Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, Об одной задаче теории вероятностей, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 6, 879–892

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3738>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 12:56:30

Об одной задаче теории вероятностей

В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский

Для непрерывных случайных величин изучается задача, аналогичная рассмотренной ранее одним из авторов для дискретных случайных величин. Заданы числа:

$$N > 0, \quad E > 0, \quad 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_s.$$

Рассматривается случайный вектор $x = (x_1, \dots, x_s)$, равномерно распределенный на множестве

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, s; \quad \sum_{j=1}^s x_j = N, \quad \sum_{j=1}^s \lambda_j x_j \leq E.$$

Исследуется слабый предел x при $s \rightarrow \infty$.

Библиография: 4 названия.

1. Введение и формулировка результатов

Для непрерывных случайных величин мы изучаем задачу, аналогичную рассмотренной для дискретных случайных величин в [1] (в указанной работе можно также найти дальнейшие ссылки). Пусть

$$N > 0, \quad E > 0, \quad 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_s \quad (1)$$

– заданные числа. Рассмотрим случайный вектор $x = (x_1, \dots, x_s)$, равномерно распределенный на множестве

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, s; \quad \sum_{j=1}^s x_j = N, \quad \sum_{j=1}^s \lambda_j x_j \leq E. \quad (2)$$

Случайные величины x_j (которые не являются независимыми, поскольку в (2) имеются связывающие их условия на суммы) можно трактовать как значения случайной функции дискретного аргумента $j \in \{1, \dots, s\}$. Нас интересует, как устроена эта функция, когда s велико. Оказывается, что (при сформулированных в теореме ниже условиях на параметры (1) рассматриваемой задачи) при большом s она с большой вероятностью близка к детерминированной функции $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s)$, где

$$\bar{x}_i = \frac{1}{\beta \lambda_i - \nu}, \quad i = 1, \dots, s, \quad (3)$$

а числа $\beta > 0$ и $\nu < 0$ определены как решение системы уравнений

$$\sum_{j=1}^s \bar{x}_j = N, \quad \sum_{j=1}^s \lambda_j \bar{x}_j = E. \quad (4)$$

Близость здесь понимается не в смысле нормы $\|x - \bar{x}\|$ (которая может быть с большой вероятностью и не мала), а в следующем более слабом “интегральном” смысле: если $J \subset \{1, \dots, s\}$ – произвольное фиксированное подмножество, то величина

$$V(J) = \left| \sum_{j \in J} (x_j - \bar{x}_j) \right|$$

с большой вероятностью мала¹. (Это свойство можно трактовать как *слабую сходимость* разности $x - \bar{x}$ к нулю при $s \rightarrow \infty$.)

Перейдем к формулировке результатов. Все доказательства будут даны в § 2. Прежде всего заметим, что система уравнений (3), (4) имеет решение $\beta \geq 0$, $\nu < 0$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{Ns}{\sum_{j=1}^s \lambda_j^{-1}} \equiv E_{\min} < E \leq E_{\max} = \frac{N}{s} \sum_{j=1}^s \lambda_j, \quad (5)$$

где левая часть формально полагается равной нулю, если хотя бы одно из чисел λ_j равно нулю (это утверждение легко проверяется, и мы опустим доказательство). Случай когда E близко к $E_{\min}$, является в некотором смысле вырожденным, и мы будем предполагать, что число E лежит на несколько меньшем отрезке, а именно,

$$E \in [E_0, E_{\max}], \quad (6)$$

где $E_0 = \sum_{j=1}^s \lambda_j (\beta_0 \lambda_j - \nu_0)^{-1}$, а β_0, ν_0 – такое произвольное решение уравнения $\sum_{j=1}^s (\beta_0 \lambda_j - \nu_0)^{-1} = N$, что $N\nu_0/s \leq -\varkappa$, $0 \leq N\beta_0 \lambda_{\max}/s \leq \varkappa^{-1}$, а $\varkappa$ – фиксированное произвольно малое число. В дальнейшем через β , ν , $\bar{x}$ обозначим решение системы уравнений (3), (4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Предположим, что выполнено условие (6) и, кроме того,*

