Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Лосев, Ю. С. Федоренко, О положительных решениях квазилинейных эллиптических неравенств на некомпактных римановых многообразиях, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 6, 867–878

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3737>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:12:01

О положительных решениях квазилинейных эллиптических неравенств на некомпактных римановых многообразиях

А. Г. Лосев, Ю. С. Федоренко

В работе рассматриваются обобщенные решения неравенства $-\operatorname{div}(A(x, u, \nabla u) \nabla u) \geq F(x, u, \nabla u) u^q$, $q > 1$, на некомпактных римановых многообразиях. Найдены достаточные условия выполнения теоремы Лиувилля о тривиальности положительных решений рассматриваемого неравенства. Также получены точные условия для существования положительного решения неравенства $-\Delta u \geq u^q$, $q > 1$, на сферически-симметричных некомпактных римановых многообразиях.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Вопросы существования нетривиальных глобальных решений дифференциальных уравнений и неравенств вызывают повышенный интерес математиков в связи с их фундаментальной ролью как в теории, так и в приложениях. В течение последних десятилетий большое число работ было посвящено вопросам справедливости теорем типа Лиувилля на некомпактных римановых многообразиях. Классическая формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в $\mathbb{R}^n$ функция является тождественной постоянной. Теоремам типа Лиувилля посвящены многочисленные работы ряда математиков (см., например, [1]–[7]). Достаточно подробно были исследованы решения уравнения

$$-\Delta u = u^q$$

в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. В частности, в работе [1] показано, что если $n \geq 3$ и $1 < q < (n+2)/(n-2)$, то всякое неотрицательное в $\mathbb{R}^n$ решение данного уравнения является тождественным нулем. Если $q \geq (n+2)/(n-2)$, то уравнение имеет нетривиальные положительные решения (см., например, [7]).

В случае неравенства

$$-\Delta u \geq u^q \tag{1.1}$$

известно (см. [7]), что при $n \geq 3$ и $1 < q \leq n/(n-2)$ всякое неотрицательное в $\mathbb{R}^n$ решение данного неравенства является тождественным нулем. Причем этот результат является точным. А именно, функция

$$u(x) = \frac{\kappa}{(1 + |x|^2)^{1/(q-1)}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где κ – подходящая положительная константа, является положительным решением неравенства (1.1), если $q > n/(n-2)$. Вызывает интерес получение аналогичных результатов на некомпактных римановых многообразиях.

Пусть M – полное некомпактное риманово многообразие с краем (возможно, пустым).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [5]. Локально-липшицеву функцию $h(x): M \rightarrow [0; +\infty)$ будем называть *функцией исчерпания* на M , если

- а) $B_h(t) = \{x \in M : h(x) < t\}$ – предкомпакт для любого $t \in (0; +\infty)$;
- б) $\lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k) = +\infty$ вдоль любой последовательности $x_k \in M$, не имеющей точек накопления на M ;
- в) $0 < \operatorname{ess\,inf}_M |\nabla h(x)| \leq \operatorname{ess\,sup}_M |\nabla h(x)| \leq 1$.

Примером функции исчерпания на полном римановом многообразии может служить функция геодезического расстояния.

В данной работе изучается поведение положительных решений неравенства

$$-\operatorname{div}(A(x, u, \nabla u) \nabla u) \geq F(x, u, \nabla u) u^q, \quad q > 1, \quad (1.2)$$

на произвольных полных некомпактных римановых многообразиях. Здесь

$$A(x, \xi, \eta), F(x, \xi, \eta): M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$$

– непрерывные положительные функции. В частности, при различных выборах функции $A(x, \xi, \eta)$ в левой части неравенства (1.2) могут находиться такие операторы как p -лапласиан, оператор средней кривизны и т.д.

Будем называть липшицеву функцию $\varphi(x)$ *финитной в области* $\Omega \subset M$, если ее носитель – компакт в Ω .

