма о разбиении единицы (см., например, [3, §1.4]). Согласно этой лемме существует набор функций $\{\chi_j(x)\}_{j=1}^\infty$, удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) $\chi_j(x) \in D$, $0 \leq \chi_j(x) \leq 1$ и $\sum_{j=1}^\infty \chi_j(x) \equiv 1$;
- (ii) носители функций χ_j содержатся в шарах радиуса 1 (с различными центрами), при этом любая фиксированная точка $x \in \mathbb{R}^n$ покрывается носителями не более чем N функций (т.е. $\chi_j(x) \neq 0$ не более чем для N функций и N не зависит от x);
- (iii) $|D^\ell \chi_j(x)| \leq C$, где C зависит лишь от мультииндекса $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$.

Пусть семейство $\{\chi_j\}_1^\infty$ обладает этими свойствами. Тогда

$$\sum_{j=1}^\infty \|\varphi \chi_j\|_{\alpha,p} \leq C \|\varphi\|_{\alpha,p}, \quad \varphi \in D,$$

где C зависит только от α, p и от выбора $\{\chi_j\}_1^\infty$. Поскольку при всех j носитель χ_j содержится в шаре радиуса 1, а $\eta(x) = 1$ при $|x| \leq 1$, то существуют $z_j \in \mathbb{R}^n$ такие, что $\chi_j(x) = \eta(x - z_j)\chi_j(x)$. Обозначая $\varphi_j(x) = \chi_j(x)\varphi(x)$ для $\varphi \in D$, получаем

$$\|\mu\varphi\|_{-\alpha,p'} = \left\| \sum_{j=1}^\infty \eta(x - z_j)\mu(x)\varphi_j(x) \right\|_{-\alpha,p'} \leq \|\mu\|_{M_p^\alpha} \sum_{j=1}^\infty \|\varphi_j\|_{\alpha,p} \leq C \|\mu\|_{M_p^\alpha} \|\varphi\|_{\alpha,p}.$$

Теперь из определения следует, что

$$\|\mu\|_{M_p^\alpha} \leq C \|\mu\|_{\alpha,p}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Верны следующие утверждения:

1) для всех $\alpha \geq 0$ и $p \geq 1$ справедливы вложения с оценками норм

$$M_p^\alpha \subset H_{p', \text{unif}}^{-\alpha}, \quad \|\mu\|_{-\alpha, p', \text{unif}} \leq C \|\mu\|_{M_p^\alpha}; \quad (4)$$

2) вложение с оценкой норм

$$H_{r, \text{unif}}^{-\gamma} \subset M_p^\alpha, \quad \|\mu\|_{M_p^\alpha} \leq C \|\mu\|_{-\gamma, r, \text{unif}} \quad (5)$$

справедливо тогда и только тогда, когда выполняется неравенство (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из определения. Действительно, если $\mu(x) \in M_p^\alpha$ и $\eta(x)$ — гладкая срезающая функция, то

$$\|\mu(x)\eta(x-z)\|_{-\alpha, p'} \leq \|\mu\|_{M_p^\alpha} \|\eta(x-z)\|_{\alpha, p} = \|\mu\|_{M_p^\alpha} \|\eta(x)\|_{\alpha, p} = C \|\mu\|_{M_p^\alpha},$$

где $C = \|\eta(x)\|_{\alpha, p}$ не зависит от z . Поэтому $\mu \in H_{p', \text{unif}}^{-\alpha}$ и верна оценка (4).

Второе утверждение является следствием теорем 1 и 2. Очевидно, пространство $H_r^{-\gamma}$ непрерывно вложено в $H_{r, \text{unif}}^{-\gamma}$. Поэтому согласно теореме 1 оценка (5) влечет (3). Обратно, если выполнена оценка (3) и $\mu \in H_{r, \text{unif}}^{-\gamma}$, то $\mu(x)\eta(x-z) \in H_r^{-\gamma} \subset M_p^\alpha$ и

$$\|\mu(x)\eta(x-z)\|_{M_p^\alpha} \leq C \|\mu(x)\eta(x-z)\|_{-\gamma, r}.$$

Таким образом, $\|\mu\|_{M_p^\alpha} \leq C \|\mu\|_{-\gamma, r, \text{unif}}$ и (5) вытекает из теоремы 2. Теорема доказана.

