Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Курышова, Обратная спектральная задача для
интегродифференциальных операторов, *Матем. за-
метки*, 2007, том 81, выпуск 6, 855–866

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3736>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 08:41:38

Обратная спектральная задача для интегродифференциальных операторов

Ю. В. Курышова

В работе изучается обратная спектральная задача на конечном интервале для интегродифференциального оператора ℓ , представляющего собой возмущение оператора Штурма–Лиувилля интегральным оператором Вольтерра. Потенциал $q \in L_2[0, \pi]$, ядро интегрального возмущения суммируемо в своей области определения. Получено локальное решение обратной задачи по восстановлению потенциала q при известном ядре интегрального возмущения и доказана устойчивость такого решения. В качестве спектральных данных взяты спектры двух операторов, заданных выражением ℓ и двумя парами краевых условий, совпадающими в одной из конечных точек.

Библиография: 11 названий.

Введение. В статье исследуется обратная задача спектрального анализа для следующего интегродифференциального оператора:

$$\ell y \equiv -y'' + q(x)y + \int_0^x M(x, t)y(t) dt, \quad x \in [0, \pi].$$

Обратная задача (ОЗ) состоит в восстановлении потенциала q по спектрам двух операторов L_1 и L_2 , заданных интегродифференциальным выражением ℓ и краевыми условиями

$$y(0) = y^{(i-1)}(\pi) = 0, \quad i = 1, 2;$$

при этом функция $M(x, t)$ полагается известной.

Поставленная задача является обобщением известной обратной задачи Борга [1] о восстановлении потенциала оператора Штурма–Лиувилля $\ell_0 y \equiv -y'' + q(x)y$ по спектрам двух операторов. Более подробно об обратных задачах спектрального анализа см. монографии [2]–[4] и литературу в них. В прямых спектральных задачах интегральное слагаемое играет подчиненную роль по отношению к дифференциальной компоненте, поэтому ℓ наследует многие спектральные свойства оператора ℓ_0 . В обратных же задачах наличие “последствия” не позволяет применять напрямую основные методы решения обратных задач, как то, метод оператора преобразования или метод спектральных отображений, что приводит к существенному усложнению исследования.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00007).

В настоящее время история обратных задач для интегро-дифференциальных операторов сравнительно невелика. В различных постановках они рассматривались в работах [5], [6]. В частности, в последней работе восстанавливалась функция $M(x, t) = M(x - t)$ по спектру, при известной функции q . Отметим, что различные вопросы, связанные с исследованием разнообразных классов интегродифференциальных операторов и связанных с ними операторов с отклоняющимся аргументом, изучались в работах многих авторов, см. [7], [8] и литературу в них.

В данной работе получено локальное решение обратной задачи восстановления оператора ℓ по двум спектрам. Методом исследования является развитие идей Борга – сведение обратной задачи к нелинейному интегральному уравнению, так называемому основному уравнению обратной задачи. Главные результаты статьи составляют теорема 1 – о разрешимости основного уравнения обратной задачи, и теорема 2, где конструктивно построено решение обратной задачи и доказана его устойчивость.

1. Вспомогательные результаты. Рассмотрим краевые задачи $L_1 = L_1(q, M)$, $L_2 = L_2(q, M)$, порождаемые дифференциальным уравнением

$$\ell y = \lambda y, \quad x \in [0, \pi], \quad (1)$$

и соответственно краевыми условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad (2)$$

$$y(0) = y'(\pi) = 0. \quad (3)$$

Пусть q, M – вещественные функции, $q(x) \in L_2(0, \pi)$, $M(x, t)$ – интегрируемая функция на множестве $\{(x, t) : 0 \leq t \leq x \leq \pi\}$. Не нарушая общности, будем предполагать, что $\omega := 1/(2\pi) \int_0^\pi q(x) dx = 0$, чего всегда можно добиться сдвигом спектра. Известным методом (см., например, [3]) можно показать, что операторы L_1 и L_2 имеют счетное множество собственных значений $\{\lambda_{n1}\}_1^\infty, \{\lambda_{n2}\}_1^\infty$ соответственно и справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_{n1}} = \rho_{n1} = n + \frac{\kappa_{n1}}{n}, \quad \sqrt{\lambda_{n2}} = \rho_{n2} = n - \frac{1}{2} + \frac{\kappa_{n2}}{n}, \\ \{\kappa_{ni}\}_{n=1}^\infty \in l_2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Из асимптотики следует, что, начиная с некоторого номера, собственные значения задач L_1 и L_2 простые, но мы ограничимся случаем, когда все собственные значения простые. Общий случай рассматривается аналогично, но требует более громоздких вычислений.

Краевая задача $L_i^* = L_i^*(q, M)$:

$$\ell^* z \equiv -z'' + q(x)z + \int_x^\pi M(t, x)z(t) dt = \lambda z, \quad (5)$$

$$z(0) = z^{(i-1)}(\pi) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

называется *сопряженной* к задаче L_i . Так как q и M – вещественные функции, то спектры задач L_i и L_i^* совпадают.