СОГЛАШЕНИЕ. Если многообразие M имеет непустой край, то всюду, не оговаривая это специально, будем рассматривать только такие решения неравенства (1.2), которые удовлетворяют условию

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial M} \geq 0,$$

где ν – внешняя нормаль к краю ∂M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Локально липшицеву на M функцию $u(x)$ будем называть *обобщенным решением* неравенства (1.2), если для произвольной ограниченной области $\Omega \subset M$ с гладкой границей и любой положительной финитной в Ω функции $\varphi(x)$ выполнено

$$\int_{\Omega} \varphi(x) F(x, u, \nabla u) u^q(x) dx \leq \int_{\Omega} A(x, u, \nabla u) \nabla u \nabla \varphi dx. \quad (1.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функция $A(x, u, \nabla u)$ дифференцируемая и $u(x) \in C^2(M)$ – решение неравенства (1.2), то оно также удовлетворяет неравенству (1.3).

Действительно, домножим обе части неравенства (1.2) на $\varphi(x)$ и проинтегрируем по Ω . Тогда, используя формулу Грина, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi F(x, u(x), \nabla u(x)) u^q(x) dx &\leq - \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}(A(x, u(x), \nabla u(x)) \nabla u(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} A \nabla \varphi \nabla u dx - \int_{\partial \Omega \cap M} \varphi A \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega \cap \partial M} \varphi A \frac{\partial u}{\partial n} ds \leq \int_{\Omega} A \nabla u \nabla \varphi dx. \end{aligned}$$

Фиксируем некоторую функцию исчерпания $h(x)$. Обозначим через $V_h(\mu R)$ множество $B_h(\mu R) \setminus \overline{B_h(R)}$, где $\mu > 1$ – некоторая константа, а через $|V_h(\mu R)|$ – объем этого множества. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть u – неотрицательное обобщенное решение неравенства (1.2) на M такое, что для некоторой функции исчерпания h выполнено

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}} \sup_{x \in V_h(\mu R)} \left(\frac{A(x, u(x), \nabla u(x))}{F(x, u(x), \nabla u(x))} \right)^{2q/(q-1)} \times \sup_{x \in V_h(\mu R)} F(x, u(x), \nabla u(x)) < +\infty.$$

Тогда $u \equiv 0$.

Пусть $A(x, \xi, \eta)$ и $F(x, \xi, \eta)$ таковы, что при любом фиксированном x определены функции

$$\tilde{A}(x) = \sup \left(\frac{A(x, \xi, \eta)}{F(x, \xi, \eta)} \right)^{2q/(q-1)} \quad \text{и} \quad \tilde{F}(x) = \sup F(x, \xi, \eta),$$

где точная верхняя грань берется по всем $\xi \in \mathbb{R}$ и $\eta \in \mathbb{R}^n$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если многообразие M таково, что для некоторого $\mu > 1$ и некоторой функции исчерпания h выполнено

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}} \sup_{V_h(\mu R)} \tilde{A}(x) \sup_{V_h(\mu R)} \tilde{F}(x) < +\infty,$$

то любое неотрицательное обобщенное решение неравенства (1.2) на M является тождественным нулем.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть функции $A(x, \xi, \eta)$ и $F(x, \xi, \eta)$ ограничены и функция $F(x, \xi, \eta)$ отделена от нуля. Если многообразие M таково, что для некоторого $\mu > 1$ и некоторой функции исчерпания h выполнено

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}} < +\infty,$$

то любое неотрицательное обобщенное решение неравенства (1.2) на M является тождественным нулем.

Кроме того, в работе изучается поведение решений неравенства (1.1) на так называемых квазимодельных многообразиях, обобщающих сферически-симметричные. Показана точность полученных условий тривиальности решений неравенства (1.2).

2. Доказательство основной теоремы. Доказательство основано на небольшой модификации метода, предложенного в работе [6]. Сформулируем вначале некоторые вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha \in (-1; 0)$. Тогда для любого положительного обобщенного решения неравенства (1.2) и любой положительной финитной в Ω функции $\varphi(x)$ выполнены неравенства

$$\int_{\Omega} F u^{q+\alpha} \varphi dx \leq \left(\frac{1}{2|\alpha|} \right)^p \int_{\Omega} \frac{A^p |\nabla \varphi|^{2p}}{F^{p-1} \varphi^{2p-1}} dx, \quad (2.1)$$

$$\int_{\Omega} A |\nabla u|^2 u^{\alpha-1} \varphi dx \leq \frac{1}{p 2^{p-1} |\alpha|^{p+1}} \int_{\Omega} \frac{A^p |\nabla \varphi|^{2p}}{F^{p-1} \varphi^{2p-1}} dx, \quad (2.2)$$

