Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Гесада-Баталла, О. Гонзалес-Гасиола, О гамильтони-
ане одного класса квантовых стохастических процессов,
Матем. заметки, 2007, том 81, выпуск 6, 816–837

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3734>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:16:58

О гамильтониане одного класса квантовых стохастических процессов

Роберто Гесада-Баталла, Освальдо Гонзалес Гасиола

Развивая подход, предложенный Чеботаревым, мы изучаем генератор сильно-но непрерывной унитарной группы, связанной с решением квантового стохастического уравнения Хадсона–Партасарати для процессов произвольной размерности с неограниченными некоммутирующими коэффициентами (операторами, характеризующими квантовую систему). Полученные результаты применяются к задаче о процессе квантовой двухфотонной эмиссии и поглощения.

Библиография: 24 названия.

1. Введение. Фундаментальная теорема квантового стохастического исчисления (см., например, [1; теорема 27.8]) утверждает, что решение $V(t)$ квантового стохастического дифференциального уравнения (КСДУ или уравнения Хадсона–Партасарати)

$$dV(t) = \left\{ \sum_{k,j \in J} (W_{kj} - \delta_{kj}) d\Lambda_{kj}(t) - \sum_{k,j \in J} L_k^* W_{kj} dA_j(t) + \sum_{k,j \in J} L_j dA_j^\dagger(t) - \left(iH + \frac{1}{2} \sum_{j \in J} L_j^* L_j \right) dt \right\} V(t)$$

единственно в классе сильно непрерывных унитарных функций $V(t)$, $V(0) = I$, если операторы H , L_j , W_{kj} , действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, удовлетворяют следующим условиям:

- $H, L_j, W_{k,j} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ для любых $k, j \in J$, где $J \subset \mathbb{N}$;
- $H = H^*$, $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \zeta \otimes \mathcal{H})$, где $Lh = \sum_j z_j \otimes L_j h$;
- $W \in \mathcal{U}(\zeta \otimes \mathcal{H})$, где $W = \sum_{k,j} |z_k\rangle\langle z_j| \otimes W_{k,j}$, $(z_j)_{j \geq 1}$ – ортонормированный базис в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве ζ (в случае многочастичных процессов рождения и уничтожения) с $\dim(\zeta) = |J|$, и $\mathcal{U}(\zeta \otimes \mathcal{H})$ обозначает пространство унитарных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\zeta \otimes \mathcal{H}$.

Существует унитарная группа операторов U_t , которая каноническим образом ассоциирована с коциклом $V(t)$. Для того чтобы ввести U_t , необходимо рассмотреть

Работа выполнена при поддержке гранта CONACYT 49510-F.

вторичное квантование Θ_t сильно непрерывной унитарной группы сдвигов операторов θ_t на $L_2(\mathbb{R}, \zeta)$, действующее в фоковском пространстве

$$\Gamma_{L_2(\mathbb{R}, \zeta)} = \Gamma_{L_2(\mathbb{R}_-, \zeta)} \otimes \Gamma_{L_2(\mathbb{R}_+, \zeta)},$$

заданное на тотальном множестве экспоненциальных векторов следующими формулами:

$$\theta_t v(r) = v(r + t), \quad \Theta_t \psi(v) = \psi(\theta_t v) \quad \forall v \in L_2(\mathbb{R}), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\psi(v)$ – экспоненциальный вектор с аргументом v . Определенные таким образом операторы Θ_t допускают единственное продолжение по непрерывности на все фоковское пространство $\Gamma_{L_2(\mathbb{R}, \zeta)} \otimes \mathcal{H}$. В терминах операторов Θ_t свойство коцикличности $V(t)$ имеет вид

$$V(s + t) = \Theta_s^* V(t) \Theta_s V(s) \quad \forall s, t \geq 0,$$

а сильно непрерывная унитарная группа U_t задается следующим образом (см. [2]–[6]):

$$U_t = \begin{cases} \Theta_t V_t, & t \geq 0, \\ V_{|t|}^* \Theta_t, & t < 0. \end{cases}$$

Унитарная эквивалентность семейств U_t и $V(t)$ позволяет распространить утверждение о единственности решения КСДУ на эволюционное уравнение (уравнение Шрёдингера), которому удовлетворяет группа U_t . Это возможно, по крайней мере, в тех случаях, когда установлена теорема существования и единственности для КСДУ. Значительный вклад в изучение этой проблемы внесли Аппельбаум [7], Фаньола [8]–[10], Мохари и Партасарати [11], Бхат и Синха [12], [13], Линдсей и Виллс [14], Рыжиков [15]. Обратно, если известен генератор группы U_t и доказана его существенная самосопряженность, это гарантирует единственность унитарного решения соответствующего КСДУ (см. [16]–[20]).

Задача характеристики инфинитезимального генератора $-i\mathcal{C}$ унитарной группы U_t , поставленная Аккарди более пятнадцати лет назад в [21], была решена Чеботаревым [17] в случае $|J| = 1$ для уравнений с неограниченными коммутирующими операторными коэффициентами. В этой статье для точно решаемой задачи найдено явное выражение генератора и краевое условие, которому должны удовлетворять операторы, принадлежащие области определения $\mathcal{C}$. В работе [18] эти результаты были распространены на случай некоммутирующих операторов, но при условии, что $|J| = 1$.

Генераторы уравнений с ограниченными операторными коэффициентами в случае произвольной кратности $|J|$ были изучены в работах Грегоратти [19], [20], который построил существенно самосопряженное расширение для некоторого сужения оператора $\mathcal{C}$. Используя независимый подход, фон Вальденфельс [16] доказал тот же результат, что и Грегоратти, и, кроме того, дал еще одно представление генератора $\mathcal{C}$.

Имея в виду примеры физических задач, которые не охватываются существующей в настоящее время теорией, в данной статье мы рассмотрим уравнения с неограниченными некоммутирующими коэффициентами в случае произвольной размерности J . Такое обобщение является естественным дальнейшим развитием результатов,

полученных Чеботаревым и Грегоратти. В основной части статьи мы строим плотно определенное симметричное сужение $\mathcal{C}$ на линейную оболочку семейства псевдоэкспоненциальных векторов и доказываем существенную самосопряженность этого сужения. В последнем пункте показано, что наши результаты охватывают класс задач о двухфотонных процессах эмиссии и поглощения.

2. Основные определения и предположения. В дальнейшем изложении рассматриваются только комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Паре гильбертовых пространств $\mathcal{H}$ и ζ и ортонормированному базису $\{z_j\}_{j \in J}$ в ζ сопоставим симметричное фоковское пространство

$$\Gamma_{\mathcal{H}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_2(\mathbb{R}^n; \zeta^{\otimes n} \otimes \mathcal{H})$$

векторов $\psi = \{\psi_0, \psi_1(r_1), \psi_2(r_1, r_2), \dots\}$ таких, что

$$\|\psi_0\|_{\mathcal{H}}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \|\psi_n(r)\|_{\zeta^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}}^2 d^n r < \infty.$$

Скалярное произведение двух векторов $\Phi, \Psi \in \Gamma_{\mathcal{H}}$ задается соотношением

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} = \langle \phi_0, \psi_0 \rangle_{\mathcal{H}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \phi_n(r), \psi_n(r) \rangle_{\mathcal{H}_n^{\zeta}} d^n r,$$

где для упрощения записи формул далее используется обозначение $\mathcal{H}_n^{\zeta} = \zeta^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}$. Тензорная степень $\zeta^{\otimes n} = S_n \zeta^{\otimes n}$ является n -кратным симметризованным тензорным произведением ζ на себя, где S_n является ортогональной проекцией на $\zeta^{\otimes n}$, определенной с помощью симметризирующего оператора

$$S_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \sigma,$$

Σ_n – группа перестановок n элементов, а операция $\sigma(z_{j_1} \otimes \dots \otimes z_{j_n}) = z_{j_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes z_{j_{\sigma(n)}}$ продолжается по линейности до ограниченного оператора на $\zeta^{\otimes n}$. Через $L_2(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}_n^{\zeta})$ обозначено пространство симметричных функций на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathcal{H}_n^{\zeta}$, а символ $W_{2,1}(\mathbb{R}_*^n; \mathcal{H}_n^{\zeta})$ означает соболевское пространство симметричных функций на $\mathbb{R}_*^n$, $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Пространство ζ называется *пространством кратности*, и его размерность $1 \leq |J| \leq \infty$ равна числу независимых процессов рождения–уничтожения $A_j^{\dagger}(t)$, $A_j(t)$ в приведенном выше уравнении Хадсона–Партасарати.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Самосопряженному оператору $\Lambda \geq I$ сопоставим гильбертово пространство $\mathcal{K} = \text{dom } \Lambda^{1/2}$, снабженное скалярным произведением

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{\mathcal{K}} = \langle \Lambda^{1/2} \Phi, \Lambda^{1/2} \Psi \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{K}.$$

Заметим, что для каждого $k \in \mathcal{K}$ выполнено

$$\|k\|_{\mathcal{K}} = \langle k, k \rangle_{\mathcal{K}}^{1/2} \leq \|\Lambda^{1/2} k\| = \|k\|_{\mathcal{H}},$$

поскольку $\Lambda \geq I$. Следовательно, гильбертово пространство $\mathcal{K} = \text{dom}(\Lambda^{1/2})$ плотно и непрерывно вложено в $\mathcal{H}$. Мы также будем использовать фоковское пространство $\Gamma_{\mathcal{K}}$, определенное аналогичным образом, для которого используется более узкое пространство $\mathcal{K}$ вместо $\mathcal{H}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Для введенного выше пространства $\mathcal{K}$ следующие утверждения являются следствием того, что топология пространства $\mathcal{K}$ сильнее топологии $\mathcal{H}$:

- (i) $\mathcal{K}^\zeta$ погружено в $\zeta \otimes \mathcal{H}$ плотно и непрерывно;
- (ii) $\mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{K}^\zeta) \subset \mathcal{B}(\mathcal{K}, \zeta \otimes \mathcal{H})$ и $\|F\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{K}^\zeta)} \leq \|F\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K}, \zeta \otimes \mathcal{H})}$ для любого $F \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{K}^\zeta)$; иными словами, вложение $\mathcal{K}$ в $\mathcal{H}$ непрерывно;
- (iii) для любого $n \geq 1$ имеет место вложение $L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{K}_n^\zeta) \subset L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_n^\zeta)$, и это вложение непрерывно;
- (iv) вложение $\Gamma_{\mathcal{K}} \subset \Gamma_{\mathcal{H}}$ непрерывно.