Пусть $S(x, \lambda)$ есть решение уравнения (1) с начальными условиями $S(0, \lambda) = 0$, $S'(0, \lambda) = 1$, а $S^*(x, \lambda)$, $C^*(x, \lambda)$ – решения уравнения (5) с начальными условиями $S^*(\pi, \lambda) = 0$, $S^{*'}(\pi, \lambda) = -1$ и $C^*(\pi, \lambda) = 1$, $C^{*'}(\pi, \lambda) = 0$ соответственно.

Введем функции $\{\xi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\xi_{2n}(x) &= 1 - \frac{2\lambda_{n1}}{b_{n1}} S^*(x, \lambda_{n1}) S(x, \lambda_{n1}), \\ \xi_{2n-1}(x) &= 1 - \frac{2\lambda_{n2}}{b_{n2}} C^*(x, \lambda_{n2}) S(x, \lambda_{n2}),\end{aligned}\tag{7}$$

где числа b_{ni} определяются соотношениями

$$b_{n1} S^0(x, \mu_{n1}) = S^{0*}(x, \mu_{n1}), \quad b_{n2} S^0(x, \mu_{n2}) = C^{0*}(x, \mu_{n2}).\tag{8}$$

Функции S^0 , S^{0*} , C^{0*} задаются аналогично функциям S , S^* , C^* , но для уравнения с $M \equiv 0$, а $\{\mu_{ni}\}_{n=1}^\infty$ – собственные значения задач $L_i^0 \equiv L_i(q, 0)$, $i = 1, 2$.

ЛЕММА 1. *Для функций $\{\xi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ равномерно по $x \in [0, \pi]$ верна следующая асимптотическая формула:*

$$\xi_n(x) = \cos nx + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty.\tag{9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda = \rho^2$. Как и в случае уравнения Штурма–Лиувилля, известным методом (см., например, [3]) можно показать, что для функций S и S^* справедливы представления

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x K(x, t) \frac{\sin \rho t}{\rho} dt,\tag{10}$$

$$S^*(x, \lambda) = \frac{\sin \rho(\pi - x)}{\rho} + \int_x^\pi G(x, t) \frac{\sin \rho(\pi - t)}{\rho} dt,\tag{11}$$

где ядра $K(x, t)$, $G(x, t)$ непрерывные, не зависящие от ρ функции.

Положим в (10), (11) $\lambda = \lambda_{n1}$, тогда, используя формулы (3), получим

$$S(x, \lambda_{n1}) = \frac{\sin \rho_{n1}}{\rho_{n1}} + O\left(\frac{1}{\rho_{n1}^2}\right), \quad S^*(x, \lambda_{n1}) = \frac{\sin \rho_{n1}(\pi - x)}{\rho_{n1}} + O\left(\frac{1}{\rho_{n1}^2}\right),$$

где $\lambda_{n1} := \rho_{n1}^2$. Подставив отсюда выражения для функций S и S^* в равенства (7) для $\xi_{2n}(x)$, получим

$$\begin{aligned}\xi_{2n}(x) &= 1 - \frac{2\rho_{n1}^2}{b_{n1}} \left(\frac{\sin \rho_{n1} x}{\rho_{n1}} + O\left(\frac{1}{\rho_{n1}^2}\right) \right) \left(\frac{\sin \rho_{n1}(\pi - x)}{\rho_{n1}} + O\left(\frac{1}{\rho_{n1}^2}\right) \right) \\ &= 1 - \frac{2\rho_{n1}^2}{b_{n1}} \left(\frac{1}{\rho_{n1}^2} \sin \rho_{n1} x \sin \rho_{n1}(\pi - x) + O\left(\frac{1}{\rho_{n1}^3}\right) \right).\end{aligned}$$

В силу соотношений (4) для чисел ρ_{n1} имеем равномерно по x

$$\sin \rho_{n1} x = \sin nx + O(n^{-1}), \quad \sin \rho_{n1}(\pi - x) = \sin(\pi - x)n + O(n^{-1}).$$

Тогда равенство для $\xi_{2n}(x)$ примет вид

$$\xi_{2n}(x) = 1 - \frac{2}{b_{n1}} ((\sin nx + O(n^{-1}))(\sin(\pi - x)n + O(n^{-1})) + O(n^{-1})).$$

Для чисел b_{ni} , которые являются коэффициентами пропорциональности линейно зависимых решений уравнения Штурма–Лиувилля можно показать, что при $n \rightarrow \infty$

$$b_{n1} = (-1)^{n-1} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (12)$$

$$b_{n2} = (-1)^{n-1} \left(n - \frac{1}{2}\right) + O(1). \quad (13)$$

Поэтому для $\xi_{2n}(x)$ получим

$$\xi_{2n}(x) = 1 - 2((-1)^{n-1} + O(n^{-1})) \left((-1)^{n-1} \frac{1 - \cos 2nx}{2} + O(n^{-1})\right),$$

отсюда,

$$\xi_{2n}(x) = \cos 2nx + O(n^{-1}). \quad (14)$$

Для нечетных индексов соотношение (9) доказывается аналогично. Лемма 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\{\xi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ — ω -линейно независимая система функций, то она является базисом Рисса в замыкании своей линейной оболочки $B = \overline{\text{span}\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$.