где $p = (q + \alpha)/(q - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в обе части неравенства (1.3) функцию вида $\varphi = u^\alpha \varphi$, где $0 \leq \varphi \leq 1$ – финитная в M функция такая, что $\text{supp } \varphi \subset \Omega$. Тогда справедливо неравенство

$$\int_{\text{supp } \varphi} F u^{q+\alpha} \varphi dx \leq \alpha \int_{\text{supp } \varphi} A |\nabla u|^2 u^{\alpha-1} \varphi dx + \int_{\text{supp } \varphi} A (\nabla u, \nabla \varphi) u^\alpha dx.$$

Учитывая отрицательность коэффициента α , последнее неравенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp } \varphi} F u^{q+\alpha} \varphi dx + \frac{|\alpha|}{2} \int_{\text{supp } \varphi} A |\nabla u|^2 u^{\alpha-1} \varphi dx \\ \leq \frac{\alpha}{2} \int_{\text{supp } \varphi} A |\nabla u|^2 u^{\alpha-1} \varphi dx + \int_{\text{supp } \varphi} A |\nabla u| |\nabla \varphi| u^\alpha dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Учитывая неравенство Коши

$$XY \leq \frac{|\alpha|}{2} X^2 + \frac{1}{2|\alpha|} Y^2,$$

последний интеграл можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp } \varphi} A |\nabla u| |\nabla \varphi| u^\alpha dx &= \int_{\text{supp } \varphi} A^{1/2} |\nabla u| u^{(\alpha-1)/2} \varphi^{1/2} \cdot \frac{A^{1/2}}{\varphi^{1/2}} |\nabla \varphi| u^{(\alpha+1)/2} dx \\ &\leq \frac{|\alpha|}{2} \int_{\text{supp } \varphi} A |\nabla u|^2 u^{\alpha-1} \varphi dx + \frac{1}{2|\alpha|} \int_{\text{supp } \varphi} \frac{A u^{\alpha+1} |\nabla \varphi|^2}{\varphi} dx. \end{aligned}$$

Тогда неравенство (2.3) приводится к виду

$$\int_{\text{supp } \varphi} F u^{q+\alpha} \varphi dx \leq \frac{\alpha}{2} \int_{\text{supp } \varphi} A |\nabla u|^2 u^{\alpha-1} \varphi dx + \frac{1}{2|\alpha|} \int_{\text{supp } \varphi} A \frac{u^{\alpha+1} |\nabla \varphi|^2}{\varphi} dx.$$

Применяя неравенство Юнга

$$PQ \leq \frac{1}{k} P^k + \frac{1}{k'} Q^{k'}, \quad \text{где } \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1, \quad k > 1,$$

к последнему интегралу, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp } \varphi} F u^{q+\alpha} \varphi dx &\leq \frac{\alpha}{2} \int_{\text{supp } \varphi} A |\nabla u|^2 u^{\alpha-1} \varphi dx \\ &\quad + \frac{1}{k} \int_{\text{supp } \varphi} F u^{(\alpha+1)k} \varphi dx + \frac{1}{(2|\alpha|)^{k'} k'} \int_{\text{supp } \varphi} \frac{A^{k'} |\nabla \varphi|^{2k'}}{F^{k'-1} \varphi^{2k'-1}} dx. \end{aligned}$$

Тогда, выбирая $k = (q + \alpha)/(\alpha + 1)$, получаем, что

$$\frac{1}{k'} \int_{\text{supp } \varphi} F u^{q+\alpha} \varphi \, dx \leq \frac{\alpha}{2} \int_{\text{supp } \varphi} A |\nabla u|^2 u^{\alpha-1} \varphi \, dx + \frac{1}{(2|\alpha|)^{k'} k'} \int_{\text{supp } \varphi} \frac{A^{k'} |\nabla \varphi|^{2k'}}{F^{k'-1} \varphi^{2k'-1}} \, dx,$$

или

$$\frac{1}{k'} \int_{\text{supp } \varphi} F u^{q+\alpha} \varphi \, dx + \frac{|\alpha|}{2} \int_{\text{supp } \varphi} A |\nabla u|^2 u^{\alpha-1} \varphi \, dx \leq c_0 \int_{\text{supp } \varphi} \frac{A^{k'} |\nabla \varphi|^{2k'}}{F^{k'-1} \varphi^{2k'-1}} \, dx,$$

где $c_0 = 1/((2|\alpha|)^{k'} k')$.