Пространство $\mathcal{K}_n^\zeta$ определяется по аналогии с $\mathcal{H}_n^\zeta$. Относительно операторных коэффициентов делаются следующие предположения.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ Н-1. *Предположим, что $\mathcal{K}$ удовлетворяет условиям, сформулированным в определении 2.1, и выполнены следующие условия:*

- $L_j, L_j^* \in \mathcal{B}(\mathcal{K}; \mathcal{H})$ для любого $j \in J$, где L_j^* – оператор, сопряженный к L_j в $\mathcal{H}$; предположим также, что $L_j \cdot \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ для любого $j \geq 1$ и что

$$\sum_j L_j^* L_j \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H});$$

- $W_{kj} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ для любого $k, j \in J$, и

$$W = \sum_{k,j} |z_k\rangle\langle z_j| \otimes W_{k,j} \in \mathcal{U}(\zeta \otimes \mathcal{H});$$

- $H: \text{dom}(H) \rightarrow \mathcal{H}$ является самосопряженным оператором, $\mathcal{K} \subset \text{dom}(H)$ и $H \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$.

3. Псевдоэкспоненциальные векторы. Следуя конструкциям, предложенным Чеботаревым [17], [18] и Грегоратти [19], в этом пункте мы построим новый класс псевдоэкспоненциальных векторов в $\Gamma_{\mathcal{H}}$. Отметим, что независимо от нашей работы аналогичная конструкция была недавно использована Рыжаковым [15].

Произвольной функции $v \in L_2(\mathbb{R}, \zeta)$ сопоставим оператор

$$V \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, L_2(\mathbb{R}, \mathcal{K}^\zeta)), \quad V(r)h := v(r) \otimes h,$$

для любых $h \in \mathcal{K}, r \in \mathbb{R}$. Соответствующий псевдоэкспоненциальный вектор $\Psi(V)h$ определяется следующим образом. Для $r = (r_1, \dots, r_n)$, $r_1 < \dots < r_n$ положим

$$\begin{aligned} \Psi_n(V)h(r) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} (S_n \otimes I)(I^{\otimes n} \otimes V(r_n)) \cdots (I \otimes V(r_2))V(r_1)h \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} (S_n \otimes I)(I^{\otimes n} \otimes V(r_n)) \cdots v(r_2) \otimes_s v(r_1) \otimes h = \frac{1}{\sqrt{n!}} v^{\otimes_s n}(r)h. \end{aligned}$$

Функция $\Psi_n(V)h$ продолжается симметричным образом вне симплекса

$$\{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_*^n : r_1 < \dots < r_n\}.$$

Следовательно, $\Psi(V)h = \psi(v) \otimes h \in \Gamma_{\mathcal{H}}$, где $\Psi(v) = (v^{\otimes_s n})_{n \geq 0}$ – симметричный экспоненциальный вектор с аргументом v . Теперь сопоставим псевдоэкспоненциальный вектор произвольному вектору $F \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, L_2(\mathbb{R}; \mathcal{K}^\zeta))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Определим компоненты псевдоэкспоненциального вектора следующим образом: для любого $F \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H}^\zeta))$, $h \in \mathcal{H}$ и $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_*^n$ такого, что $r_n > \dots > r_1$, положим

$$(\Psi_n(F)h)(r) = \begin{cases} h, & \text{если } n = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{n!}}(S_n \otimes I)(I^{\otimes(n-1)} \otimes F(r_n)) \cdots (I \otimes F(r_2))F(r_1)h, & \text{если } n \geq 1. \end{cases}$$

Для векторов $r \in \mathbb{R}_*^n$, не принадлежащих симплексу $\{r \in \mathbb{R}_*^n: r_1 < \dots < r_n\}$, положим

$$(\Psi_n(F)h)(r) = (\Psi_n(F)h)(r_{\sigma(1)}, \dots, r_{\sigma(n)}),$$

где σ является единственной перестановкой такой, что $r_{\sigma(n)} > \dots > r_{\sigma(1)}$.

Приведенное определение согласовано с линейными операциями на сомножителях:

$$(I^{\otimes k} \otimes F(r))(z_1 \otimes \dots \otimes z_k \otimes h) := z_1 \otimes \dots \otimes z_k \otimes F(r)h \in \mathcal{H}_{k+1}^\zeta.$$

Для любых $\varphi \in \zeta^{\otimes k} \otimes \mathcal{H}$, $k \geq 1$, положим

$$(I^{\otimes k} \otimes F(r))\varphi = \lim_n (I^{\otimes k} \otimes F(r))\varphi_n,$$

где $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ – последовательность конечных линейных комбинаций рассмотренных выше простых тензоров, сходящаяся к φ .

ЛЕММА 3.2. Гильбертово пространство $\zeta \otimes L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{n-1}^\zeta)$ изометрически изоморфно пространству $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_n^\zeta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\varphi \in \zeta \otimes L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{n-1}^\zeta)$ функция $\tilde{\varphi}: t \rightarrow \varphi(t)$ является измеримым отображением из $\mathbb{R}$ в $\mathcal{H}_n^\zeta$. Кроме того, если $(\varphi_n)_n$ является последовательностью любого конечного числа линейных комбинаций простых тензорных произведений, сходящейся к φ , то

$$\|\varphi\|_{\zeta \otimes L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{n-1}^\zeta)} = \lim_n \|\varphi_n\|_{\zeta \otimes L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{n-1}^\zeta)} = \lim_n \|\tilde{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H}_n^\zeta)} = \|\tilde{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H}_n^\zeta)}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть F – определенная выше функция. Тогда

$$\Psi_n(F) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, L^2(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}_n^\zeta)) \quad \text{для любого } n \geq 0.$$

Следовательно, для любого $h \in \mathcal{H}$ вектор $\Psi(F)h := \{\Psi_n(F)h\}_{n=0}^\infty$ является вектором симметричного фоковского пространства $\Gamma_{\mathcal{H}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для любого $h \in \mathcal{H}$ имеет место оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|F(r)h\|_{\mathcal{H}^\zeta}^2 dr = \|Fh\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H}^\zeta)}^2 \leq \|F\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}; L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H}^\zeta))}^2 \|h\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Используя лемму 3.2, мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \|(I \otimes F(r))(z \otimes h)\|_{\zeta^{\otimes 2} \otimes \mathcal{H}}^2 dr &= \|(I \otimes F)(z \otimes h)\|_{\zeta \otimes L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H}^\zeta)}^2 \\ &\leq \|z\|_{\zeta}^2 \|Fh\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H}^\zeta)}^2 \\ &\leq \|F\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}; L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H}^\zeta))}^2 \|z \otimes h\|_{\mathcal{H}^\zeta}^2. \end{aligned}$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \|(I^{\otimes(n-1)} \otimes F(r))(z_{i_1} \otimes \cdots \otimes z_{i_{n-1}} \otimes h)\|_{\mathcal{H}_n^\zeta}^2 dr \\ & \leq \|F\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}; L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H}^\zeta))}^{2n} \|z_{i_1} \otimes \cdots \otimes z_{i_{n-1}} \otimes h\|_{\mathcal{H}_{n-1}^\zeta}^2. \end{aligned}$$

Теперь для произвольной последовательности $(\varphi_m)_{m \geq 1}$ конечных линейных комбинаций простых тензорных произведений такой, что $\lim_m \varphi_m = \varphi \in \mathcal{H}_{n-1}^\zeta$, используя лемму Фату, мы получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \|(I^{\otimes(n-1)} \otimes F(r))\varphi\|_{\mathcal{H}_n^\zeta}^2 dr &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_m \|(I^{\otimes(n-1)} \otimes F(r))\varphi_m\|_{\mathcal{H}_n^\zeta}^2 dr \\ &\leq \liminf_m \int_{-\infty}^{\infty} \|(I^{\otimes(n-1)} \otimes F(r))\varphi_m\|_{\mathcal{H}_n^\zeta}^2 dr \\ &\leq \liminf_m \|F\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}; L^2(\mathbb{R}_*; \mathcal{H}^\zeta))}^2 \|\varphi_m\|_{\mathcal{H}_{n-1}^\zeta}^2 \\ &= \|F\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}; L^2(\mathbb{R}_*; \mathcal{H}^\zeta))}^2 \|\varphi\|_{\mathcal{H}_{n-1}^\zeta}^2. \end{aligned}$$

Из полученных выше оценок следует, что

$$\int_{\mathbb{R}_*^n} \|(\Psi_n(F)h)(r)\|_{\mathcal{H}_n^\zeta}^2 dr^n \leq \|F\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}; L^2(\mathbb{R}_*; \mathcal{H}^\zeta))}^{2n} \|h\|_{\mathcal{H}}^2,$$

что и требовалось доказать.

Для любой последовательности $\{L_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ и любого $h \in \mathcal{H}$ положим

$$\widehat{L}h = \sum_{j \in J} z_j \otimes L_j h \in \mathcal{H}^\zeta,$$

и продолжим этот оператор на $\Gamma_{\mathcal{H}}$, полагая по определению

$$\widehat{L}u = ((I^{\otimes n} \otimes \widehat{L})u_n)_{n \geq 0}$$

для $u \in \Gamma_{\mathcal{H}}$. Порядок двух шагов, из которых состоит определение оператора $\widehat{L}$, можно изменить, в обоих случаях мы получим один и тот же оператор.