В самом деле, в силу асимптотики (9) ω -линейно независимая система функций $\{\xi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ квадратично близка к системе $\{\cos nx\}_{n \in \mathbb{N}}$, которая есть базис Рисса в $\overline{\text{span}\{\cos nx\}_{n \in \mathbb{N}}}$. Согласно теореме Бари [9] заключаем, что $\{\xi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ есть базис Рисса в $B = \overline{\text{span}\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$.

Рассмотрим два набора чисел $\{\tilde{\lambda}_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, 2$, связанные с СЗ $\{\lambda_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ операторов $L_i(q, M)$ в том смысле, что

$$\Lambda := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (|\rho_{n1} - \tilde{\rho}_{n1}|n)^2 + (|\rho_{n2} - \tilde{\rho}_{n2}|n)^2} < \infty, \quad (15)$$

где $\tilde{\rho}_{ni}^2 := \tilde{\lambda}_{ni}$.

Из (4) и (15) вытекает, что числа $\tilde{\lambda}_{ni}$ имеют ту же асимптотику, что и СЗ λ_{ni} , а именно

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_{n1}} = \tilde{\rho}_{n1} = n + \frac{\tilde{\kappa}_{n1}}{n}, \quad \sqrt{\tilde{\lambda}_{n2}} = \tilde{\rho}_{n2} = n - \frac{1}{2} + \frac{\tilde{\kappa}_{n2}}{n}, \quad \{\tilde{\kappa}_{ni}\}_{n=1}^{\infty} \in l_2, \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, что в силу представлений (4) и (16) условие (15) можно переписать как

$$\Lambda := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{\kappa}_{n1}|^2 + |\hat{\kappa}_{n2}|^2} < \infty, \quad (17)$$

где $\hat{\kappa}_{ni} := \kappa_{ni} - \tilde{\kappa}_{ni} = (\rho_{ni} - \tilde{\rho}_{ni})n$.

Зафиксируем число Λ_0 и впредь будем считать, что

$$\Lambda < \Lambda_0.$$

Условимся для произвольной функции $H(x, \lambda)$ обозначать $H_{ni}(x) := H(x, \tilde{\lambda}_{ni})$. Введем на $[0, \pi]$ функции $\tilde{\xi}_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, по формулам

$$\tilde{\xi}_{2n}(x) = 1 - \frac{2\tilde{\lambda}_{n1}}{b_{n1}} S_{n1}^*(x) S_{n1}(x), \quad \tilde{\xi}_{2n-1}(x) = 1 - \frac{2\tilde{\lambda}_{n2}}{b_{n2}} C_{n2}^*(x) S_{n2}(x), \quad (18)$$

где числа b_{ni} определены в (8).

ЛЕММА 2. *Если система функций $\{\xi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ω -линейно независимая, то существует константа $\delta_1 > 0$ такая, что при $\Lambda < \delta_1$ система функций $\{\tilde{\xi}_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ будет базисом Рисса в замыкании своей линейной оболочки $\tilde{B} = \text{span}\{\tilde{\xi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 1 система функций $\{\xi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ образует базис Рисса в B . Следовательно, существует линейный обратимый ограниченный оператор A такой, что $Ae_k = \xi_k$, где $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ есть ортонормированный базис в гильбертовом пространстве. Тогда, для того чтобы утверждение леммы было истинным, достаточно (см. [4; с. 130]) выполнения неравенства

$$\sqrt{\sum_n \|\xi_n - \tilde{\xi}_n\|^2} < \frac{1}{\|A^{-1}\|}. \quad (19)$$

Оценим $\xi_n(x) - \tilde{\xi}_n(x)$ по норме. Из (7), (18) следует, что

$$\xi_{2n}(x) - \tilde{\xi}_{2n}(x) = \frac{2}{b_{n1}} (\rho_{n1}^2 S(x, \tilde{\lambda}_{n1}) S^*(x, \tilde{\lambda}_{n1}) - \rho_{n1}^2 S(x, \lambda_{n1}) S^*(x, \lambda_{n1})).$$

Подставим в это равенство выражения для функций S и S^* через операторы преобразования (10) и (11), а далее, учитывая асимптотику (4) и (16) для чисел $\{\lambda_{n1}\}_1^\infty$, $\{\tilde{\lambda}_{n1}\}_1^\infty$ соответственно, а также асимптотику (9) для чисел b_{n1} , получим равномерно по x

$$\xi_{2n}(x) - \tilde{\xi}_{2n}(x) = O\left(\frac{\hat{\kappa}_{n1}}{n}\right),$$