В силу неотрицательности каждого из слагаемых в последнем неравенстве, оно выполнено для каждого из интегралов в левой части в отдельности. Подставляя $k' = p$, получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Пусть u – положительное обобщенное решение неравенства (1.2). Тогда для любой константы $\mu > 1$ и $R > 0$ выполнено

$$\begin{aligned} & \int_{B_h(R)} F(x, u(x), \nabla u(x)) u^q \, dx \\ & \leq K \frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}} \left(\sup_{V_h(\mu R)} \frac{A(x, u(x), \nabla u(x))}{F(x, u(x), \nabla u(x))} \right)^{2q/(q-1)} \sup_{V_h(\mu R)} F(x, u(x), \nabla u(x)), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где константа K не зависит от R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим финитную в M функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in B_h(R), \\ \left(\frac{\mu R - h(x)}{(\mu - 1)R} \right)^\lambda, & \text{если } x \in B_h(\mu R) \setminus B_h(R), \\ 0, & \text{если } x \in M \setminus B_h(\mu R), \end{cases} \quad (2.5)$$

где константа $\lambda > 2$ будет указана ниже. Используя константу $\alpha \in (-1; 0)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{B_h(\mu R)} \varphi F u^q \, dx & \leq \int_{B_h(\mu R)} A |\nabla u| |\nabla \varphi| \, dx \\ & \leq \left(\int_{B_h(\mu R)} A |\nabla u|^2 u^{\alpha-1} \varphi \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{B_h(\mu R)} A \frac{u^{1-\alpha} |\nabla \varphi|^2}{\varphi} \, dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Применяя к последнему интегралу неравенство Гёльдера с коэффициентами

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = 1, \quad a > 1,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_{B_h(\mu R)} \varphi F u^q \, dx & \leq \left(\int_{B_h(\mu R)} A |\nabla u|^2 u^{\alpha-1} \varphi \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{B_h(\mu R)} F u^{(1-\alpha)a} \varphi \, dx \right)^{1/(2a)} \\ & \quad \times \left(\int_{B_h(\mu R)} \frac{A^{a'} |\nabla \varphi|^{2a'}}{F^{a'-1} \varphi^{2a'-1}} \, dx \right)^{1/(2a')}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Выберем a таким образом, чтобы $(1 - \alpha)a = q + \alpha$, и воспользуемся оценками (2.1) и (2.2) для интегралов в правой части неравенства (2.6). В результате получим

$$\begin{aligned} \int_{B_h(\mu R)} F u^q \varphi \, dx &\leq c_\alpha \left(\int_{B_h(\mu R)} \frac{A^p |\nabla \varphi|^{2p}}{F^{p-1} \varphi^{2p-1}} \, dx \right)^{1/(2a)+1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{B_h(\mu R)} \frac{A^{a'} |\nabla \varphi|^{2a'}}{F^{a'-1} \varphi^{2a'-1}} \, dx \right)^{1/(2a')}. \end{aligned}$$

Используя вид функции $\varphi(x)$, заметим, что при выборе $\lambda = [\max\{2p, 2a'\}] + 1$ на множестве $V_h(\mu R)$ выполнено неравенство

$$0 < \frac{|\nabla \varphi|^{2p}}{\varphi^{2p-1}} \leq \left(\frac{\lambda}{(\mu - 1)R} \right)^{2p}.$$