Аналогичным образом можно определить действие сопряженных компонент $(L_j^*)_{j \geq 1}$ на $\Gamma_{\mathcal{H}}$:

$$L_j^* u = ((I^{\otimes n} \otimes L_j^*)u_n)_{n \geq 0}, \quad u \in \Gamma_{\mathcal{H}}.$$

Таким образом, мы получаем оператор $\widehat{L}^*: \zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}} \rightarrow \Gamma_{\mathcal{H}}$, действие которого на произведение $z \otimes u$ в простейшем случае $z \in \zeta$ и $u \in \mathcal{H}$ задается соотношением

$$\widehat{L}^*(z \otimes u) = \sum_j \langle z_j, z \rangle_\zeta L_j^* u.$$

По линейности и непрерывности действие этого оператора распространяется на все тензорное произведение $\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}}$. Заметим, что для любого $u \in \Gamma_{\mathcal{H}}$ выполнено тождество

$$\widehat{L}^* \widehat{L}u = \widehat{L}^* \left(\sum_j z_j \otimes L_j u \right) = \sum_{j,k} \langle z_k, z_j \rangle_\zeta L_k^* L_j u = \sum_j L_j^* L_j u.$$

В дальнейшем изложении нам потребуется следующее предположение.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ Н-2. *Имеет место оценка $\sum_j \|L_j\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})}^2 < \infty$.*

Простым следствием этого предположения является следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Предположим, что Н-2 выполнено. Тогда*

- (а) *оператор $\widehat{L}: \Gamma_{\mathcal{H}} \rightarrow \zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}}$ ограничен и $\|\widehat{L}\| \leq (\sum_{j \in J} \|L_j\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})}^2)^{1/2}$;*
- (b) *оператор $\widehat{L}^*: \zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}} \rightarrow \Gamma_{\mathcal{H}}$ ограничен и $\|\widehat{L}^*\| \leq (\sum_{j \in J} \|L_j\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})}^2)^{1/2}$;*
- (с) *$\widehat{L}^* \widehat{L}$ является ограниченным оператором, действующим из $\Gamma_{\mathcal{H}}$ в $\Gamma_{\mathcal{H}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $u_n = z_{j_1} \otimes \cdots \otimes z_{j_n} \otimes h$, то имеет место равномерная оценка

$$\begin{aligned} \|(I^{\otimes n} \otimes \widehat{L})u_n\|_{\mathcal{H}_{n+1}^{\zeta}}^2 &= \left\| z_{j_1} \otimes \cdots \otimes z_{j_n} \otimes \left(\sum_j z_j \otimes L_j h \right) \right\|_{\mathcal{H}_{n+1}^{\zeta}}^2 \\ &= \|z_{j_1} \otimes \cdots \otimes z_{j_n}\|_{\zeta^{\otimes n}}^2 \left\| \sum_j z_j \otimes L_j h \right\|_{\mathcal{H}^{\zeta}}^2 \\ &= \|z_{j_1} \otimes \cdots \otimes z_{j_n}\|_{\zeta^{\otimes n}}^2 \sum_j \|L_j h\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \left(\sum_j \|L_j\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})}^2 \right) \|u_n\|_{\mathcal{H}_n^{\zeta}}^2, \end{aligned}$$

которая распространяется по линейности с плотного множества на все $u_n \in \mathcal{H}_n^{\zeta}$.

После несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \|\widehat{L}u\|_{\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}}}^2 &= \sum_n \|(I^{\otimes n} \otimes \widehat{L})u_n\|_{\mathcal{H}_{n+1}^{\zeta}}^2 \\ &\leq \sum_n \sum_j \|L_j\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})}^2 \|u_n\|_{\mathcal{H}_n^{\zeta}}^2 \leq \left(\sum_{j \in J} \|L_j\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})}^2 \right) \|u\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}}^2. \end{aligned}$$

Утверждение (а) доказано. Аналогичным образом мы получаем оценку

$$\begin{aligned} \|\widehat{L}^*(z \otimes u)\| &\leq \sum_j |\langle z_j, z \rangle| \|L_j^* u\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}} \leq \left(\sum_j |\langle z_j, z \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_j \|L_j^* u\|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_j \|L_j^*\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})}^2 \right)^{1/2} \|z \otimes u\|_{\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}}}. \end{aligned}$$

Это доказывает (b), а (с) является следствием (а) и (b).

4. Оператор $\mathcal{C}$. В этом пункте мы определим оператор $\mathcal{C}$, введенный в случае $|J| = 1$ Чеботаревым [17], [19]. Оператор $\mathcal{C}$ имеет следующее формальное аналитическое представление на симметрических векторах с непрерывными компонентами:

$$\mathcal{C}\Psi = i(\nabla + G^* - L^* a_-)\Psi,$$

причем область его определения, корректно определяемая ниже, состоит из векторов, удовлетворяющих краевому условию

$$(a_- - W a_+ - \widehat{L})\Psi = 0,$$

где

$$(a_{\pm}\Psi)_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \Psi_{n+1}(\underbrace{x_1, \dots}_k, 0^{\pm}, \dots, x_n)$$

для любых Ψ : $\Psi_n \in W_2^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Оператор

$$G = \frac{1}{2} \hat{L}^* \hat{L} + iH$$

известен в теории необратимой квантовой эволюции [1], где $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Поэтому $G^* = (1/2) \hat{L}^* \hat{L} - iH$. Область определения H может быть расширена на $\Gamma_{\mathcal{H}}$:

$$Hu = ((I^{\otimes n} \otimes H)u_n)_{n \geq 0} \quad \forall u \in \Gamma_{\mathcal{H}}.$$

Рассмотрим подпространство $D \subset D(\nabla)$:

$$D = \left\{ u = (u_n)_{n \geq 1} \in \Gamma_{\mathcal{H}} : \right.$$

$$\left. u_n \in W_{2,1}(\mathbb{R}_*^n, \mathcal{H}_n^{\zeta}), \|u\|_{D(\nabla)}^2 = \sum_n \|u_n\|_{W_{2,1}(\mathbb{R}_*^n, \mathcal{H}_n^{\zeta})}^2 < \infty \right\},$$

где

$$\|u_n\|_{W_{2,1}(\mathbb{R}_*^n, \mathcal{H}_n^{\zeta})}^2 = \|u_n\|_{L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_n^{\zeta})}^2 + \left\| \sum_{l=1}^n \partial_l u_n \right\|_{L_2(\mathbb{R}_*, \mathcal{H}_n^{\zeta})}^2.$$

Пусть

$$H_1^{\Sigma}(\mathbb{R}_*^n, \mathcal{H}_n^{\zeta}) = \left\{ u \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_n^{\zeta}) : \sum_{l=1}^n \partial_l u \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_n^{\zeta}) \right\}.$$

Подпространство

$$D(\nabla) = \left\{ u = (u_n)_{n \geq 1} \in \Gamma_{\mathcal{H}} : \right.$$

$$\left. u_n \in H_1^{\Sigma}(\mathbb{R}_*^n, \mathcal{H}_n^{\zeta}), \|u\|_{D(\nabla)}^2 = \sum_n \|u_n\|_{W_{2,1}(\mathbb{R}_*^n, \mathcal{H}_n^{\zeta})}^2 < \infty \right\},$$

является максимальной областью определения ∇ . Заметим, что от элементов подпространства $H_1^{\Sigma}(\mathbb{R}_*^n, \mathcal{H}_n^{\zeta})$ требуется только существование и интегрируемость производных по направлению $e_1 + \dots + e_n$, где $(e_n)_{n \geq 1}$ – базис $\mathbb{R}^n$. Следовательно, D является подмножеством $D(\nabla)$.

Компоненты связности $\mathbb{R}_*^n$ будут обозначаться через Q_m , $m = 1, \dots, 2^n$. Следуя терминологии, предложенной Чеботаревым, будем называть эти подмножества n -частичными камерами и обозначать их границу через ∂Q_m .

Если $v \in W_{2,1}(\mathbb{R}_*^n, \mathcal{H}_n^{\zeta})$, то след этой функции $A_l^r v = v|_{\{r_l=r\}}$ является функцией из $L_2(\mathbb{R}^{(n-1)}, \mathcal{H}_n^{\zeta})$ для любого $r \in \{0^-, 0^+\}$. Этот факт не обязательно имеет место для элементов $H_1^{\Sigma}(\mathbb{R}_*^n, \mathcal{H}_n^{\zeta})$ (см., например, [24]). Через $v|_{\partial Q_m}$ мы обозначим след v на границе ∂Q_m , что может быть в терминах n следов вида $v|_{\{r_l=0^{\pm}\}}$.

Для $s \in \{0^-, 0^+\}$ рассмотрим следующие подпространства в $\Gamma_{\mathcal{H}}$:

$$N_s(D) = D(a(s)) \cap D = \left\{ u \in D : \sum_{n \geq 0} n \|u_n|_{\{r_{n+1}=s\}}\|_{L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_{n+1}^{\zeta})}^2 < \infty \right\}$$

и будем писать просто $N_{0\pm}(\mathbf{D}) = N_{0-}(\mathbf{D}) \cap N_{0+}(\mathbf{D})$.

Для любых $u \in N_s(\mathbf{D})$ и $s \in \{0^-, 0^+\}$ определим неограниченный оператор $a(s)$ следующим соотношением:

$$(a(s)u)_{(n-1)} = \sqrt{n}A_l^s u_n \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{H}_n^\zeta) \simeq \zeta \otimes L^2(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{H}_{n-1}^\zeta).$$

Поскольку функция u_n является симметричной, в определении $a(s)$ можно использовать любой оператор с конечным следом A_l^s , $1 \leq l \leq n$ (см. [18], [17]). Будем писать $a_\pm$ вместо $a(0^\pm)$.