и, следовательно,

$$\|\xi_{2n}(x) - \tilde{\xi}_{2n}(x)\| < C \frac{|\hat{\kappa}_{n1}|}{n}.$$

Причем константа $C > 0$ зависит лишь от задач L_i и числа Λ_0 и не зависит от выбора чисел $\tilde{\lambda}_{n1}$. Для нечетных индексов, рассуждая аналогично, получим

$$\|\xi_{2n-1}(x) - \tilde{\xi}_{2n-1}(x)\| < C \frac{|\hat{\kappa}_{n2}|}{n}.$$

Тогда, исходя из двух последних оценок, для выполнения (19) достаточно требовать

$$\sqrt{C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\hat{\kappa}_{n1}|^2 + |\hat{\kappa}_{n2}|^2}{n^2}} < \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

т.е. $\delta_1 = 1/(\sqrt{C}\|A^{-1}\|)$, и лемма 2 доказана.

Пусть система функций $\{\xi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, определенная в (7), ω -линейно независима. Рассмотрим в $\mathbf{L}_2[0, \pi]$ нелинейное интегральное уравнение

$$r(x) = f(x) + \sum_{j=2}^{\infty} \underbrace{\int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi}}_j H_j(x, t_1, \dots, t_j) r(t_1) \dots r(t_j) dt_1 \dots dt_j, \quad (20)$$

где

$$f(x) = -2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_{n1}}{b_{n1}} S_{n1}(x) \tilde{\chi}_{2n}(x) + \frac{\tilde{\lambda}_{n2}}{b_{n2}} S_{n2}^*(x) \tilde{\chi}_{2n-1}(x) \right), \quad (21)$$

$$H_2(x, t_1, t_2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\lambda}_{n1}}{b_{n1}} S_{n1}^*(t_1) G_{n1}(t_1, t_2) S_{n1}(t_2) \tilde{\chi}_{2n}(x) + \frac{\tilde{\lambda}_{n2}}{b_{n2}} C_{n2}^*(t_1) G_{n2}(t_1, t_2) S_{n2}(t_2) \tilde{\chi}_{2n-1}(x) \right), \quad (22)$$

$$H_j(x, t_1, \dots, t_j) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\lambda}_{n1}}{b_{n1}} S_{n1}^*(t_1) G_{n1}(t_1, t_2) \dots G_{n1}(t_{j-1}, t_j) S_{n1}(t_j) \tilde{\chi}_{2n}(x) + \frac{\tilde{\lambda}_{n2}}{b_{n2}} C_{n2}^*(t_1) G_{n2}(t_1, t_2) \dots G_{n2}(t_{j-1}, t_j) S_{n2}(t_j) \tilde{\chi}_{2n-1}(x) \right). \quad (23)$$

Здесь $r(x)$ – неизвестная функция; остальные функции строятся по задачам L_i и числам λ_{ni} ; $G(x, t, \lambda)$, $0 \leq x, t \leq \pi$, – функция Грина задачи Коши $\ell y = \lambda y$, $y(0) = y'(0) = 0$, причем $G(x, t, \lambda) \equiv 0$ при $0 \leq x \leq t \leq \pi$. В силу леммы 2 система функций $\{\tilde{\xi}_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, а следовательно, и система $\{\tilde{\xi}_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, образует базис Рисса замыкания своей линейной оболочки при $\Lambda < \delta_1$ так же, как и биортогональный базис $\{\tilde{\chi}_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ к $\{\tilde{\xi}_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Уравнение (20), называется *основным уравнением обратной задачи*. Встает вопрос о его разрешимости.

Исходя из представлений (21)–(23), которые суть разложения по базису Рисса функций f и H_j , последние можно оценить по норме

$$\|f(x)\|_{\mathbf{L}_2[0, \pi]} < C_1 \Lambda, \quad (24)$$

$$\|H_j(x, t_1, \dots, t_j)\|_{\mathbf{L}_2[0, \pi]^j} < C_0^j, \quad j \geq 2, \quad (25)$$

где константы C_0 и C_1 зависят только от задач L_i и числа Λ_0 . Не нарушая общности, считаем, что $C_0, C_1 > 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Существует число $\delta > 0$ такое, что если $\Lambda < \delta/C_1$ (C_1 из оценки (24)), то основное уравнение обратной задачи (20) имеет единственное решение $r(x)$ в шаре $\|r\| < 2\delta$ из $\mathbf{L}_2[0, \pi]$, причем $\|r(x)\| < 2\|f(x)\|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{L}_2[0, \pi]$ шар S с центром в нуле радиуса $2\delta_2 = C_0^{-1}(1 - \sqrt{2C_0/(1 + 2C_0)})$. Пусть $\Lambda < \delta_2/C_1$, и примем, что $\delta_2/C_1 \leq \delta_1$, где δ_1 из леммы 2. Тогда согласно этой лемме система функций $\{\tilde{\xi}_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ образует