Тогда, учитывая, что $\nabla \varphi = 0$ на множестве $B_h(R)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{B_h(\mu R)} F u^q \varphi \, dx &\leq \frac{c_1}{R^{2q/(q-1)}} \left(\int_{V_h(\mu R)} \left(\frac{A}{F} \right)^{2p} F \, dx \right)^{1/(2a)+1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{V_h(\mu R)} \left(\frac{A}{F} \right)^{2a'} F \, dx \right)^{1/(2a')} \\ &\leq \frac{c_1}{R^{2q/(q-1)}} \left(\sup_{V_h(\mu R)} \frac{A(x, u(x), \nabla u(x))}{F(x, u(x), \nabla u(x))} \right)^{2q/(q-1)} \int_{V_h(\mu R)} F \, dx \\ &\leq \frac{c_1}{R^{2q/(q-1)}} \left(\sup_{V_h(\mu R)} \frac{A(x, u(x), \nabla u(x))}{F(x, u(x), \nabla u(x))} \right)^{2q/(q-1)} \\ &\quad \times \sup_{V_h(\mu R)} F(x, u(x), \nabla u(x)) \cdot |V_h(\mu R)|. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int_{B_h(R)} F u^q \, dx \leq \int_{B_h(\mu R)} F u^q \varphi \, dx,$$

получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 3. Пусть u – положительное обобщенное решение неравенства (1.2). Тогда для любых констант $\mu > 1$, $R > 0$ и $1 - q < \alpha < 0$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \int_{B_h(R)} F u^q \, dx &\leq C_1 \left(\frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}} \left(\sup_{V_h(\mu R)} \frac{A}{F} \right)^{q/(q-1)} \sup_{V_h(\mu R)} F \right)^{(2q-1+\alpha)/(2q)} \\ &\quad \times \left(\int_{V_h(\mu R)} F u^q \, dx \right)^{(1-\alpha)/(2q)}, \end{aligned}$$

где C_1 не зависит от выбора R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенство (1.3) и функцию $\varphi(x)$, заданную формулой (2.5), находим

$$\int_{B_h(R)} F u^q dx \leq \int_{\text{supp } \varphi} F u^q \varphi dx \leq \int_{\text{supp } \varphi} A |\nabla u| |\nabla \varphi| dx = \int_{\text{supp } \nabla \varphi} A |\nabla u| |\nabla \varphi| dx.$$

Используя те же преобразования, что и при выводе (2.6), получаем неравенства

$$\begin{aligned} \int_{B_h(R)} F u^q dx &\leq \left(\int_{\text{supp } \nabla \varphi} A |\nabla u|^2 u^{\alpha-1} \varphi dx \right)^{1/2} \left(\int_{\text{supp } \nabla \varphi} A \frac{u^{1-\alpha} |\nabla \varphi|^2}{\varphi} dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{\text{supp } \nabla \varphi} A |\nabla u|^2 u^{\alpha-1} \varphi dx \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{\text{supp } \nabla \varphi} \frac{A^{b'} |\nabla \varphi|^{2b'}}{F^{b'-1} \varphi^{2b'-1}} dx \right)^{1/(2b')} \left(\int_{\text{supp } \nabla \varphi} F u^{(1-\alpha)b} \varphi dx \right)^{1/(2b)}, \end{aligned}$$

где $1/b + 1/b' = 1$, $b > 1$. Теперь выберем b так, чтобы $(1 - \alpha)b = q$. Тогда на основании (2.2) из последнего неравенства получаем

$$\begin{aligned} \int_{B_h(R)} F u^q dx &\leq \left(\frac{2c_0}{|\alpha|} \int_{\text{supp } \nabla \varphi} \frac{A^p |\nabla \varphi|^{2p}}{F^{p-1} \varphi^{2p-1}} dx \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{\text{supp } \nabla \varphi} \frac{A^{b'} |\nabla \varphi|^{2b'}}{F^{b'-1} \varphi^{2b'-1}} dx \right)^{1/(2b')} \left(\int_{\text{supp } \nabla \varphi} F u^q \varphi dx \right)^{1/(2b)}. \end{aligned}$$

Подставляя в это неравенство указанную в (2.5) функцию φ с показателем $\lambda = [\max\{2p, 2b'\}] + 1$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{B_h(R)} F u^q dx &\leq C_1 \left(\left(\sup_{V_h(\mu R)} \frac{A}{F} \right)^{q/(q-1)} \frac{|V_h(\mu R)| \sup_{V_h(\mu R)} F}{R^{2q/(q-1)}} \right)^{(2q+\alpha-1)/(2q)} \\ &\quad \times \left(\int_{V_h(\mu R)} F u^q dx \right)^{(1-\alpha)/(2q)}. \end{aligned}$$