Согласно теореме Стрихардса (см. [4] или [1, п. 2.2.9]) пространство мультипликаторов $M[H_p^\alpha \rightarrow H_p^\alpha]$ совпадает с $H_{p, \text{unif}}^\alpha$, если выполнено условие $\alpha > n/p$. Полученное ниже утверждение можно считать аналогом этой теоремы для мультипликаторов в дуальных пространствах.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha > n/p$. Тогда пространства $M[H_p^\alpha \rightarrow H_{p'}^{-\alpha}]$ и $H_{p', \text{unif}}^{-\alpha}$ совпадают и нормы в этих пространствах эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно первому утверждению теоремы 3 вложение $M_p^\alpha \subset H_{p', \text{unif}}^{-\alpha}$ с оценкой норм верно для всех $\alpha \geq 0$ и $p \geq 1$. Чтобы доказать обратное включение, в соответствии со вторым утверждением теоремы 3 достаточно проверить неравенство (3) с $\gamma = \alpha$ и $r' = p$. Но для этих значений индексов оценка (3) следует из того факта, что H_p^α является алгеброй при $\alpha > n/p$ (см. [1, § 1.7]). Теорема доказана.

В случае $\alpha \leq n/p$ дать описание пространства M_p^α в терминах пространств Соболева уже невозможно. По аналогии с теорией мультипликаторов в соболевских пространствах с неотрицательными индексами гладкости такое описание можно провести в терминах емкости, хотя это требует дополнительной серьезной работы (см. результаты Вербицкого в [1]). Однако проверка условий в терминах емкостей трудно осуществима, поэтому полезно иметь эффективные достаточные условия принадлежности функций рассматриваемым пространствам мультипликаторов. Нам удалось найти точные условия на индексы γ и r , при которых справедливо вложение $H_{r, \text{unif}}^{-\gamma} \subset M_p^\alpha$ вместе с оценкой норм. Здесь мы приведем две теоремы такого типа. Результат первой из них важен лишь при $\alpha = n/p$ поскольку при $\alpha < n/p$, более точное утверждение дает вторая из этих теорем.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $p > 1$ и $\max\{0, (2-p)n/p\} < \alpha \leq n/p$. Тогда справедливо вложение $H_{r,\text{unif}}^{-\gamma} \subset M_p^\alpha$ вместе с оценкой норм, если числа γ и r подчинены условиям

$$-2\left(\frac{n}{p} - \alpha\right) \leq \gamma \leq \alpha \quad \text{и} \quad r > \frac{pn}{p(n+2\alpha-\gamma)-2n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать это утверждение при $\gamma = \alpha$. Действительно, предположим, что доказано вложение $H_{r_1}^\alpha \subset M_p^\alpha$ вместе с оценкой норм при $r_1 > pn/(p(n+\alpha)-2n)$. В силу теоремы Соболева $H_r^\gamma \subset H_{r_1}^\alpha$, если $1/r - 1/r_1 = \alpha - \gamma \geq 0$. Следовательно, $H_r^\gamma \subset M_p^\alpha$, если $r = r_1/(1+r_1(\alpha-\gamma))$, т.е. если $r > pn/(p(n+2\alpha-\gamma)-2n)$. Здесь число γ ($\gamma \leq \alpha$) можно выбрать любым, лишь бы выполнялось условие $r > 1$. Это приводит к условию $\gamma > -2(n/p - \alpha)$.

Итак, пусть $\gamma = \alpha$. Положим $\nu = n/p + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и запишем следующие неравенства:

$$\|\varphi\psi\|_{\nu,p} \leq C\|\varphi\|_{\nu,p}\|\psi\|_{\nu,p}, \quad \|\varphi\psi\|_{0,p/2} \leq \|\varphi\|_{0,p}\|\psi\|_{0,p}.$$

Первое из неравенств следует из того, что H_p^ν при $\nu > n/p$ есть алгебра (теорема Стрихардса), а второе есть обычное неравенство Гёльдера. Теперь используя полилинейную интерполяционную теорему (см., например, [5, § 4.4]), мы приходим к неравенству

$$\|\varphi\psi\|_{\alpha,s} \leq C\|\varphi\|_{\alpha,p}\|\psi\|_{\alpha,p}$$

для

$$0 \leq \alpha \leq \nu, \quad s = \frac{p(n+\varepsilon)}{2n-\alpha p+2p\varepsilon}, \quad s' = \frac{p(n+\varepsilon)}{pn+\alpha p-2n-p\varepsilon}.$$

Здесь мы обращаем внимание, что в случае $1 \leq p < 2$ в пространствах $H_{p/2}^0 = L_{p/2}$ нет обычной нормы, их можно оснастить лишь квазинормой. Однако использованная нами интерполяционная теорема справедлива и для квазинормированных пространств (см. [5, § 3.10]). По условию теоремы $(2-p)n/p < \alpha \leq n/p$, что влечет $s, s' > 1$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Для завершения доказательства надо выбрать ε таким, чтобы $s' = r$, а затем воспользоваться теоремами 1 и 3.