базис Рисса замыкания своей линейной оболочки. Пусть $r, \tilde{r}$ принадлежат шару S , т.е. имеет место оценка

$$\|r\|, \|\tilde{r}\| \leq \frac{1}{C_0} \left(1 - \sqrt{\frac{2C_0}{1+2C_0}} \right). \quad (26)$$

Обозначим

$$\psi_j(x; r) := \underbrace{\int_0^\pi \dots \int_0^\pi}_{j} H_j(x, t_1, \dots, t_j) r(t_1) \dots r(t_j) dt_1 \dots dt_j, \quad j \geq 2. \quad (27)$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, вычисляем

$$\|\psi_2(x; r)\|_{\mathbf{L}_2[0, \pi]} \leq \|r\|^2 \left(\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi |H_2(x, t_1, t_2)|^2 dt_1 dt_2 dx \right)^{1/2} = \|r\|^2 \|H_2\|_{\mathbf{L}_2[0, \pi]^3}.$$

Отсюда в силу оценки (25) для H_2 , получим

$$\|\psi_2(x; r)\|_{\mathbf{L}_2[0, \pi]} \leq (C_0 \|r\|)^2.$$

Рассуждая аналогично, при $j \geq 2$ получим

$$\|\psi_j(x; r)\|_{\mathbf{L}_2[0, \pi]} \leq (C_0 \|r\|)^j. \quad (28)$$

Обозначим

$$\psi(r) := \sum_{j=2}^{\infty} \psi_j(x; r);$$

тогда уравнение (20) переписывается как

$$r(x) = f(x) + \psi(r). \quad (29)$$

Будем решать (29) методом последовательных приближений

$$\begin{aligned} r_0 &= f(x), \\ r_{k+1} &= f(x) + \psi(r_k), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Оценим $\psi(r)$ по норме, используя оценку (28):

$$\|\psi(r)\| \leq \sum_2^\infty \|\psi_j(x; r)\| \leq \sum_2^\infty (C_0 \|r\|)^j = \frac{C_0^2 \|r\|^2}{1 - C_0 \|r\|} \leq \frac{1}{2} \|r\|. \quad (31)$$

Оценим последовательно нормы приближений (30) с помощью (31):

$$\begin{aligned} \|r_0\| &= \|f\|, \quad \dots, \\ \|r_k\| &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} \right) \|f\| = \frac{1 - 1/2^{k+1}}{1 - 1/2} \|f\| \leq 2\|f\|, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (32)$$

В силу (24) имеем $\|f(x)\|_{\mathbf{L}_2} < C_1 \Lambda$. Так как $\Lambda < \delta_2/C_1$, то из (32) заключаем, что $\|r_k\| \leq 2\|f\| < 2\delta_2$, т.е. последовательные приближения не выходят за границы шара. Осталось доказать, что ряд

$$r_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (r_{k+1}(x) - r_k(x))$$

сходится в $\mathbf{L}_2[0, \pi]$ к решению r уравнения (29).

Подставим в (27) $\tilde{r}$ вместо r , а затем вычтем получившееся равенство из (27), получим

$$\begin{aligned}\psi_2(x; r) - \psi_2(x; \tilde{r}) &= \int_0^\pi \int_0^\pi H_2(x, t_1, t_2) r(t_1) [r(t_2) - \tilde{r}(t_2)] dt_1 dt_2 \\ &\quad + \int_0^\pi \int_0^\pi H_2(x, t_1, t_2) \tilde{r}(t_2) [r(t_1) - \tilde{r}(t_1)] dt_1 dt_2.\end{aligned}$$

Перейдем от повторных интегралов к кратным, опуская для краткости записи аргументы функции $H_2(x, t_1, t_2)$; получим

$$\begin{aligned}\psi_2(x; r) - \psi_2(x; \tilde{r}) &= \int_0^\pi r(t_1) dt_1 \int_0^\pi H_2[r(t_2) - \tilde{r}(t_2)] dt_2 \\ &\quad + \int_0^\pi \tilde{r}(t_2) dt_2 \int_0^\pi H_2[r(t_1) - \tilde{r}(t_1)] dt_1.\end{aligned}$$

Оценим по модулю $\psi_2(x; r) - \psi_2(x; \tilde{r})$, применяя неравенство Коши–Буняковского к внутренним интегралам:

$$\begin{aligned}|\psi_2(x; r) - \psi_2(x; \tilde{r})| &\leq \int_0^\pi |r(t_1)| \left(\int_0^\pi |H_2|^2 dt_2 \right)^{1/2} dt_1 \left(\int_0^\pi |r(t_2) - \tilde{r}(t_2)|^2 dt_2 \right)^{1/2} \\ &\quad + \int_0^\pi |\tilde{r}(t_2)| \left(\int_0^\pi |H_2|^2 dt_1 \right)^{1/2} dt_2 \left(\int_0^\pi |r(t_1) - \tilde{r}(t_1)|^2 dt_1 \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Еще раз применим неравенство Коши–Буняковского, в первом слагаемом к интегралу по t_1 , во втором – по t_2 , получим

$$\begin{aligned}|\psi_2(x; r) - \psi_2(x; \tilde{r})| &\leq \|r - \tilde{r}\| \left(\int_0^\pi |r(t_1)|^2 dt_1 \right)^{1/2} \left(\int_0^\pi \int_0^\pi |H_2|^2 dt_1 dt_2 \right)^{1/2} \\ &\quad + \|r - \tilde{r}\| \left(\int_0^\pi |\tilde{r}(t_2)|^2 dt_2 \right)^{1/2} \left(\int_0^\pi \int_0^\pi |H_2|^2 dt_1 dt_2 \right)^{1/2},\end{aligned}$$