Здесь следует заметить, что показатель степени $(2q-1+\alpha)/(2q) > 0$ в силу выбора α . Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим неравенство

$$\int_{\Omega} A \nabla u \nabla \varphi dx \geq 0. \quad (2.7)$$

Покажем, что для решений данного неравенства выполнен принцип минимума. А именно, *предположим, что найдется внутренняя точка $x_0 \in \Omega$ такая, что $u(x_0) = \inf_{\Omega} u(x)$. Покажем, что функция u в таком случае является постоянной в Ω .*

Предположим противное, что $u(x) \neq \text{const}$. Для любого $\varepsilon > 0$ определим множество

$$\Omega_{\varepsilon} = \{x \in \Omega : u(x) \leq u(x_0) + \varepsilon\}.$$

Данное множество очевидно будет непустым, а из непрерывности функции $u(x)$ следует, что оно замкнуто в Ω . Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = -(u(x) - u(x_0) - \varepsilon).$$

Данная функция финитна в Ω_ε . Тогда, подставляя в неравенство (2.7) функцию φ , получаем

$$-\int_{\Omega_\varepsilon} A|\nabla u|^2 dx \geq 0.$$

Из последнего неравенства следует, что $\nabla u \equiv 0$ на множестве Ω_ε . Следовательно, функция $u(x)$ тождественно равна константе на множестве Ω_ε . В силу произвольности выбора ε функция $u(x)$ тождественно равна константе во всей области Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть u – обобщенное неотрицательное решение неравенства (1.2). Предположим, что найдется точка $x \in M$ такая, что $u(x) = 0$. Тогда в силу принципа минимума $u(x)$ – тождественный нуль.

В дальнейшем будем предполагать, что функция $u > 0$. Тогда в силу леммы 2 для нее выполнена оценка

$$\begin{aligned} \int_{B_h(R)} F(x, u(x), \nabla u(x)) u^q dx &\leq K \frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}} \left(\sup_{x \in V_h(\mu R)} \frac{A(x, u(x), \nabla u(x))}{F(x, u(x), \nabla u(x))} \right)^{2q/(q-1)} \\ &\quad \times \sup_{V_h(\mu R)} F(x, u(x), \nabla u(x)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Переходя в (2.8) к пределу при $R \rightarrow +\infty$, получаем

$$\begin{aligned} \int_M F(x, u(x), \nabla u(x)) u^q dx &\leq K \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}} \left(\sup_{V_h(\mu R)} \frac{A(x, u(x), \nabla u(x))}{F(x, u(x), \nabla u(x))} \right)^{2q/(q-1)} \\ &\quad \times \sup_{V_h(\mu R)} F(x, u(x), \nabla u(x)) < +\infty. \end{aligned}$$

По условию теоремы 1 предел в правой части конечен. Из конечности данного интеграла следует, что

$$\int_{V_h(\mu R)} F(x, u(x), \nabla u(x)) u^q dx \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

Учитывая лемму 3, получаем

$$\int_{B_h(R)} F(x, u(x), \nabla u(x)) u^q dx \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, получаем противоречие с тем, что функция u строго положительна. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Чтобы доказать следствие 1, достаточно заметить, что для любой функции $u(x)$ выполнены неравенства

$$\left(\frac{A(x, u(x), \nabla u(x))}{F(x, u(x), \nabla u(x))} \right)^{2q/(q-1)} \leq \tilde{A}(x) \quad \text{и} \quad F(x, u(x), \nabla u(x)) \leq \tilde{F}(x).$$

Таким образом, из предположения о конечности предела

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}} \sup_{V_h(\mu R)} \tilde{A}(x) \sup_{V_h(\mu R)} \tilde{F}(x)$$

сразу следует выполнение условий теоремы 1 для всех положительных обобщенных решений неравенства (1.2), т.е. $u(x) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Из условий на функции A и F следует, что для любой функции $u(x)$ выполнено

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{x \in V_h(\mu R)} \left(\frac{A(x, u(x), \nabla u(x))}{F(x, u(x), \nabla u(x))} \right)^{2q/(q-1)} \sup_{x \in V_h(\mu R)} F(x, u(x), \nabla u(x)) \leq \text{const}.$$

Тогда из условия

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}} < +\infty$$

сразу следует выполнение условий теоремы 1 для всех положительных обобщенных решений неравенства (1.2). Таким образом, всякое положительное решение неравенства является тривиальным.

