Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Дубовицкая, О группе Брауэра двумерного локального поля, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 6, 838–841

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3733>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:47:46

О группе Брауэра двумерного локального поля

М. А. Дубовицкая

Рассмотрено двумерное локальное поле $K = F_q((u))((t))$, $\text{char } K = p$, и его группа Брауэра $\text{Br}(K)$. Доказано, что если $L = K(x)$ – расширение поля, где $x^p - x = ut^{-p} =: h$, то условия $(y, f | h)_K = 0$ для всех $y \in K$ и $f \in \text{Im}(\text{Nm}(L^*))$ эквивалентны.

Библиография: 3 названия.

Рассмотрим двумерное локальное поле $K = F_q((u))((t))$, где $q = p^l$, p – простое число, и его группу Брауэра $\text{Br}(K)$. В [1] описана группа Брауэра n -мерного локального поля $F_q((t_1)) \dots ((t_n))$. Основным результатом [1] является теорема, которая при $n = 2$ формулируется следующим образом.

Существует невырожденное спаривание группы Брауэра поля K и его мультипликативной группы $(\cdot, \cdot)_K: K^ \times \text{Br}(K) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

Если L – конечное сепарабельное расширение поля K , то справедливы соотношения:

1. $(f, g)_L = (\text{Nm}(f), g)_K$, где $f \in L^*$, $g \in \text{Br}(K)$, $\text{Nm}: L^* \rightarrow K^*$ – норменное отображение;
2. $(f, g)_L = (f, \text{Cor}(g))_K$, где $f \in K^*$, $g \in \text{Br}(L)$, $\text{Cor}: \text{Br}(L) \rightarrow \text{Br}(K)$ – отображение коограничения.

Доказательство теоремы состоит из трех частей:

- 1) построение спаривания;
- 2) доказательство функториальных свойств 1 и 2;
- 3) проверка невырожденного спаривания.

При этом показано, что проверка невырожденности сводится к проверке следующего утверждения.

Пусть $y, f, h \in K^$, $h = ut^{-p}$. Пусть $L = K(x)$, где x определяется из соотношения $x^p - x = h$, $G = \text{Gal}(L/K)$, $\text{Nm}: L^* \rightarrow K^*$ – норменное отображение. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- 1) $(y, f | h)_K = 0$ для всех $y \in K^*$, где $(\cdot, \cdot | \cdot)_K$ – вычет из теории Артина–Шрейера [2];
- 2) $f \in \text{Im}(\text{Nm}(L^*))$.

Данная работа посвящена доказательству этого утверждения, которое отсутствует в [1].

Введем стандартные обозначения: $\bar{K} = F_q((u))$ – поле вычетов, $\wp_{\bar{K}}, \wp_K, \wp_{\bar{L}}, \wp_L$ – максимальные идеалы соответственно колец

$$O_{\bar{K}} = F_q[[u]], \quad O_K = F_q((u))[[t]], \quad O_{\bar{L}} = F_q[[w]], \quad O_L = F_q((w))[[t]];$$

$U_{\bar{K}}^n = 1 + \wp_{\bar{K}}^n = \{1 + \alpha_n u^n + \alpha_{n+1} u^{n+1} + \dots\}$, $U_K^n = 1 + \wp_K^n$; аналогично определяют $U_{\bar{L}}^n$ и U_L^n .

Вычислим образ норменного отображения $\text{Im}(\text{Nm}(L^*))$, затем аннулятор спаривания $(\cdot, \cdot | h)_K$ и покажем, что они совпадают.

I. Для первого вычисления нам потребуется известное разложение мультипликативной группы $K^* = \{u\} \times \{t\} \times F_q^* \times U_{\bar{K}} \times U_K$. Взяв $w = xt$, легко получить, что $L = F_q((w))((t))$, а следовательно, $L^* = \{w\} \times \{t\} \times F_q^* \times U_{\bar{L}} \times U_L$, благодаря чему $\text{Im}(\text{Nm}(L^*))$ можно считать покомпонентно. Группа Галуа G циклическая, $G = \langle \sigma \rangle_p = \{1, \sigma, \dots, \sigma^{p-1}\}$, поэтому непосредственно из определения получаем, что $\text{Nm}(t) = t^p$ и $\text{Nm}(F_q^*) = F_q^*$. Тогда $\text{Nm}(x)$ находится через минимальный многочлен x $P(z) = z^p - z - h = 0$. Откуда $\text{Nm}(w) = u$.