или

$$|\psi_2(x; r) - \psi_2(x; \tilde{r})| \leq 2 \max\{\|r\|, \|\tilde{r}\|\} \|r - \tilde{r}\| \left(\int_0^\pi \int_0^\pi |H_2|^2 dt_1 dt_2 \right)^{1/2}.$$

С помощью этого неравенства оценим норму $\psi_2(x; r) - \psi_2(x; \tilde{r})$:

$$\begin{aligned}\|\psi_2(x; r) - \psi_2(x; \tilde{r})\| &\leq 2\|r - \tilde{r}\| \max\{\|r\|, \|\tilde{r}\|\} \left(\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi |H_2(x, t_1, t_2)|^2 dt_1 dt_2 dx \right)^{1/2} \\ &= 2\|r - \tilde{r}\| \max\{\|r\|, \|\tilde{r}\|\}_{\mathbf{L}_2[0, \pi]^3} \|H\|_{\mathbf{L}_2[0, \pi]^3},\end{aligned}$$

а, учитывая оценку (25), получим

$$\|\psi_2(x; r) - \psi_2(x; \tilde{r})\| \leq 2\|r - \tilde{r}\| \max\{\|r\|, \|\tilde{r}\|\} C_0^2.$$

Рассуждая аналогично, используя тождество

$$a_1 a_2 \cdots a_n - b_1 b_2 \cdots b_n = \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^{i-1} a_k (a_i - b_i) \prod_{k=i+1}^n b_k, \quad (33)$$

где по определению

$$\prod_{k=1}^0 a_k := 1, \quad \prod_{k=n+1}^n a_k := 1,$$

получим для $j \geq 2$

$$\|\psi_j(x; r) - \psi_j(x; \tilde{r})\| \leq jC_0^j (\max\{\|r\|, \|\tilde{r}\|\})^{j-1} \|r - \tilde{r}\|.$$

Исходя из этого неравенства, оценим по норме $\psi(r) - \psi(\tilde{r})$, учитывая, что r и $\tilde{r}$ принадлежат шару S , т.е. выполняется (26); получим

$$\begin{aligned} \|\psi(r) - \psi(\tilde{r})\| &\leq \sum_{j=2}^{\infty} \|\psi_j(x; r) - \psi_j(x; \tilde{r})\| \\ &\leq \|r - \tilde{r}\| \sum_{j=2}^{\infty} jC_0^j (\max\{\|r\|, \|\tilde{r}\|\})^{j-1} \\ &\leq C_0 \|r - \tilde{r}\| \sum_{j=2}^{\infty} j \left(1 - \sqrt{\frac{2C_0}{1+2C_0}}\right)^{j-1}. \end{aligned} \quad (34)$$

Для произвольного числа $0 < t < 1$ имеет место формула

$$\sum_{k=1}^{\infty} kt^k = \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Тогда, продолжая оценку для $\|\psi(r) - \psi(\tilde{r})\|$, из (31) получим

$$\begin{aligned} \|\psi(r) - \psi(\tilde{r})\| &\leq C_0 \|r - \tilde{r}\| \left(1 - \sqrt{\frac{2C_0}{1+2C_0}}\right)^{-1} \\ &\quad \times \left\{ \left(1 - \sqrt{\frac{2C_0}{1+2C_0}}\right) \frac{1+2C_0}{2C_0} - \left(1 - \sqrt{\frac{2C_0}{1+2C_0}}\right) \right\} \\ &= C_0 \|r - \tilde{r}\| \left(\frac{1+2C_0}{2C_0} - 1\right) = \frac{1}{2} \|r - \tilde{r}\|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\psi(r) - \psi(\tilde{r})\| \leq \frac{1}{2} \|r - \tilde{r}\|. \quad (35)$$

Оценки (31), (35) обеспечивают сходимость ряда

$$r_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (r_{k+1} - r_k)$$

к решению r уравнения (29). Действительно, используя определение (30) и упомянутые оценки, получим

$$\|r_1 - r_0\| = \|\psi(r_0)\| \leq \frac{1}{2} \|r_0\| \leq \frac{1}{2} \|f\|, \quad \dots, \quad \|r_{k+1} - r_k\| \leq \frac{1}{2^k} \|f\|, \quad \dots$$