Заметим, что множество значений оператора $a(s)$ принадлежит пространству

$$\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}} \simeq \bigoplus_{n \geq 0} \zeta \otimes L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_n^\zeta) \simeq \bigoplus_{n \geq 0} L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_{n+1}^\zeta),$$

и $\widehat{L}^*: \zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}} \rightarrow \Gamma_{\mathcal{H}}$. Следовательно, оператор $\widehat{L}^*a_-$ корректно определен на $N_{0\pm}(\mathbf{D}) \cap \Gamma_{\mathcal{H}}$. Кроме того, поскольку G^* корректно определен на $\Gamma_{\mathcal{H}}$, аналитическое выражение оператора $\mathcal{C}$ является корректно определенным на $N_{0\pm}(\mathbf{D}) \cap \Gamma_{\mathcal{H}}$. Операторы в краевом условии также корректно определены на $N_{0\pm}(\mathbf{D}) \cap \Gamma_{\mathcal{H}}$, но соответствующее тождество имеет место в $\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}}$. Заметим, что оператор $W \in \mathcal{U}(\mathcal{H}^\zeta)$ допускает продолжение на $\mathcal{U}(\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}})$ с помощью следующего определения:

$$Wu = (W(\zeta \otimes u_n))_{n \geq 0}, \quad \text{где } z \otimes u_n \in \zeta \otimes L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_n^\zeta).$$

Экспоненциальные векторы вида $\Psi(V)h = \psi(v) \otimes h$, где $h \in \mathcal{H}$, а v принадлежит плотному подмножеству в $L_2(\mathbb{R}, \zeta)$, не могут удовлетворять краевому условию и не принадлежат области определения оператора $\mathcal{C}$. По этой причине необходимо рассматривать более широкий класс псевдоэкспоненциальных векторов, который в частном случае $|J| = 1$ совпадает с областью определения, введенной Чеботаревым в [18]. Мы дадим определение в случае произвольной кратности J .

Рассмотрим класс функций вида

$$v_\varepsilon(r) := V(r) \left(1 - \xi \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \right) + \xi \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \{ cI_{(-\infty, 0)}(r) + I_{(0, \infty)}(r)(I \otimes e^{-\Lambda r/\varepsilon})W^*(cI - \widehat{L}) \},$$

где $\varepsilon > 0$ и $h \in \mathcal{H}$, $V(r)h = v(r) \otimes h$, $v \in \mathcal{S} \subset W_{2,1}(\mathbb{R}_*; \zeta)$, $\mathcal{S}$ плотно в $L_2(\mathbb{R}, \zeta)$, $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\xi(0) = 1$, $|\xi(r)| \leq 1$ для всех $r \in \mathbb{R}$, и для $c \in \zeta$ имеем $ch = c \otimes h$.

В следующем предложении будет доказано, что $v_\varepsilon \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, L^2(\mathbb{R}, \zeta \otimes \mathcal{H}))$. Следовательно, согласно предложению 3.3 соответствующие псевдоэкспоненциальные векторы $\Psi(v_\varepsilon)h$ принадлежат $\Gamma_{\mathcal{H}}$ для любого $h \in \mathcal{H}$. Далее в предложении 4.2 мы докажем, что $\Psi(v_\varepsilon)h \in \mathbf{D}$ для любого $h \in \mathcal{H}$. В предложении 4.3 будет показано, что подмножество конечных линейных комбинаций таких псевдоэкспоненциальных векторов плотно в $\Gamma_{\mathcal{H}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ имеет место включение*

$$v_\varepsilon \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}^\zeta)).$$

Следовательно, $\Psi(v_\varepsilon)h \in \Gamma_{\mathcal{H}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $h \in \mathcal{H}$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \|v_{\varepsilon}(r)h\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}}^2 dr \\
& \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(1 - \xi \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \right)^2 \right| \|V(r)h\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}}^2 dr \\
& \quad + 2 \left| \left(1 - \xi \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \right) \|V(r)h\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}} \right| \left| \xi \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \right| \\
& \quad \times \left\| \{ cI_{(-\infty, 0)}(r) + I_{(0, \infty)}(r)(I \otimes e^{-\Lambda r/\varepsilon})W^*(cI - \widehat{L}) \} h \right\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}} dr \\
& \quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left| \xi \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \right|^2 \left\| \{ cI_{(-\infty, 0)} + I_{(0, \infty)}(r)(I \otimes e^{-\Lambda r/\varepsilon})W^*(cI - \widehat{L}) \} h \right\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}}^2 dr \\
& \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} \|v(r)\|_{\zeta}^2 \|h\|_{\mathcal{H}}^2 dr + 4 \int_{-\infty}^{\infty} \|v(r)\|_{\zeta} \left\| \xi \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \right\| \|h\|_{\mathcal{H}} \|c \otimes h\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}} I_{(-\infty, 0)} dr \\
& \quad + 4 \int_{-\infty}^{\infty} \|v(r)\|_{\zeta} \|h\|_{\mathcal{H}} |I_{(0, \infty)}| \left\| (I \otimes e^{-\Lambda r/\varepsilon})W^*(cI - \widehat{L})h \right\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}} dr \\
& \quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left| \xi \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \right|^2 \|c\|_{\zeta}^2 \|h\|_{\mathcal{H}}^2 dr \\
& \quad + \int_{-\infty}^{\infty} \|I_{(0, \infty)}(r)(I \otimes e^{-\Lambda r/\varepsilon})W^*(cI - \widehat{L})h\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}}^2 dr + 0 \\
& \leq 4\|v\|_{L^2(\mathbb{R}, \zeta)}^2 \|h\|_{\mathcal{H}}^2 + 4\varepsilon^{1/2} \|c\|_{\zeta} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}, \zeta)} \|\xi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|h\|_{\mathcal{H}}^2 \\
& \quad + 4\|h\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}, \zeta)} \|I_{(0, \infty)}(\cdot)(I \otimes e^{-\Lambda(\cdot/\varepsilon)})W^*(cI - \widehat{L})h\|_{L^2(\mathbb{R}, \zeta \otimes \mathcal{H})} \\
& \quad + \varepsilon \|\xi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \|c\|_{\zeta}^2 \|h\|_{\mathcal{H}}^2 + \|I_{(0, \infty)}(\cdot)(I \otimes e^{-\Lambda(\cdot/\varepsilon)})W^*(cI - \widehat{L})h\|_{L^2(\mathbb{R}, \zeta \otimes \mathcal{H})}^2.
\end{aligned}$$

В приведенных оценках было использовано неравенство Шварца и тот факт, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \xi \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \right|^2 dr = \varepsilon \|\xi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Согласно сделанным предположениям правая часть доказанного выше неравенства конечна, если

$$\|I_{(0, \infty)}(\cdot)(I \otimes e^{-\Lambda(\cdot/\varepsilon)})W^*(cI - \widehat{L})h\|_{L^2(\mathbb{R}, \zeta \otimes \mathcal{H})} < \infty.$$

Оценим эту норму:

$$\begin{aligned}
& \|I_{(0, \infty)}(\cdot)(I \otimes e^{-\Lambda(\cdot/\varepsilon)})W^*(cI - \widehat{L})h\|_{L^2(\mathbb{R}, \zeta \otimes \mathcal{H})}^2 \\
& = \int_0^{\infty} \|e^{-(r/\varepsilon)(I \otimes \Lambda)}W^*(cI - L)h\|_{\mathcal{H} \zeta}^2 dr \\
& = \int_0^{\infty} \langle W^*(cI - L)h, (I \otimes \Lambda)e^{-(2r/\varepsilon)(I \otimes \Lambda)}W^*(cI - \widehat{L})h \rangle_{\mathcal{H} \zeta} dr
\end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty dr \int_1^\infty \mu(dx) x e^{-(2r/\varepsilon)x},$$

где $\mu(dx)$ является спектральной мерой самосопряженного оператора $I \otimes \Lambda$, порождаемой квадратичной формой, соответствующей вектору $W^*(cI - L)h \in \mathcal{H}^\zeta$. Вычисляя последний интеграл, получим

$$\int_0^\infty dr \int_1^\infty \mu(dx) x e^{-(2r/\varepsilon)x} = \frac{\varepsilon}{2} \int_1^\infty \mu(dx) = \frac{\varepsilon}{2} \|W^*(cI - \widehat{L})h\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}}^2 < \infty,$$

поскольку следствием предположения Н-2 является включение $\widehat{L} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}^\zeta)$.

Следовательно, $\|v_\varepsilon\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}; L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}^\zeta))} \leq \alpha(\varepsilon)$, где

$$\begin{aligned} \alpha(\varepsilon) &= 4\|v\|_{L_2(\mathbb{R}, \zeta)}^2 + 4\varepsilon^{1/2}\|c\|_\zeta\|v\|_{L^1(\mathbb{R}, \zeta)}\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + 4\|v\|_{L^2(\mathbb{R}, \zeta)}\frac{\varepsilon}{2}\|W^*(cI - \widehat{L})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}^\zeta)} \\ &\quad + \varepsilon\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\|c\|_\zeta^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}\|W^*(cI - \widehat{L})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}^\zeta)}^2. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Пусть верно следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ Н-3. *Выполнено включение*

$$(I \otimes \Lambda)^{1/2}W^*(cI - \widehat{L})\Lambda^{-1/2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}; \zeta \otimes \mathcal{H}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Если выполнено предположение Н-3, тогда для любого $\varepsilon > 0$*

- (i) $\int_{\mathbb{R}_*} \|v'_\varepsilon(r)h\|_{\mathcal{H}^\zeta}^2 dr \leq \lambda(\varepsilon)^2 \|\Lambda^{1/2}h\|_{\mathcal{H}}^2$, где $\lambda(\varepsilon)$ – некоторая постоянная;
- (ii) $\Psi_n(v_\varepsilon)h \in W_{2,1}(\mathbb{R}_*^n, \mathcal{H}_n^\zeta)$ для любого $n \geq 1$ и, кроме того,

$$\nabla \Psi(v_\varepsilon)h := \left(\sum_{k=1}^n \partial_k \Psi_n(v_\varepsilon)h \right)_{n \geq 0} \in \Gamma_{\mathcal{H}};$$

следовательно, $\Psi(v_\varepsilon)h \in \mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $h \in \text{dom}(\Lambda)$. Согласно определению тензорного произведения имеем тождество

$$(I \otimes \Lambda)e^{-t(I \otimes \Lambda)} = I \otimes \Lambda e^{-t\Lambda};$$

следовательно,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^\infty \|(I \otimes \Lambda e^{-t\Lambda})I_{(0,\infty)}(t)W^*(cI - \widehat{L})h\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}}^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty \langle (I \otimes \Lambda e^{-t\Lambda})I_{(0,\infty)}(t)W^*(cI - \widehat{L})h, (I \otimes \Lambda e^{-t\Lambda})I_{(0,\infty)}(t)W^*(cI - \widehat{L})h \rangle_{\zeta \otimes \mathcal{H}} dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty dt \int_1^\infty \mu(dx) x^2 e^{-2tx} I_{(0,\infty)}(t) = \int_1^\infty \mu(dx) x^2 \int_{-\infty}^\infty e^{-2tx} I_{(0,\infty)}(t) dt \\ &= \int_1^\infty \mu(dx) x^2 \int_0^\infty e^{-2tx} dt = \int_1^\infty \mu(dx) x^2 \left(\frac{1}{2x} \right) = \frac{1}{2} \int_1^\infty x \mu(dx), \end{aligned}$$