Очевидно, что $\sigma^i(w^k) = (w + it)^k = w^k \pmod{\wp_L}$, тогда для

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k w^k \in U_{\bar{L}}$$

верно, что $\sigma^i(y) = y + a_i$, $a_i \in \wp_L$. Тогда $\text{Nm}(y) = y^p \pmod{\wp_L}$. В качестве образующих $U_{\bar{L}}$ можно взять элементы вида $y = 1 + \alpha w^k$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in F_q^*$, и для них $\text{Nm}(y) = 1 + \alpha^p u^k \pmod{\wp_L}$, поэтому в образе нормы лежит вся $U_{\bar{K}}$.

Для вычисления образа $\text{Im}(\text{Nm}(U_L))$ нам потребуется формула Хассе [3]. Пусть $y \in \wp_L^n$. Тогда

$$\text{Nm}(1 + y) = 1 + \text{Tr}(y) + \text{Nm}(y) \pmod{\text{Tr}(\wp_L^{2n})}.$$

Так как $\wp_L^n$ порождается элементами bt^k , $k \geq n$, $b \in \bar{L}$, а

$$\bar{L} = \bar{K} \otimes \bar{K}_w \otimes \dots \otimes \bar{K}_w^{p-1},$$

то можно считать, что образующие $\wp_L^n$ суть $aw^i u^j t^k$, $a \in F_q$, $i = 0, \dots, p-1$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \geq n$. Очевидно, $\text{Tr}(aw^i u^j t^k) = aw^j t^k \text{Tr}(w^i)$. Минимальный многочлен w :

$$w^p - t^{p-1}w - u = \prod_{i=0}^{p-1} (w - w_i) = 0.$$

Тогда $\text{Tr}(w^i)$ находится с помощью элементарных симметрических многочленов

$$S_i(w) = \sum_{0 \leq a_1 < \dots < a_i \leq p-1} w_{a_1} \dots w_{a_i}, \quad i = 0, \dots, p-1$$

и многочленов $N_k(w) = \sum_{i=0}^{p-1} w_i^k$.

Известно, что $N_k(w)$ и $S_i(w)$ связаны соотношением

$$N_k - N_{k-1}S_1 + N_{k-2}S_2 - \dots + (-1)^{k-1}N_1S_{k-1} + (-1)^k k S_k = 0 \quad \forall k \leq p.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в минимальном многочлене и применяя эту формулу, получаем, что

$$\mathrm{Tr}(w^{p-1}) = -t^{p-1} \quad \text{и} \quad \mathrm{Tr}(w^i) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq i \leq p-2.$$

Откуда вытекает

ЛЕММА 1. *Имеет место равенство $\mathrm{Tr}(\wp_L^n) = \wp_K^{n+p-1}$.*

Далее мы применим формулу Хассе в случае $n = 1$; результат удобно записать в следующем виде.

ТАБЛИЦА 1

	$k = 1$	$k \geq 2$
$i = p - 1$	$\mathrm{Nm}(1 + aw^{p-1}u^j t)$ $= 1 - au^j t^p + a^p u^{jp+p-1} t^p \pmod{\wp_K^{p+1}}$	$\mathrm{Nm}(1 + aw^{p-1}u^j t^k)$ $= 1 \pmod{\wp_K^{p+1}}$
$i = 0, \dots, p - 2$	$\mathrm{Nm}(1 + aw^i u^j t)$ $= 1 + a^p u^{i+jp} t^p \pmod{\wp_K^{p+1}}$	$\mathrm{Nm}(1 + aw^i u^j t^k)$ $= 1 \pmod{\wp_K^{p+1}}$

Из нее следует

ЛЕММА 2. *Имеет место вложение $U_K^{p+1} \subset \mathrm{Nm}(L^*)$.*

Очевидно, что элементы вида $(1 + aw^i u^j t^k)$, $k < p$, не лежат в образе нормы. При $k = p$ в образе нормы лежит подмножество, порожденное элементами двух видов:

$$(1 + (-au^j + a^p u^{jp+p-1})t^p) \quad \text{и} \quad (1 + a^p u^{i+jp} t^p), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad i = 0, \dots, p-2.$$