В случае $\alpha = n/p$ результат нельзя улучшить, заменив неравенство для r на соответствующее равенство (т.е. положить $\varepsilon = 0$). Однако это можно сделать при $\alpha < n/p$. Доказательство этого факта требует более глубокого анализа. Отметим, что при целом α доказательство можно провести значительно проще (см. [2]).

ТЕОРЕМА 6. Пусть $p > 1$ и $\max\{0, (2-p)n/p\} < \alpha < n/p$. Тогда справедливо вложение $H_{r,\text{unif}}^{-\gamma} \subset M_p^\alpha$ вместе с оценкой норм, если числа γ, r подчинены условиям

$$-2\left(\frac{n}{p} - \alpha\right) \leq \gamma \leq \alpha \quad \text{и} \quad r \geq \frac{pn}{p(n+2\alpha-\gamma)-2n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в предыдущей теореме, можно ограничиться случаем $\gamma = \alpha$, причем утверждение нужно доказать только для $r = pn/(p(n + \alpha) - 2n)$. Согласно теореме 3 нужно доказать оценку

$$\|\varphi\psi\|_{\alpha,s} \leq C \|\varphi\|_{\alpha,p} \|\psi\|_{\alpha,p} \quad \forall \varphi, \psi \in D, \quad (6)$$

где $s = pn/(2n - \alpha p) > 1$. Для доказательства этой оценки мы будем использовать методы, развитые в статье Полкинга [6].

Рассмотрим нелинейный оператор

$$D_{\rho,q}^\eta u(x) = \int_0^\infty \left(\int_{B_1} |u(x + \xi y) - u(x)|^\rho dy \right)^{q/\rho} \xi^{-1-\eta q} d\xi,$$

где $\eta > 0$, $\rho \geq 1$, $q \geq 2$. Нам потребуются следующие утверждения, доказанные в работах Полкинга [6] и Стрихардса [4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А (см. [6]). Пусть $0 < \gamma < 1$, $1 \leq \rho \leq q$, $2 \leq q < \infty$, $r > \max\{1, nr/(n + \gamma r)\}$. Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\|D_{\rho,q}^\eta u(x)\|_{0,r} \leq C \|u(x)\|_{\eta,r}, \quad u \in H_r^\eta,$$

где константа C зависит от η, ρ, q, r, n , но не зависит от $u(x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ В (см. [6]). Пусть $1/\rho_1 + 1/\rho_2 = 1/\rho$, $1/q_1 + 1/q_2 = 1/q$ и $\eta_1 + \eta_2 = \eta$. Тогда для всех $u \in L_{\rho_1, \text{loc}}$ и $v \in L_{\rho_2, \text{loc}}$ выполнено неравенство

$$|D_{\rho,q}^\eta(uv)(x)| \leq |u(x)D_{\rho,q}^\eta v(x)| + |v(x)D_{\rho,q}^\eta u(x)| + |D_{\rho_1,q_1}^{\eta_1} u(x)D_{\rho_2,q_2}^{\eta_2} v(x)|.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ С (см. [6], [4]). Имеет место следующее соотношение:

$$\|v\|_{\eta,p} \asymp \|D_{1,2}^\eta v\|_{0,p} + \|v\|_{0,p}, \quad p \geq 1, \quad \eta > 0, \quad v(x) \in H_p^\eta,$$

где символ $\asymp$ обозначает эквивалентность (т.е. отношение правой и левой частей ограничено с обеих сторон константами, не зависящими от $v(x)$).