Заметим, что требования на функции $A(x, \xi, \eta)$ и $F(x, \xi, \eta)$ вполне можно ослабить. А именно, вместо непрерывности достаточно требования локальной интегрируемости по первой переменной.

3. Квазимодельные многообразия. В данном пункте изучается поведение решений неравенства (1.1) на квазимодельных римановых многообразиях. Опишем их подробнее. Пусть M_g – полное риманово многообразие без края, изометричное прямому произведению $[0; +\infty) \times S_1 \times \cdots \times S_k$, где $\{S_i\}$ – компакты без края, с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + \sum_{i=1}^k g_i^2(r) d\theta_i^2.$$

Здесь $g_i(r)$ – положительные гладкие на $\mathbb{R}_+$ функции, а $d\theta_i^2$ – метрика на компакте S_i .

Точные условия выполнения теорем типа Лиувилля, а также условия разрешимости задачи Дирихле для гармонических функций и решения стационарного уравнения Шрёдингера найдены в [3], [4].

В случае, если $k = 1$, а S – сфера, мы получим модельное многообразие. Частными случаями подобных многообразий могут служить евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$, поверхности вращения.

Введем следующие обозначения:

$$\dim S_i = n_i, \quad S(r) = \prod_{i=1}^k g_i^{n_i}(r), \quad V(r) = \int_0^r S(t) dt.$$

ТЕОРЕМА 2. Если риманово многообразие M_g таково, что

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} R^{-2q/(q-1)} \int_R^{\mu R} S(t) dt < +\infty,$$

где $\mu > 1$ – некоторая константа, то любое неотрицательное решение неравенства (1.2) является тождественным нулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По сути дела, теорема 2 является следствием теоремы 1, что легко увидеть, если в качестве функции исчерпания выбрать $h(r, \theta_1, \dots, \theta_k) = r$.

Рассмотрим на многообразии M_g задачу о нахождении нетривиального неотрицательного решения неравенства (1.1).

Известно [4], что на многообразии M_g оператор Лапласа–Бельтрами имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sum_{i=1}^k \frac{n_i g'_i(r)}{g_i(r)} \frac{\partial}{\partial r} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{g_i^2(r)} \Delta_{\theta_i},$$

где Δ_{θ_i} – лапласиан на компакте S_i .

Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$J(r) = \int_0^r \frac{V(t)}{S(t)} dt.$$

ТЕОРЕМА 3. Предположим, что многообразие M_g таково, что для некоторой константы $0 < c < (q-1)/q$ выполнено соотношение

$$\left(\frac{V(r)}{S(r)} \right)^2 \leq c \int_0^r \frac{V(t)}{S(t)} dt. \quad (3.1)$$

Тогда найдется достаточно малая константа $\varepsilon > 0$ такая, что функция

$$u(r) = \frac{\varepsilon}{(1 + J(r))^{1/(q-1)}} \quad (3.2)$$

является нетривиальным положительным решением неравенства (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ такое, чтобы $1 - (q-1)\varepsilon^{q-1} > 0$ и выполнялось неравенство

$$c \leq \frac{q-1}{q} (1 - (q-1)\varepsilon^{q-1}). \quad (3.3)$$

Заметим, что $J'(r) = V(r)/S(r)$. Из (3.1) имеем

$$c \geq \frac{(J'(r))^2}{J(r)} > \frac{(J'(r))^2}{J(r) + 1}.$$

Учитывая (3.3), получаем

$$\frac{q-1}{q} (1 - (q-1)\varepsilon^{q-1}) > \frac{J'^2(r)}{J(r) + 1},$$

и, следовательно,

$$1 - \frac{q}{q-1} \cdot \frac{J'^2(r)}{J(r) + 1} - (q-1)\varepsilon^{q-1} > 0. \quad (3.4)$$