Отсюда,

$$\|r\| \leq \|f\| + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \|f\| = \|f\| + \|f\| = 2\|f\|.$$

Изначально мы рассматривали случай, когда

$$\delta_2 C_1^{-1} \leq \delta_1, \quad (36)$$

при этом требовали выполнения $\Lambda < \delta_2 C_1^{-1}$ и выбирали радиус шара S равным $2\delta_2 = C_0^{-1}(1 - \sqrt{2C_0/(1 + 2C_0)})$. Если же

$$\delta_2 C_1^{-1} > \delta_1, \quad (37)$$

то потребуем выполнения $\Lambda < \delta_3 C_1^{-1}$, где $\delta_3 = \delta_1 C_1$, и выберем радиус шара S , равный $2\delta_3$, тогда приведенное выше доказательство и подавно верно для этого случая, так как $\delta_3 < \delta_2$.

Положим δ равным δ_2 , если имеет место неравенство (36), или равным δ_3 , если верно (37). Таким образом, существует δ такое, что при $\Lambda < \delta C_1^{-1}$ основное уравнение обратной задачи имеет единственное решение $r(x)$ в шаре $\|r\| < 2\delta$ из $\mathbf{L}_2[0, \pi]$ причем норма этого решения не превосходит $2\|f\|$. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Число δ конструктивно выражается через константы C_0 и C_1 , но в виду громоздкости этих выражений мы не выписываем их явно.

2. Решение обратной задачи. Следующая теорема дает локальное решение обратной задачи для исследуемого оператора. В формулировке теоремы мы восстанавливаем задачи $L_i(\tilde{q}, M)$, а задачи $L_i(q, M)$ являются вспомогательными.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{\lambda_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ – СЗ краевых задач L_i , и пусть функции $\{\xi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определенные формулами (7), ω -линейно независимы в $\mathbf{L}_2(0, \pi)$. Тогда найдется число $\delta = \delta(L_i) > 0$ такое, что для чисел $\{\tilde{\lambda}_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$, выбранных из условия

$$\Lambda := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (|\rho_{n1} - \tilde{\rho}_{n1}|n)^2 + (|\rho_{n2} - \tilde{\rho}_{n2}|n)^2} < \frac{\delta}{C_1},$$

где $\lambda_{ni} = \rho_{ni}^2$, $\tilde{\lambda}_{ni} = \tilde{\rho}_{ni}^2$, $i = 1, 2$, C_1 из оценки (24), существует единственная в шаре $S(q, 2\delta)$ пространства $\mathbf{L}_2(0, \pi)$ функция $\tilde{q}(x)$ такая, что числа $\{\tilde{\lambda}_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ являются СЗ задач $L_i(\tilde{q}, M)$, причем

$$\|\tilde{q}(x) - q(x)\|_{\mathbf{L}_2} < C\Lambda,$$

где константа C зависит лишь от задач $L_i(q, M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Мы предполагаем, что $\int_0^\pi q(t) dt = 0$. Потенциал $\tilde{q}(x)$ восстанавливаемой задачи попадет в тот же класс, что и $q(x)$, т.е. $\int_0^\pi \tilde{q}(t) dt = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассмотрим в $\mathbf{L}_2[0, \pi]$ нелинейное интегральное уравнение (20) относительно функции $r(x)$, где $f(x)$, H_j определены в (21)–(23). В силу теоремы 2 решение уравнения (20) при $\Lambda < \delta/C_1$ существует и единственно в шаре $\|r\| \leq 2\|f\|$. Пусть $r(x)$ и есть это решение. Обозначим

$$\tilde{q}(x) := q(x) - r(x). \quad (38)$$

Рассмотрим краевые задачи $\tilde{L}_i = L_i(\tilde{q}, M)$:

$$\tilde{\ell}y \equiv -y'' + \tilde{q}(x)y + \int_0^x M(x, t)y(t) dt = \lambda y, \quad (39)$$

$$y(0) = y^{(i-1)}(\pi) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (40)$$

Условимся, что если некоторый символ φ обозначает объект задачи L_i , то аналогичный объект задачи $\tilde{L}_i$ будем обозначать как $\tilde{\varphi}$.

Покажем, что числа $\{\tilde{\lambda}_{ni}\}_{n=1}^\infty$ образуют спектр задач $L_i(\tilde{q}, M)$, $i = 1, 2$.