Используя эти утверждения, докажем оценку (6) для $s = pn/(2n - \alpha p)$. Положим $\alpha = [\alpha] + \eta$, где $[\alpha]$ обозначает целую часть α и $0 \leq \eta < 1$. Будем предполагать, что $\eta > 0$ (для $\eta = 0$ доказательство проще и может быть получено при помощи обычной формулы Лейбница). Хорошо известно следующее соотношение (см., например, [7]):

$$\|\varphi\psi\|_{\alpha,s} \asymp \sum_{|\ell| \leq [\alpha]} \|D^\ell(\varphi\psi)\|_{\eta,s}.$$

Согласно предложению С правая часть оценивается сверху величиной (в дальнейшем в оценках мы опускаем константы)

$$\sum_{|j|+|m| \leq [\alpha]} (\|D_{1,2}^\eta(D^j \varphi D^m \psi)\|_{0,s} + \|D^j \varphi D^m \psi\|_{0,s}).$$

Это выражение может быть оценено сверху с учетом предложения В следующей величиной (мы будем оценивать только первое слагаемое, второе оценивается существенно проще):

$$\sum_{|j|+|m|\leq[\alpha]} (\|D^m \psi D_{1,2}^\eta (D^j \varphi)\|_{0,s} + \|D^j \varphi D_{1,2}^\eta (D^m \psi)\|_{0,s} + \|(D_{\rho_1,q_1}^{\eta_1} D^j \varphi)(D_{\rho_2,q_2}^{\eta_2} D^m \psi)\|_{0,s}). \quad (7)$$

Теперь выберем подходящим образом числа η_1, ρ_1, q_1 . Положим

$$0 < \eta_1 < \max\left\{\eta, \frac{n}{p} - \alpha\right\}, \quad \eta_2 = \eta - \eta_1, \quad (8)$$

$$\rho_1 = \frac{n}{|j| + \eta_1}, \quad \rho_2 = \frac{n}{n - |j| - \eta_1}, \quad q_1 = 2\rho_1, \quad q_2 = 2\rho_2. \quad (9)$$

Так как $|j| + \eta_1 < \alpha$, то $\rho_1, \rho_2 > 1$ и $1/\rho_1 + 1/\rho_2 = 1$.

Оценим третье слагаемое в (7). Положим

$$r = \frac{2n - \alpha p}{n + (|j| + \eta_1 - \alpha)p}, \quad r' = \frac{2n - \alpha p}{n - (|j| + \eta_1)p}.$$

Очевидно, $r, r' > 0$, $1/r + 1/r' = 1$, поэтому $r, r' > 1$. С помощью неравенства Гёльдера третье слагаемое в (7) оценивается выражением

$$(\|D_{\rho_1,2\rho_1}^{\eta_1} D^j \varphi\|_{0,rs}) (\|D_{\rho_2,2\rho_2}^{\eta_2} D^m \psi\|_{0,r's}).$$

Согласно предложению А последнее выражение можно оценить величиной

$$\|D^j \varphi\|_{\eta_1,rs} \|D^m \psi\|_{\eta_2,r's}, \quad (10)$$

если только выполнены условия

$$rs > 1, \quad rs > \frac{n\rho_1}{n + \eta_1\rho_1}, \quad r's > 1, \quad r's > \frac{n\rho_2}{n + \eta_2\rho_2}.$$

Проверим справедливость этих условий. Используя (8) и (9), получаем

$$rs = \frac{pn}{n - p(\alpha - |j| - \eta_1)} > \frac{pn}{n} = p > 1, \quad (11)$$

поскольку $\alpha > |j| + \eta_1$;

$$\begin{aligned} rs &= \frac{n}{(n/p - \alpha) + |j| + \eta_1} > \frac{n}{|j| + 2\eta_1} = \frac{n}{n/\rho_1 + \eta_1} = \frac{n\rho_1}{n + \eta_1\rho_1}; \\ r's &= \frac{n\rho}{n - (|j| + \eta_1)p} > p > 1; \\ r's &= \frac{n}{n/\rho - |j| - \eta_1} > \frac{n}{r/\rho - |j| - \eta_1 + (n - n/p)} = \frac{n}{n/\rho_2 + \eta_2} = \frac{n\rho_2}{n + \eta_2\rho_2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее, выражение (10) оценивается величиной

$$\|\varphi\|_{|j|+\eta_1,rs}\|\psi\|_{|m|+\eta_2,r's} \leq C\|\varphi\|_{\alpha,p}\|\psi\|_{\alpha,p}.$$

Последняя оценка получается из теоремы вложения Соболева с учетом неравенств

$$|j| + \eta_1 - \frac{n}{p} \leq \alpha - \frac{n}{rs}, \quad |m| + \eta_2 - \frac{n}{p} \leq \alpha - \frac{n}{r's}.$$

Первое из этих неравенств следует из (11) и условия $|j| + \eta_1 < \alpha$, а второе – из (12) и условия $|m| + \eta_2 < \alpha$.

Оценки первого и второго слагаемого в (7) могут быть получены таким же образом, полагая $\eta_1 = \eta$, $\eta_2 = 0$ для первого слагаемого и $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = \eta$ для второго. Теорема доказана.