где $\mu(dx)$ является спектральной мерой самосопряженного оператора $I \otimes \Lambda$ и квадратичной формой, порождаемой вектором $W^*(cI - \widehat{L})h \in \zeta \otimes \mathcal{H}$. Теперь очевидно, что имеет место оценка

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_1^\infty x \mu(dx) &= \frac{1}{2} \langle W^*(cI - \widehat{L})h, (I \otimes \Lambda)W^*(cI - \widehat{L})h \rangle_{\zeta \otimes \mathcal{H}} \\ &= \frac{1}{2} \|(I \otimes \Lambda)^{1/2} W^*(cI - \widehat{L}) \Lambda^{-1/2} \Lambda^{1/2} h\| \\ &\leq \|(I \otimes \Lambda)^{1/2} W^*(cI - \widehat{L}) \Lambda^{-1/2}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}; \zeta \otimes \mathcal{H})} \|\Lambda^{1/2} h\|_{\mathcal{H}} < \infty, \end{aligned}$$

поскольку из условий предложения следует, что

$$(I \otimes \Lambda)^{1/2} W^*(cI - \widehat{L}) \Lambda^{-1/2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}; \zeta \otimes \mathcal{H}).$$

Аналогичным образом мы получаем оценку

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^\infty \|I_{(0, \infty)}(r)(I \otimes e^{-(r/\varepsilon)\Lambda})W^*(cI - \widehat{L})h\|_{\mathcal{H} \otimes \zeta}^2 dr \\ &= \int_0^\infty \langle W^*(cI - \widehat{L})h, e^{-(r/\varepsilon)(I \otimes \Lambda)} W^*(cI - \widehat{L})h \rangle_{\zeta \otimes \mathcal{H}} \\ &= \int_0^\infty dr \int_1^\infty \mu(dx) e^{-(2r/\varepsilon)x} = \int_1^\infty \mu(dx) \frac{\varepsilon}{2x} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \|(I \otimes \Lambda)^{1/2} W^*(cI - \widehat{L}) \Lambda^{-1/2} \Lambda^{1/2} h\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}}^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|W^*(cI - \widehat{L}) \Lambda^{-1/2}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \zeta \otimes \mathcal{H})}^2 \|\Lambda^{1/2} h\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим производную

$$\begin{aligned} v'_\varepsilon(r) &= V'(r) \left(1 - \xi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\right) - \frac{\Lambda}{\varepsilon} \xi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) I_{(0, \infty)}(r)(I \otimes e^{-r\Lambda/\varepsilon})W^*(cI - \widehat{L}) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \xi'\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \{cI_{(-\infty, 0)}(r) + I_{(0, \infty)}(r)(I \otimes e^{-\Lambda r/\varepsilon})W^*(cI - \widehat{L}) - V(r)\}. \end{aligned}$$

Следовательно, для $h \in \text{dom}(\Lambda)$ мы получаем оценку

$$\begin{aligned} \|v'_\varepsilon(r)h\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}} &\leq \left(2\|v'(r) \otimes h\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}} \right. \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \left| \xi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \right| \|I_{(0, \infty)}(r)(I \otimes \Lambda e^{-(r/\varepsilon)\Lambda})W^*(cI - \widehat{L})h\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}} \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \left| \xi'\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \right| \|I_{(0, \infty)}(r)\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}} \|c \otimes h\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}} \\ &\quad \left. + I_{(0, \infty)}(r) \|(I \otimes e^{-(r/\varepsilon)\Lambda})W^*(cI - \widehat{L})h - V(r)h\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}} \right)^2. \end{aligned}$$

Используя неравенство Шварца в некоторых слагаемых, а также неравенство

$$\|h\|_{\mathcal{H}} \leq \|\Lambda^{1/2} h\|_{\mathcal{H}} \leq \|\Lambda^{1/2} h\|_{\mathcal{H}},$$

мы получаем оценку

$$\int_{\mathbb{R}} \|v'_\varepsilon(r)h\|_{\zeta \otimes \mathcal{H}}^2 \leq \lambda(\varepsilon)^2 \|\Lambda^{1/2}h\|_{\mathcal{H}}^2,$$

где

$$\begin{aligned} \lambda(\varepsilon)^2 = & 4\|v'\|_{L_2(\mathbb{R}, \zeta)} + \varepsilon^{-2} \|(I \otimes \Lambda)^{1/2} W^*(cI - \widehat{L}) \Lambda^{-1/2}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \zeta \otimes \mathcal{H})}^2 + \varepsilon^{-1} \|c\|_{\zeta}^2 \|\xi'\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \\ & + \frac{\varepsilon^{-1}}{2} \|W^*(cI - \widehat{L}) \Lambda^{-1/2}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \zeta \otimes \mathcal{H})}^2 + \varepsilon^{-2} \|v\|_{L_2(\mathbb{R}, \zeta)}^2 \\ & + 4\varepsilon^{-1} \|v'\|_{L_2(\mathbb{R}, \zeta)} \|(I \otimes \Lambda)^{1/2} W^*(cI - \widehat{L}) \Lambda^{-1/2}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \zeta \otimes \mathcal{H})}^2 \\ & + 2\varepsilon^{1/2} \|c\|_{\zeta} \|v'\|_{L_2(\mathbb{R}, \zeta)} \|\xi'\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ & + \|v'\|_{L_2(\mathbb{R}, \zeta)} \|W^*(cI - \widehat{L}) \Lambda^{-1/2}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \zeta \otimes \mathcal{H})} + \|v'\|_{L_2(\mathbb{R}, \zeta)} \|v\|_{L_2(\mathbb{R}, \zeta)} \\ & + \|W^*(cI - \widehat{L}) \Lambda^{-1/2}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \zeta \otimes \mathcal{H})} \|(I \otimes \Lambda)^{1/2} W^*(cI - \widehat{L}) \Lambda^{-1/2}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \zeta \otimes \mathcal{H})} \\ & + \varepsilon^{-2} \|v\|_{L_2(\mathbb{R}, \zeta)} \|(I \otimes \Lambda)^{1/2} W^*(cI - \widehat{L}) \Lambda^{-1/2}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \zeta \otimes \mathcal{H})} \\ & + \varepsilon^{-2} \|c\|_{\zeta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \xi' \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \right|^4 dr \right)^{1/2} \|v\|_{L_2(\mathbb{R}, \zeta)} \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon^{-3/2} \|v\|_{L_2(\mathbb{R}, \zeta)} \|W^*(cI - \widehat{L}) \Lambda^{-1/2}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \zeta \otimes \mathcal{H})}. \end{aligned}$$

Первая часть предложения доказана.

Рассмотрим часть (ii). Заметим, что для $\varphi \in \mathcal{H}_{j-1}^\zeta$ выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} \|(I^{\otimes(j-1)} \otimes v'_\varepsilon(r))\varphi\|_{\mathcal{H}_j^\zeta}^2 dr \leq \lambda(\varepsilon)^2 \|(I^{\otimes(j-1)} \otimes \Lambda^{1/2})\varphi\|_{\mathcal{H}_{j-1}^\zeta}^2.$$

Эта оценка может быть доказана сначала для простых тензорных произведений, а затем для произвольных элементов в $\mathcal{H}_{j-1}^\zeta$, равномерно аппроксимируемых простыми тензорными произведениями.

Для $h \in \text{dom}(\Lambda)$ имеет место тождество

$$\begin{aligned} \partial_j \psi_n(v_\varepsilon) h(r_1, \dots, r_n) \\ = (n!)^{-1/2} (S_n \otimes I) (I^{\otimes(n-1)} \otimes v_\varepsilon(r_n)) \dots (I^{\otimes(j-1)} \otimes v'_\varepsilon(r_j)) \dots v_\varepsilon(r_1), \end{aligned}$$

следовательно, для $n \geq 1$ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla \psi_n(v_\varepsilon) h(r_1, \dots, r_n) h\|_{\zeta^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}}^2 \\ \leq \sum_{j=1}^n (n!)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \|(I^{\otimes(n-1)} \otimes v_\varepsilon(r_n)) \dots (I^{\otimes(j-1)} \otimes v'_\varepsilon(r_j)) \dots v_\varepsilon(r_1) h\|_{\zeta^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}}^2 \\ \leq n(n!)^{-1} \|v_\varepsilon\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, L_2(\mathbb{R}, \zeta \otimes \mathcal{H}))}^{2(n-j)} \lambda(\varepsilon)^2 \|v_\varepsilon\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, L_2(\mathbb{R}, \zeta \otimes \mathcal{H}))}^{2(j-1)} \|\Lambda^{1/2}h\|_{\mathcal{H}}^2 \\ \leq \frac{1}{(n-1)!} \lambda(\varepsilon)^2 \alpha(\varepsilon)^{2(n-1)} \|\Lambda^{1/2}h\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Выше мы использовали тот факт, что обе нормы

$$\|v_\varepsilon\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, L_2(\mathbb{R}, \zeta \otimes \mathcal{H}))} \quad \text{и} \quad \|v_\varepsilon\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, L_2(\mathbb{R}, \zeta \otimes \mathcal{H}))}$$

меньше постоянной $\alpha(\varepsilon)$ из предложения 4.1. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$, $\Psi_n(v_\varepsilon)h \in W_{2,1}(\mathbb{R}_*, \zeta^{\otimes n} \otimes \mathcal{H})$ и для любого $n \geq 0$

$$\|\nabla \psi(v_\varepsilon)h\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}}^2 \leq \|h\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda(\varepsilon)^2 \|\Lambda^{1/2}h\|_{\mathcal{H}}^2 \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\varepsilon)^{2(n-1)}}{(n-1)!} < \infty.$$

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Выполнены следующие утверждения:*

(а) *линейная оболочка D_0 подмножества*

$$\{\Psi(v_\varepsilon)h : v, \xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_*, \zeta), h \in \text{dom}(\Lambda) \text{ и } \varepsilon > 0\},$$