Далее, вычислим оператор Лапласа–Бельтрами функции (3.2):

$$-\Delta u = \frac{\varepsilon}{(q-1)(1+J(r))^{q/(q-1)}} - \frac{\varepsilon q}{(q-1)^2(1+J(r))^{(2q-1)/(q-1)}} \cdot (J'(r))^2. \quad (3.5)$$

Проверим, что функция (3.2) удовлетворяет неравенству (1.1). Подставив в неравенство $-\Delta u \geq u^q$ соответствующие правые части выражений (3.2) и (3.5), получим соотношение

$$\frac{\varepsilon}{(q-1)(1+J(r))^{q/(q-1)}} \left(1 - (q-1)\varepsilon^{q-1} - \frac{q}{q-1} \cdot \frac{J'^2(r)}{1+J(r)} \right) \geq 0.$$

Очевидно, что первый сомножитель положителен. Выражение в скобках также положительно в силу (3.4).

Таким образом, в условиях теоремы 3 функция

$$u(r) = \frac{\varepsilon}{(1+J(r))^{1/(q-1)}}$$

действительно является нетривиальным решением неравенства (1.1). Теорема 3 доказана.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим риманово многообразие M_g , изометричное произведению $[0; +\infty) \times S$, где $\dim S = n-1$. Возьмем в качестве функции $g(r) = r^{(q+1)/((q-1)(n-1))}$. Объем такого многообразия растет как $V(r) = kr^{2q/(q-1)}$, где k – некоторая константа больше нуля. Тогда легко заметить, что многообразие удовлетворяет условию теоремы 2. С другой стороны, проверяя условие (3.1) теоремы 3 для заданной метрики, получим тождество

$$\left(\frac{V(r)}{S(r)} \right)^2 = \frac{q-1}{q} \int_0^r \frac{V(t)}{S(t)} dt.$$

Таким образом, данный пример показывает, что в условиях теоремы 3 достигнута точность в оценке константы c .

ПРИМЕР 2. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ как частный случай многообразия M_g . В этом случае метрика многообразия задается в виде $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$.

Найдем следующий интеграл:

$$I = R^{-2q/(q-1)} \int_R^{\mu R} r^{n-1} dr \int_S d\theta = R^{-2q/(q-1)} w_n (\mu^n - 1) R^n, \quad (3.6)$$

где w_n – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. В том случае, если

$$n - \frac{2q}{q-1} \leq 0, \quad (3.7)$$

предел в (3.6) при $R \rightarrow +\infty$ конечен. Тогда согласно теореме 2 решением неравенства (1.1) является тождественный нуль. Преобразовывая неравенство (3.7), получаем в точности оценку на показатель $q \leq n/(n-2)$, указанную выше.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Gidas, J. Spruck, “Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **34**:4 (1981), 525–598.
- [2] A. Grigor’yan, “Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **36**:2 (1999), 135–249.
- [3] А. Г. Лосев, “О некоторых лиувилевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях”, *Сиб. матем. журн.*, **39**:1 (1998), 87–93.
- [4] А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа, “Ограниченные решения уравнения Шрёдингера на римановых произведениях”, *Алгебра и анализ*, **13**:1 (2001), 84–110.
- [5] V. M. Miklyukov, V. G. Tkachev, “Denjoy–Alfors’s theorem for harmonic functions on Riemannian manifolds and external structure of minimal surfaces”, *Comm. Anal. Geom.*, **4**:4 (1996), 547–587.
- [6] Е. Митидиери, С. И. Похожаев, “Отсутствие глобальных положительных решений квазилинейных эллиптических неравенств”, *Докл. РАН*, **359**:4 (1998), 456–460.
- [7] J. Serrin, H. Zou, “Cauchy–Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities”, *Acta. Math.*, **189**:1 (2002), 79–142.

А. Г. Лосев

Волгоградский государственный университет

E-mail: alexander.losev@volsu.ru

Поступило

22.12.2005

Ю. С. Федоренко

Волгоградский государственный университет

E-mail: yuri.fedorenko@volsu.ru