Применение полученных результатов к эллиптическим операторам общего вида мы оставляем за пределами этой работы. Здесь дадим лишь достаточное условие на потенциал-распределение $q(x)$, гарантирующее корректность определения соответствующего оператора Шрёдингера

$$\mathcal{L}u(x) = (-\Delta + q(x))u(x) \quad (13)$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Этот результат дополняет полученные ранее результаты [2] и [8].

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\eta(x)$ – гладкая, неотрицательная функция с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$, не обращающаяся тождественно в нуль. Пусть функция-распределение $q(x)$ удовлетворяет условию:

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow \infty} \|q(x)\eta(x-z)\|_{-1,2} &= 0, & \text{если } n = 1; \\ \lim_{|z| \rightarrow \infty} \|q(x)\eta(x-z)\|_{-1,2+\varepsilon} &= 0 & \text{при некотором } \varepsilon > 0, \text{ если } n = 2; \\ \lim_{|z| \rightarrow \infty} \|q(x)\eta(x-z)\|_{-1,n} &= 0, & \text{если } n \geq 3. \end{aligned}$$

Тогда оператор (13) корректно определен как оператор в пространстве $H_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$ с областью определения $H_2^1(\mathbb{R}^n)$, а его резольвентное множество непусто. Более того, спектр $\mathcal{L}$ лежит в произвольно малом секторе $|\arg(\lambda + \lambda_0)| < \varepsilon$, если $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon)$ достаточно большое число. Если функция $q(x)$ вещественна, то $\mathcal{L}$ является самосопряженным оператором в пространстве $H_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = H_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$. Сужение оператора $\mathcal{L}$ на область

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{u(x) \in H_2^1 \mid -\Delta u(x) + q(x)u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)\}$$

является самосопряженным полуограниченным оператором в L_2 , причем область определения квадратного корня $(\mathcal{L} + \mu)^{1/2}$ (при достаточно больших μ) совпадает с $H_2^1(\mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, например, случай $n = 1$ (ср. [2], [8]). Условие теоремы влечет возможность представления $q(x) = q_0(x) + q_\varepsilon(x)$, где $q_0(x)$ – функция с финитным носителем в пространстве H_2^{-1} , а $\|q_\varepsilon(x)\|_{-1,2,\text{unif}} < \varepsilon$. Тогда согласно теореме 3 норма функции $q_\varepsilon(x)$ в пространстве M_2^1 не превышает величины $C\varepsilon$. С учетом теоремы 4 легко заметить, что оператор умножения на $q_0(x)$ является компактным мультипликатором в M_2^1 , а потому из указанного представления имеем оценку

$$\|q(x)u(x)\|_{-1,2} \leq \varepsilon_1 \|u(x)\|_{1,2} + C \|u(x)\|_{0,2},$$

где число $\varepsilon_1 > 0$ можно выбрать произвольно малым, в частности, меньшим 1. Теперь оператор $\mathcal{L}$ можно корректно определить в $H_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$ методом квадратичных форм, причем все другие утверждения теоремы получаются с помощью средств этого метода (см. подробности в [2]).

Результаты этой заметки сообщались авторами в Postech и Seoul National университетах (январь 2001 года), на семинарах в Московском университете (февраль 2001 года) и на конференции по теории операторов в Центре Банаха (Варшава, июль–август 2001 года).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мазья В. Г., Шапошникова Т. О. Теория мультипликаторов в пространствах дифференцируемых функций: Изд-во Ленинградского ун-та, 1986.
- [2] Нейман-заде М. И., Шкалик А. А. Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 4. С. 599–609.
- [3] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.1: Теория распределений и Фурье анализ.. М.: Мир, 1990.
- [4] Strichartz R. S. Multipliers in fractional Sobolev spaces // J. Math. Mech. 1967. V. 16. P. 1031–1060.
- [5] Bergh J., Löfström J. Interpolation Spaces // Grund. der math. Wiss. V. 223. Berlin: Springer Verlag, 1976.
- [6] Polking J. C. A Leibniz formula for some differential operators of fractional order // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 27. P. 1019–1029.
- [7] Stein E. M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton: Princeton Univ. Press, 1970.
- [8] Савчук А. М., Шкалик А. А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. 1999. Т. 64. № 6. С. 897–912.

(Дж.-Г. Бак) Postech University in South Korea

Поступило

(А. А. Шкалик) Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

30.10.2001

E-mail: bak@postech.ac.kr, shkal@mech.math.msu.su