плотна в $\Gamma_{\mathcal{H}}$ и, следовательно, в $\Gamma_{\mathcal{H}}$;

(б) *элементы D_0 принадлежат подпространству $N_{0\pm}(D)$ и удовлетворяют краевому условию $(a_- - W a_+ - \widehat{L})\Psi(v_\varepsilon)h = 0$.*

Поэтому $D_0 \subset N_{0\pm}(D) \cap \Gamma_{\mathcal{H}} \subset \text{dom}(\mathcal{C})$, и оператор $\mathcal{C}$ плотно определен в $\Gamma_{\mathcal{H}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_*, \zeta)$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \|(v_\varepsilon - v)(r)h\|_{\mathcal{H}\zeta}^2 dr \\ & \leq \varepsilon \|\xi\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \|c\|_{\zeta}^2 \|h\|_{\mathcal{H}}^2 + \int \|I_{(0,\infty)}(r)(I \otimes e^{r\Lambda/\varepsilon})W^*(cI - \widehat{L})h\|_{\mathcal{H}\zeta}^2 dr \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}} \left| \xi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \right|^2 \|v(r) \otimes h\|_{\mathcal{H}\zeta}^2 dr \\ & \quad + 2 \int \left| \xi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \right|^2 \|c \otimes h\|_{\mathcal{H}\zeta} \|I_{(0,\infty)}(r)(I \otimes e^{r\Lambda/\varepsilon})W^*(cI - \widehat{L})h\|_{\mathcal{H}\zeta} dr \\ & \quad + 2 \int_{\mathbb{R}} \left| \xi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \right|^2 \|c \otimes h\|_{\mathcal{H}\zeta} \|v(r)\|_{\zeta} \|h\|_{\mathcal{H}} dr \\ & \quad + 2 \int_{\mathbb{R}} \left| \xi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \right|^2 \|v(r) \otimes h\|_{\mathcal{H}\zeta} \|I_{(0,\infty)}(r)(I \otimes e^{r\Lambda/\varepsilon})W^*(cI - \widehat{L})h\|_{\mathcal{H}\zeta} dr \\ & \leq \varepsilon \|\xi\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \|c\|_{\zeta}^2 \|h\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|W^*(cI - \widehat{L})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}\zeta)}^2 \|h\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & \quad + \varepsilon \left(\sup_r \|v(r)\|_{\zeta}^2 \right) \|\xi\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \|h\|_{\mathcal{H}}^2 + (2\varepsilon)^{1/2} \|c\|_{\zeta} \|W^*(cI - \widehat{L})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}\zeta)} \|h\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & \quad + 2\varepsilon \left(\sup_r \|v(r)\|_{\zeta} \right) \|\xi\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \|c\|_{\zeta} \|h\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & \quad + (2\varepsilon)^{1/2} \|v\|_{L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}\zeta)}^2 \|W^*(cI - \widehat{L})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}\zeta)} \|h\|_{\mathcal{H}}^2 = \sigma(\varepsilon) \|h\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\|v_\varepsilon - v\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}\zeta))} = \sigma(\varepsilon)^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

По аналогии с предложением 3.3 мы получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^n} \|(\Psi_n(v_\varepsilon) - \Psi_n(V))h(r)\|_{\mathcal{H}_n^\zeta}^2 dr_1 \dots dr_n \\
 & \leq \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} \left\| \prod_{l=n}^{k+1} (I^{\otimes(l-1)} \otimes v_\varepsilon(r)) (I^{\otimes(k-1)} \otimes (v_\varepsilon - v)(r_k)) \prod_{j=k-1}^1 (I^{\otimes(j-1)} \otimes v(r_j)) h \right\|_{\mathcal{H}_n^\zeta}^2 dr \\
 & \leq \sum_{k=1}^n \|v_\varepsilon\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}^\zeta))}^{2(n-k)} \|v_\varepsilon - v\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}^\zeta))}^2 \|v\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}^\zeta))}^{2(k-1)} \|h\|_{\mathcal{H}} \\
 & \leq \sum_{k=1}^n \alpha(\varepsilon)^{2(n-k)} \|v\|_{L_2(\mathbb{R}, \zeta)} \sigma(\varepsilon) \|h\|_{\mathcal{H}}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что из равенства

$$\int_{\mathbb{R}} \|v(r)h\|_{\mathcal{H}^\zeta}^2 dr = \|v\|_{L_2(\mathbb{R}, \zeta)}^2 \|h\|_{\mathcal{H}}^2$$

следует, что $\|v\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}^\zeta))} = \|v\|_{L_2(\mathbb{R}, \zeta)}$. Поскольку $\sigma(\varepsilon) \rightarrow 0$, плотность D_0 следует из того факта, что линейная оболочка псевдоэкспоненциальных векторов вида $\Psi(V)h$, $\text{con } h \in \mathcal{H}$ и $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_*, \zeta)$, плотна в $\Gamma_{\mathcal{H}}$.

Для доказательства второй части предложения заметим, что согласно определению a_- для любого $n \geq 1$, $r \in \mathbb{R}^{n-1}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned}
 & (a_- \Psi(v_\varepsilon)h)_{(n-1)}(r) \\
 & = \sqrt{n} A_n^- \Psi_n(v_\varepsilon)h(r) \\
 & = \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{n!}} (S_n \otimes I) (I^{\otimes(n-1)} \otimes v_\varepsilon(0^-)) (I^{\otimes(n-2)} \otimes v_\varepsilon(r_{n-1})) \dots v_\varepsilon(r_1) h \\
 & = \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} (S_n \otimes I) (I^{\otimes(n-1)} \otimes c) (I^{\otimes(n-2)} \otimes v_\varepsilon(r_{n-1})) \dots v_\varepsilon(r_1) h \\
 & = (I^{\otimes(n-1)} \otimes c) \Psi_{n-1}(v_\varepsilon)h(r),
 \end{aligned}$$

где $v_\varepsilon(0^-) = c$ и операторы A_n^s и $(S_n \otimes I)$ коммутируют, поскольку они действуют в разных пространствах. Тогда

$$\begin{aligned}
 \|a_- \Psi(v_\varepsilon)h\|_{\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}}}^2 & = \sum_{n \geq 0} \int_{\mathbb{R}^{(n-1)}} \|(I^{\otimes(n-1)} \otimes c) \Psi_{n-1}(v_\varepsilon)h(r_1, \dots, r_n)\|_{\mathcal{H}_n^\zeta}^2 \\
 & \leq \sum_{n \geq 1} \|c\|_{\zeta}^2 \|\Psi_{n-1}(v_\varepsilon)h(r_1, \dots, r_n)\|_{\mathcal{H}_{n-1}^\zeta}^2 < \infty,
 \end{aligned}$$

где

$$\|I^{\otimes(n-1)} \otimes c\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_{n-1}^\zeta, \mathcal{H}_n^\zeta)} = \|c\|_{\zeta}.$$

Это доказывает, что $\Psi(0^-)h \in N_{0-}(D)$; аналогичным образом можно показать, что $\Psi(0^-)h \in N_{0+}(D)$.

Теперь, используя (1) и имея в виду равенство $v_\varepsilon(0^+) = W^*(cI - \widehat{L})$, мы получаем

$$\begin{aligned} (a_- \Psi(v_\varepsilon)h)_{(n-1)}(r) &= (I^{\otimes(n-1)} \otimes c) \Psi_{n-1}(v_\varepsilon)h(r) \\ &= (I^{\otimes(n-1)} \otimes (Wv_\varepsilon(0^+) + \widehat{L})) \Psi_{n-1}(v_\varepsilon)h(r) \\ &= ((Wa_+ + \widehat{L})\Psi(v_\varepsilon)h)_{n-1}(r). \end{aligned}$$

В силу линейности операторов отсюда следует, что $(a_- - Wa_+ - L)\Psi(v_\varepsilon)h = 0$.

5. Симметричность оператора $\mathcal{C}$. Нетрудно выписать формулы интегрирования по частям или формулу Грина (см. [22; с. 2]) для каждой камеры Q_m . Если η_m является внешней нормалью к ∂Q_m , то для $u, v \in W_{2,1}(\mathbb{R}_*^n; \mathcal{K}_n^\zeta)$ выполнено тождество

$$\begin{aligned} \int_{Q_m} \left\langle u, \sum_{l=1}^n \partial_l v \right\rangle_{\mathcal{K}_n^\zeta} &= - \int_{Q_m} \left\langle \sum_{l=1}^n \partial_l u, v \right\rangle_{\mathcal{K}_n^\zeta} \\ &\quad + \sum_{l=1}^n \int_{\partial Q_m} \langle \eta_m, e_l \rangle \langle u / \partial Q_m, v / \partial Q_m \rangle_{\mathcal{K}_n^\zeta}. \end{aligned}$$

Заметим, что скалярное произведение $\langle \eta_m, e_l \rangle$ отлично от нуля только на $\partial Q_m \cap \{r_l = 0\}$, поэтому $\sum_{l=1}^n \langle \eta_m, e_l \rangle$ может иметь только два значения: ± 1 .