При более детальном рассмотрении оказывается, что это множество содержит в себе все элементы $1 + bt^p$, где $b = \alpha u^i$, $\alpha \in F_q$, $i \in \mathbb{Z}$, за исключением случая $i = -1$. В итоге мы получили, что образ нормы имеет следующий вид:

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Nm}(L^*)) = \{u\} \times \{t^p\} \times F_q^* \times U_{\bar{K}} \times ((U_K^p/U_K^{p+1}) \setminus \{1 + \alpha u^{-1} t^p, \alpha \in F_q\}) \times U_K^{p+1}.$$

II. Теперь выясним, какие условия на вид $f \in K^*$ можно наложить, если известно, что $(y, f | h)_K = 0$ для всех $y \in K^*$. Для этого нам потребуются свойства вычета, описанные в [2]. Из использовавшегося выше разложения K^* следует, что достаточно вычислять $(\cdot, \cdot | h)_K$ только на образующих K^* .

Из таблицы 2 видно, что $\{u\}$, F_q^* и $U_{\bar{K}}$ лежат в аннуляторе спаривания. Кроме того, справедлива

ЛЕММА 3. *Если $(y, f | h)_K = 0$ для всех $y \in K^*$, то $\nu_K(f)$ делится на p .*

Для доказательства достаточно взять $y = 1 - u^{-1} t^p$.

Следовательно, $\{t^p\}$ тоже лежит в аннуляторе спаривания. Теперь можно считать, что $f \in U_K$, т.е.

$$f = \prod_{a,b>0} (1 + \alpha u^a t^b), \quad \text{где} \quad \alpha = \alpha(a, b) \in F_q.$$

ТАБЛИЦА 2

	u	t	$\alpha \in F_q^*$	$1 + \alpha u^a, a > 0$	$1 + \alpha u^a t^b, b > 0$
u	0	0	0	0	0
t		0	0	0	Если $(a, b) = (-1, p)$, то $\text{Tr}_{F_q/F_p}(\alpha)$; иначе 0
$\alpha \in F_q^*$			0	0	0
$1 + \alpha u^a, a > 0$				0	0
$1 + \beta u^c t^d, d > 0$					Если $(a + c, b + d) = (-1, p)$, то $\text{Tr}_{F_q/F_p}(\alpha\beta b)$; иначе 0

Далее, покажем, что на самом деле в f нет сомножителей вида $(1 + \alpha u^a t^b)$, $b = 1, 2, \dots, p-1$. Для этого достаточно вычислить $(1 + \alpha u^a t^b, 1 + \beta u^c t^{p-b} | h)_K$. Если $a + c \neq -1$, то $(1 + \alpha u^a t^b, 1 + \beta u^c t^{p-b} | h)_K = 0$. В противном случае получаем, что $\text{Tr}_{F_q/F_p}(\alpha\beta b) = 0$ для всех $\beta \in F_q^*$ и $b \neq 0$, следовательно, $\alpha = 0$. Отсюда вытекает, что U_K^{p-1} не лежит в аннуляторе спаривания.

Непосредственная проверка дает, что спаривание тривиально на всей группе U_K^{p+1} . Осталось лишь понять, что происходит с U_K^p/U_K^{p+1} , но из таблицы видно, что только те элементы вида $1 + \alpha u^a t^p$ не обращаются в нуль при спаривании, у которых $a = -1$.

Итак, мы доказали, что аннулятор спаривания $(y, f | h)_K$ совпадает с образом нормы $\text{Nm}(L^*)$, что и требовалось.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Н. Паршин, “Когомологии Галуа и группа Брауэра локальных полей”, *Теория Галуа, кольца, алгебраические группы и их приложения*, Тр. МИАН, **183**, 1990, 159–169.
- [2] А. Н. Паршин, “Локальная теория полей классов”, *Алгебраическая геометрия и ее приложения*, Тр. МИАН, **165**, 1984, 143–170.
- [3] J.-P. Serre, *Corps Locaux*, Deuxième édition. Publications de l'Université de Nancago, **VIII**, Hermann, Paris, 1968.

М. А. Дубовицкая

Институт истории естествознания и техники им. Вавилова

E-mail: dubovitskayam@mail.ru

Поступило

27.12.2005