С этой целью рассмотрим следующее уравнение относительно $\tilde{y}_{ni}(x)$:

$$\tilde{y}_{ni}(x) = S_{ni}(x) - \int_0^\pi G_{ni}(x, t)r(t)\tilde{y}_{ni}(t) dt; \quad (41)$$

напомним, что $S_{ni}(x) = S(x, \tilde{\lambda}_{ni})$, $G_{ni}(x, t) = G(x, t, \tilde{\lambda}_{ni})$. Решая его методом последовательных приближений, получим

$$\tilde{y}_{ni}(x) = S_{ni}(x) - \varphi_{ni}(x), \quad (42)$$

где

$$\varphi_{ni}(x) = \sum_{j=1}^\infty \underbrace{\int_0^\pi \dots \int_0^\pi}_{j} G_{ni}(x, t_1) \dots G_{ni}(x, t_j) r(t_1) \dots r(t_j) dt_1 \dots dt_j.$$

Тождество (20) равносильно равенству вида $\ell y - \lambda y = p(x)$, из которого нетрудно получить

$$\tilde{\ell}\tilde{y}_{ni} = \tilde{\lambda}_{ni}\tilde{y}_{ni}(x), \quad \tilde{y}_{ni}(0) = 0, \quad \tilde{y}'_{ni}(0) = 1. \quad (43)$$

Используя (43) и (5), записанное для решений $S_{n1}^*(x)$ и $C_{n2}^*(x)$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\pi r(x)S_{n1}^*(x)\tilde{S}_{n1}(x) dx &\equiv S_{n1}(\pi) - \tilde{y}_{n1}(\pi), \\ \int_0^\pi r(x)C_{n2}^*(x)\tilde{S}_{n2}(x) dx &\equiv S'_{n2}(\pi) - \tilde{y}_{n2}(\pi). \end{aligned} \quad (44)$$

Далее, умножая тождество (20) на $\xi_n(x)$, интегрируя его по x от 0 до π , и учитывая при этом формулы (42), получим

$$\begin{aligned} \int_0^\pi r(x)S_{n1}^*(x)\tilde{S}_{n1}(x) dx &\equiv S_{n1}(\pi) - \int_0^\pi r(x) dx, \\ \int_0^\pi r(x)C_{n2}^*(x)\tilde{S}_{n2}(x) dx &\equiv S'_{n2}(\pi) - \int_0^\pi r(x) dx. \end{aligned} \quad (45)$$

Сравнивая (44) и (45), имеем

$$\tilde{y}_{n1}(\pi) = \int_0^\pi r(x) dx, \quad \tilde{y}'_{n2}(\pi) = \int_0^\pi r(x) dx. \quad (46)$$

Для решения задачи Коши $\tilde{y}_{n1}$ с помощью оператора преобразования можно показать, что $|\tilde{y}_{n1}(x)| < C/n^2$, следовательно, из (46) при $n \rightarrow \infty$ получим $\int_0^\pi \tilde{q}(x) dx = 0$

и $\tilde{y}_{n1}(\pi) = 0$, $\tilde{y}'_{n2}(\pi) = 0$. Функции $\tilde{\Delta}_1(\lambda) := \tilde{y}(\pi, \lambda)$ и $\tilde{\Delta}_2(\lambda) := \tilde{y}'(\pi, \lambda)$ называются *характеристическими* для задач $\tilde{L}_i$. Известным методом (см., например, [4]), можно показать, что множество их нулей совпадает со спектрами. По только что доказанному имеем $\tilde{\Delta}_1(\tilde{\lambda}_{n1}) = \tilde{y}_{n1}(\pi) = \tilde{\Delta}_2(\tilde{\lambda}_{n2}) = \tilde{y}'_{n2}(\pi) = 0$; следовательно, числа $\{\tilde{\lambda}_{ni}\}_1^\infty$ составляют спектр задач $\tilde{L}_i$. Теорема 2 доказана.

Требование ω -линейно независимости системы (7) является трудно проверяемым, но можно указать достаточные условия [11] в терминах исходного оператора, при которых это требование будет выполнено. А именно, можно показать, что система функций ξ_n будет являться ω -линейно независимой для класса задач с малым по норме ядром интегрального возмущения $\|M\|_L < C$, где константа C зависит от q .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. К. Бари, “Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве”, *Ученые записки МГУ*, **148:4** (1951), 69–107.
- [2] G. Borg, “Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte”, *Acta Math.*, **78:1** (1946), 1–96.
- [3] М. С. Ерёмин, “Обратная задача для интегродифференциальных уравнений второго порядка с особенностью”, *Дифференц. уравнения*, **24:2** (1988), 350–351.
- [4] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, М., 1984.
- [5] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977.
- [6] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [7] С. Б. Норкин, *Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом: Некоторые вопросы теории колебаний систем с запаздыванием*, Наука, М., 1965.
- [8] А. П. Хромов, “Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов”, *Матем. сб.*, **114 (156):3** (1981), 378–405.
- [9] В. А. Юрко, “Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов”, *Матем. заметки*, **50:5** (1991), 134–146.
- [10] В. А. Юрко, *Обратные задачи спектрального анализа*, Изд-во Саратов. пед. ин-та, Саратов, 2001.
- [11] Ю. В. Курышова, *Обратная задача для интегродифференциальных операторов*, Дисс. ... докт. физ.-матем. наук, Изд-во Саратов. гос. ун-та, Саратов, 2002.

Ю. В. Курышова

Саратовский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: jvkurysheva@rambler.ru

Поступило

05.08.2005

Исправленный вариант

05.12.2006