Теперь для $u, v \in W_{2,1}^s(\mathbb{R}_*^n; \mathcal{K}_n^\zeta)$, суммируя по 2^n n -частичным камерам $Q_m \subset \mathbb{R}_*^n$, получаем следующую формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \left\langle u, \sum_{l=1}^n \partial_l v \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n; \mathcal{K}_n^\zeta)} &= - \left\langle \sum_{l=1}^n \partial_l u, v \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n; \mathcal{K}_n^\zeta)} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{2^n} \sum_{l=1}^n \int_{\partial Q_m} \langle \eta_m, e_l \rangle \langle u / \partial Q_m, v / \partial Q_m \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1}; \mathcal{K}_n^\zeta)} \\ &= - \left\langle \sum_{l=1}^n \partial_l u, v \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n; \mathcal{K}_n^\zeta)} + n \langle u / \{r_n = 0^-\}, v / \{r_n = 0^-\} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1}; \mathcal{K}_n^\zeta)} \\ &\quad - n \langle u / \{r_n = 0^+\}, v / \{r_n = 0^+\} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1}; \mathcal{K}_n^\zeta)}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5.1. Для любого $s \in \{0^-, 0^+\}$ существует такое семейство операторов $(a_j(s))_{n \geq 1}$, $a_j(s): N_{0^\pm}(\mathbb{D}) \rightarrow \Gamma_{\mathcal{H}}$, что для любых $u, v \in N_{0^\pm}(\mathbb{D}) \nabla$,

- (i) $a(s)u = \sum_j z_j \otimes a_j(s)u$,
- (ii) $\langle a(s)u, a(s)v \rangle_{\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}}} = \sum_j \langle a_j(s)u, a_j(s)v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}}^2$,
- (iii) $\sum_j \langle L_j u, a_j(0^-)v \rangle_{\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}}} = \sum_j \langle u, L_j^* a_j(0^-)v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} = \langle u, \widehat{L}^* a_- v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(z_{j_1} \otimes_s \cdots \otimes_s z_{j_n})$ – ортонормированный базис в $\zeta^{\otimes_s n}$ и $(h_k)_{k \geq 1}$ является ортонормированным базисом в $\mathcal{H}$, то для любого $u \in N_{0^\pm}(\mathbb{D})$ имеем

$$\begin{aligned} (a(s)u)_n(t_1, \dots, t_n) &= \sum_{j, j_1, \dots, j_n, k} \alpha_{j, j_1, \dots, j_n, k}(t_1, \dots, t_n) z_j \otimes_s z_{j_1} \otimes_s \cdots \otimes_s z_{j_n} \otimes h_k \\ &= \sum_j z_j \otimes \sum_{j_1, \dots, j_n, k} \alpha_{j, j_1, \dots, j_n, k}(t_1, \dots, t_n) z_{j_1} \otimes_s \cdots \otimes_s z_{j_n} \otimes h_k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(a_j(s)u)_n = \sum_{j_1, \dots, j_n, k} \alpha_{j, j_1, \dots, j_n, k}(t_1, \dots, t_n) z_{j_1} \otimes_s \dots \otimes_s z_{j_n} \otimes h_k,$$

где $a_j(s)u = ((a_j(s)u)_n)$. После несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \infty &> \|(a(s))_n u\|_{L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_{n+1}^\zeta)}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|(a(s)u)_n(t)\|_{\mathcal{H}_{n+1}^\zeta}^2 d^n t \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \sum_j z_j \otimes (a(s)u)_n(t) \right\|_{\mathcal{H}_n^\zeta}^2 d^n t \\ &= \sum_j \|z_j\|^2 \int_{\mathbb{R}^n} \|(a(s)u)_n(t)\|_{\mathcal{H}_n^\zeta}^2 d^n t \\ &= \sum_j \|(a_j(s)u)_n\|_{L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_n^\zeta)}^2 = \left\| \sum_j z_j \otimes (a_j(s)u)_n \right\|_{\zeta \otimes L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_n^\zeta)}^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Эта оценка доказывает сходимость ряда в правой части. Теперь, используя оценку (1), мы получаем, что

$$\begin{aligned} \|a(s)u\|_{\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}}}^2 &= \sum_{n \geq 0} \|(a(s)u)_n\|_{L_2(\mathbb{R}^{(n-1)}, \mathcal{H}_n^\zeta)}^2 \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_j \|(a_j(s)u)_n\|_{L_2(\mathbb{R}^{(n-1)}, \mathcal{H}_{n-1}^\zeta)}^2 = \sum_j \|a_j(s)u\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}}^2, \end{aligned}$$

и поэтому утверждение (ii) следует из тождества поляризации.

Чтобы доказать (iii) заметим, что

$$\begin{aligned} \langle u, \hat{L}^* a_- v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} &= \langle u, \hat{L}^* \sum_j z_j \otimes a_j(0^-) v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} \\ &= \sum_{j,k} \langle z_k, z_j \rangle_\zeta \langle u, L_k^* a_j(0^-) v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} = \sum_j \langle L_j u, a_j(0^-) v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}}. \end{aligned}$$

Согласно утверждению (ii) интегрирование по частям для $u, v \in N_{0\pm}(\mathbf{D})$ дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \langle u, \nabla v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} &= -\langle \nabla u, v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} + \langle a_- u, a_- v \rangle_{\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}}} - \langle a_+ u, a_+ v \rangle_{\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}}} \\ &= -\langle \nabla u, v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} + \sum_j \langle a_j(0^-) u, a_j(0^-) v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} - \sum_j \langle a_j(0^+) u, a_j(0^+) v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}}. \end{aligned} \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 5.2. *Оператор $\mathcal{C}_0$ симметричен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v = \Psi(v_\varepsilon)h$ и $u = \Psi(u_\varepsilon)h$ — элементы из $\mathbf{D}_0$. Тогда краевое условие $W a_+ u = a_- u - \hat{L}u$ имеет эквивалентную форму

$$W \sum_j z_j \otimes a_j(0^+) u = \sum_j z_j (a_j(0^-) - L_j) u.$$

Поэтому,

$$\begin{aligned}
 \sum_j \langle a_j(0^+)u, a_j(0^+)v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} &= \sum_{j,j'} \langle z_j, z_{j'} \rangle_{\zeta} \langle a_j(0^+)u, a_j(0^+)v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} \\
 &= \left\langle W \left(\sum_j z_j \otimes a_j(0^+)u \right), W \left(\sum_{j'} z_{j'} \otimes a_{j'}(0^+)u \right) \right\rangle_{\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}}} \\
 &= \left\langle \sum_j z_j \otimes (a_j(0^-) - L_j)u, \sum_{j'} z_{j'} \otimes (a_{j'}(0^-) - L_{j'})v \right\rangle_{\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}}} \\
 &= \sum_{j,j'} \langle z_j, z_{j'} \rangle_{\zeta} \langle (a_j(0^-) - L_j)u, (a_{j'}(0^-) - L_{j'})v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} \\
 &= \sum_j \langle (a_j(0^-) - L_j)u, (a_j(0^-) - L_j)u \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}}.
 \end{aligned}$$

Используя это тождество и формулу интегрирования по частям (2), после некоторых преобразований получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned}
 \langle u, \mathcal{C}_0 v \rangle &= i \langle u, (\nabla + G^* - L^* a_-)v \rangle \\
 &= -\langle \nabla u, v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} + i \sum_j \langle a_j(0^-)u, a_j(0^-)v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} \\
 &\quad - i \sum_j \langle a_j(0^+)u, a_j(0^+)v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} + i \langle u, G^* v \rangle - i \langle u, L^* a_- v \rangle \\
 &= -i \langle \nabla u, v \rangle + i \sum_j \langle a_j(0^-)u, a_j(0^-)v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} \\
 &\quad - i \sum_j \langle (a_j(0^-) - L_j)u, (a_j(0^-) - L_j)u \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} + i \langle u, G^* v \rangle - i \langle u, L^* a_- v \rangle \\
 &= -i \langle \nabla u, v \rangle - i \sum_j \langle L_j u, L_j v \rangle + i \sum_j \langle a_j(0^-)u, L_j v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} \\
 &\quad + i \sum_j \langle L_j u, a_j(0^-)v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} + i \langle u, G^* v \rangle - i \langle u, L^* a_- v \rangle \\
 &= -i \langle \nabla u, v \rangle + i \sum_j \langle L_j^* a_j(0^-)u, v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} - i \langle (G^* + G)u, v \rangle + i \langle u, G^* v \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} \\
 &= \langle i(\nabla - L^* a_- + G^*)u, v \rangle = \langle \mathcal{C}_0 u, v \rangle,
 \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем фактом, что $G + G^* = \sum_j L_j^* L_j$.

6. Пример: процесс двухфотонного рождения и уничтожения. Явление поглощения и эмиссии фотонных пар является одним из фундаментальных механизмов взаимодействия материи и энергии. Мы рассмотрим модель этого явления, следуя недавней работе [23], где изучаются инвариантные состояния квантовой марковской полугруппы, соответствующей этому процессу в случае $\lambda_1 \leq \lambda_0$. В рассматриваемом ниже примере $|J| = 2$, $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$ и $\zeta = \mathbb{C}^2$, так что можно считать, что $J = \{0, 1\}$ и положить $W_{j,k} = \delta_{j,k} I$, $j, k \in J$. Операторы $\{L_j\}_{j \in J}$ заданы соотношениями $L_0 = \lambda_0 a_0^2$, $L_1 = \lambda_1 a_1^2$, где $a_1 = a^\dagger$, $a_0 = a$ являются операторами рождения и уничтожения соответственно, $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 \geq 0$ и $\lambda_1 \leq \lambda_0$.

Напомним, что эти операторы действуют на элементы $(e_n)_{n \geq 1}$ канонического базиса в $l^2(\mathbb{N})$ по правилам

$$a^\dagger e_{n-1} = a_1 e_{n-1} = \sqrt{n} e_n, \quad a e_n = a_0 e_n = \sqrt{n} e_{n-1};$$

кроме того, они удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям $[a, a^\dagger] = 1$. В рассматриваемом примере самосопряженный оператор H задан для любого $\omega \in \mathbb{R}$ соотношением

$$H: \text{dom}(N^2) \rightarrow l^2, \quad H = \omega a_1^2 a_0^2 = \omega N(N-1),$$

где $N = a^\dagger a = a_1 a_0$ является оператором числа частиц, плотно определенным на

$$\text{dom}(N) = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l^2 : \sum_{n=1}^\infty n^2 |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

Поскольку операторы L_0 , L_1 и H являются неограниченными и не коммутируют, этот пример не охватывается известной теорией [18]–[20].

Введем следующие обозначения:

$$z_0 = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_1 = |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

для канонического базиса в $\mathbb{C}^2$. Нетрудно видеть, что

$$\text{dom}(L_j) = \text{dom}(N) \supseteq \text{dom}(N^2) \supseteq \text{dom}(N^3) \supseteq \dots$$

Пусть

$$\mathcal{K} = \text{dom}(N^2) = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l^2 : \sum_{n=1}^\infty n^4 |x_n|^2 < \infty \right\}$$

с нормой $\|x\|_{\mathcal{K}} = \|N^2 x\|_{\mathcal{H}}$; т.е., $\Lambda = N^4$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Имеют место следующие свойства:*

- (i) $L_j \in \mathcal{B}(\mathcal{K}; \mathcal{H})$ для любого $j \in J$;
- (ii) $L_j^* L_j \in \mathcal{B}(\mathcal{K}; \mathcal{H})$ для любого j , поэтому $\sum_j L_j^* L_j \in \mathcal{B}(\mathcal{K}; \mathcal{H})$;
- (iii) $H \in \mathcal{B}(\mathcal{K}; \mathcal{H})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Для $x \in \mathcal{K}$, $x = \sum_{n \geq 1} x_n e_n$ имеет место равенство

$$L_0 x = \lambda_0 \sum_{n=1}^\infty x_n \sqrt{n(n-1)} e_{n-2},$$

следовательно,

$$\|L_0 x\|_{l^2}^2 = \lambda_0^2 \sum_{n=1}^\infty n(n-1) |x_n|^2 \leq \lambda_0^2 \sum_{n=1}^\infty n^4 |x_n|^2 = \lambda_0^2 \|N^2 x\|_{l^2}^2 = \lambda_0^2 \|x\|_{\mathcal{K}}^2.$$

Поэтому $L_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{K}; \mathcal{H})$; более точно, $\|L_0\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K}; \mathcal{H})} \leq \lambda_0$. Аналогично можно доказать, что $L_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{K}; \mathcal{H})$ и $\|L_1\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K}; \mathcal{H})} \leq \lambda_1$.

(ii) Для $x \in \mathcal{K}$ имеем $L_0 x, L_1 x \in \text{dom } L_0^* = \text{dom } L_1^* = \text{dom } N$ и

$$L_0^* L_0 x = \lambda_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) x_n e_n, \quad L_1^* L_1 x = \lambda_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) x_n e_n.$$

Следовательно,

$$\|L_0^* L_0 x\|_{\mathcal{H}}^2 = \lambda_0^4 \sum_{n=1}^{\infty} n^2(n-1)^2 |x_n|^2 \leq \lambda_0^4 \sum_{n=1}^{\infty} n^4 |x_n|^2 = \lambda_0^4 \|N^2 x\|_{\mathcal{H}}^2 = \lambda_0^4 \|x\|_{\mathcal{K}}^2.$$

Аналогичным образом доказывается следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|L_1^* L_1 x\|_{\mathcal{H}}^2 &= \lambda_1^4 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 (n+2)^2 |x_n|^2 \\ &\leq \lambda_1^4 \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)^4 |x_n|^2 < 81 \lambda_1^4 \sum_{n=1}^{\infty} n^4 |x_n|^2 = 81 \lambda_1^4 \|N^2 x\|_{\mathcal{H}}^2 = 81 \lambda_1^4 \|x\|_{\mathcal{K}}^2. \end{aligned}$$

Поэтому $\sum_j L_j^* L_j \in \mathcal{B}(\mathcal{K}; \mathcal{H})$.

(iii) Доказательство того, что $H \in \mathcal{B}(\mathcal{K}; \mathcal{H})$, аналогично доказательству предыдущего утверждения (ii).

Из предложения 6.1 следует, что предположения Н-1 и Н-2 выполнены. Докажем также, что выполнено предположение Н-3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Оператор*

$$(I \otimes \Lambda)^{1/2} W^*(cI - L) \Lambda^{-1/2}: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}^2 \otimes l^2$$

корректно определен и ограничен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1 \in \mathcal{K}$ и $x = N^{-2} x_1 \in \text{dom}(N^4)$, тогда

$$(I \otimes N^2)(cI - L)N^{-2} x_1 = (I \otimes N^2)(cI - L)x = \sum_{j \in J} \{c_j |j\rangle \otimes N^2 x - \lambda_j |j\rangle \otimes N^2 a_j^2 x\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|(I \otimes N^2)(cI - L)N^{-2} x_1\|_{\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}} &= \left\| \sum_{j \in J} \{c_j |j\rangle \otimes N^2 x - \lambda_j |j\rangle \otimes N^2 a_j^2 x\} \right\|_{\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}} \\ &\leq \sum_{j \in J} \{\|c_j |j\rangle \otimes N^2 x\|_{\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}} + \|\lambda_j |j\rangle \otimes N^2 a_j^2 x\|_{\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}}\} \\ &= \sum_{j \in J} \{c_j \|N^2 x\|_{\mathcal{H}} + \lambda_j \|N^2 a_j^2 x\|_{\mathcal{H}}\}. \end{aligned}$$

Учитывая коммутационное соотношение $[a_0, a_1] = 1$, нетрудно видеть, что $N^2 a_0^2 = a_0^2 (N-2)^2$, и, используя тот факт, что $\|a_0\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K}; \mathcal{H})} \leq 1$, мы получаем оценку

$$\|N^2 a_0^2 x\|_{l^2} = \|a_0^2 (N-2)^2 x\|_{l^2} \leq \|(N-2)^2 N^{-2} x_1\|_{\mathcal{K}}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|x_1\|_{\mathcal{H}} + 4\|N^{-1}x_1\|_{\mathcal{H}} + 4\|N^{-2}x_1\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|x_1\|_{\mathcal{H}} + 4\|N^2x_1\|_{l^2} + 4\|x_1\|_{\mathcal{H}} = 9\|x_1\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом проверяется, что

$$\|N^2a_1^2x\|_{l^2} \leq \|(N+2)^2N^{-2}x_1\|_{\mathcal{H}} \leq 9\|x_1\|_{\mathcal{H}}.$$

Отсюда следует, что

$$(I \otimes N^2)(cI - L)N^{-2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}; \mathbb{C}^2 \otimes l^2).$$

Существенная самосопряженность оператора $\mathcal{C}$ может быть доказана с помощью конструкции минимальной квантовой динамической полугруппы [18].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. R. Parthasaraty, *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Monographs in Mathematics, **85**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [2] A. Frigerio, “Covariant Markov dilations of quantum dynamical semigroups”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **21**:3 (1985), 657–675.
- [3] A. Frigerio, “Construction of stationary quantum Markov processes through quantum stochastic calculus”, *Quantum Probability and Applications*, II (Heidelberg, 1984), Lecture Notes in Math., **1136**, Springer-Verlag, Berlin, 1985, 207–222.
- [4] H. Maassen, “Quantum Markov processes on Fock space described by integral kernels”, *Quantum Probability and Applications*, II (Heidelberg, 1984), Lecture Notes in Math., **1136**, Springer-Verlag, Berlin, 1985, 361–374.
- [5] J.-L. Journe, “Structure des cocycles markoviens sur l’espace de Fock”, *Probab. Theory Related Fields*, **75**:2 (1987), 291–316.
- [6] L. Accardi, J.-L. Journe, J. M. Lindsay, “On multi-dimensional Markovian cocycles”, *Quantum Probability and Applications*, IV (Rome, 1987), Lecture Notes in Math., **1396**, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 59–67.
- [7] D. Applebaum, “Unitary evolutions and horizontal lifts in quantum stochastic calculus”, *Comm. Math. Phys.*, **140**:1 (1991), 63–80.
- [8] F. Fagnola, “On quantum stochastic differential equations with unbounded coefficients”, *Probab. Theory Related Fields*, **86**:4 (1990), 501–516.
- [9] F. Fagnola, “Characterization of isometric and unitary weakly differentiable cocycles in Fock space”, *Quantum Probability and Related Topics*, QP-PQ, **VIII**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1993, 143–164.
- [10] F. Fagnola, S. J. Wills, “Solving quantum stochastic differential equations with unbounded coefficients”, *J. Funct. Anal.*, **198**:2 (2003), 279–310.
- [11] A. Mohari, K. R. Parthasarathy, “A quantum probabilistic analogue of Feller’s condition for the existence of unitary Markovian cocycles in Fock spaces”, *Statistics and Probability: A Raghu Raj Bahadur Festschrift*, Wiley Eastern, New Delhi, 1993, 475–497.
- [12] B. R. Bhat, K. B. Sinha, “A stochastic differential equation with time-dependent and unbounded operator coefficients”, *J. Funct. Anal.*, **114**:1 (1993), 12–31.
- [13] F. Fagnola, K. B. Sinha, “Scattering theory for unitary cocycles”, *Stochastic Processes*, Springer-Verlag, New York, 1993, 81–88.
- [14] J. M. Lindsay, S. J. Wills, *Construction of some quantum stochastic operator cocycles by the semigroup method*, [arXiv: math.FA/0606545](https://arxiv.org/abs/math.FA/0606545).
- [15] Г. В. Рыжиков, “Резольвентные пределы квантовой эволюции открытых систем”, *Матем. заметки*, **80**:3 (2006), 476–480.

- [16] W. von Waldenfels, “Symmetric differentiation and Hamiltonian of a quantum stochastic process”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **8**:1 (2005), 73–116.
- [17] A. M. Chebotarev, *Lectures on Quantum Probability*, Aportaciones Matemáticas: Textos, **14**, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2000.
- [18] А. М. Чеботарев, “Что такое квантовое стохастическое уравнение с точки зрения функционального анализа?”, *Матем. заметки*, **71**:3 (2002), 448–469.
- [19] M. Gregoratti, “On the Hamiltonian operator associated to some quantum stochastic differential equations”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **3**:4 (2000), 483–503.
- [20] M. Gregoratti, “The Hamiltonian operator associated with some quantum stochastic evolutions”, *Comm. Math. Phys.*, **222**:1 (2001), 181–200.
- [21] L. Accardi, “Noise and dissipation in quantum theory”, *Rev. Math. Phys.*, **2**:2 (1990), 127–176.
- [22] E. DiBenedetto, *Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [23] F. Fagnola, R. Quezada, “Two photon absorption and emission process”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **8**:4 (2005), 573–591.
- [24] M. Gregoratti, “Traces of Sobolev functions with one square integrable directional derivative”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **29**:2 (2006), 157–171.

Роберто Гесада-Баталла

Universidad Autónoma Metropolitana, México, Мексика

E-mail: roqb@xanum.uam.mx

Поступило

25.08.2006

Освальдо Гонзалес Гасиола

Universidad Autónoma Metropolitana, México, Мексика