(i) *либо*

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_s = \lambda \quad (\text{так что } E = \lambda N \text{ и } \bar{x}_1 = \dots = \bar{x}_s = N/s), \quad (7)$$

(ii) *либо существуют такие постоянные $\alpha \in (0, 1]$ и $c_1 > 0$, что*

$$\sum_{j=1}^s \left(\frac{(s/N)t - \beta \lambda_j \tau}{\beta \lambda_j - \nu} \right)^2 \geq c_1 s^\alpha (t^2 + \tau^2), \quad (t, \tau) \in \mathbb{R}^2. \quad (8)$$

Тогда для произвольных $C_0 > 0$, $\gamma \in [0, 1)$, $\varepsilon \in (0, (1 - \gamma)/2)$ и $\varepsilon_1 < 2\varepsilon$ существуют такие числа $C, K > 0$, не зависящие от s , что для любых заданных попарно непересекающихся подмножеств $J_1, \dots, J_k \subset \{1, \dots, s\}$, где $k \leq C_0 s^\gamma$, выполнена оценка

$$\mathbf{P} \left(\sum_{m=1}^k \left| \sum_{j \in J_m} x_j - \sum_{j \in J_m} \bar{x}_j \right| > \frac{N}{s^{(1-\gamma)/2-\varepsilon}} \right) < C e^{-K s^{\gamma+\varepsilon_1}}. \quad (9)$$

¹То же самое будет верно и для величины $V(J_1) + \dots + V(J_k)$, где $J_1, \dots, J_k$ – произвольные фиксированные непересекающиеся подмножества в $\{1, \dots, s\}$, а число k много меньше, чем s .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Неформально условие (ii) означает, что числа λ_i не сосредоточены в “чрезмерно узком” интервале, в то время как условие (i) дает противоположный крайний случай – все числа λ_j совпадают, так что минимум выражения в левой части условия (8) на сфере $t^2 + \tau^2 = \text{const}$ равен нулю. В работе [1] доказана (для задачи с дискретными переменными x_i) без дополнительных предположений (i) или (ii) более грубая, чем (9), оценка (при $\gamma = 0$)

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{j \in J} x_j - \sum_{j \in J} \bar{x}_j\right| > \frac{N}{s^{1/4-\varepsilon}}\right) < C e^{-K s^{\varepsilon_1}} \quad (10)$$

(показатель степени в оценке уклонений содержит $1/4$ вместо $1/2$). Доказательство более тонкой оценки (9) в настоящей работе опирается на исследование двумерных интегралов типа Лапласа. Было бы интересно, комбинируя методы данной работы и [1], распространить эту оценку на общий случай, т.е. избавиться от предположений (i) и (ii).

Сформулируем теперь результаты, вытекающие из предложения 1 для конкретных частных случаев.

Случай, когда все λ_j одинаковы. Рассмотрим прежде всего случай, когда все λ_j совпадают. Речь идет о поведении при больших s системы неотрицательных случайных величин x_j , $j = 1, \dots, s$, подчиненных единственному условию $\sum_{j=1}^s x_j = N$ и равномерно распределенных на множестве, задаваемом этим условием. Интерпретируя эти векторы как ступенчатые случайные функции, получаем следующие теоремы о слабом пределе для равномерного распределения с граничными условиями:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f_s(t)$, $s = 1, 2, \dots$, – последовательность независимых неотрицательных ступенчатых случайных функций на интервале $(0, 1]$ таких, что $f_s(t)$ постоянна на интервалах $t \in ((j-1)/s, j/s]$, $j = 1, \dots, s$, $\int_0^1 f_s(t) dt = 1$ и для каждого фиксированного s все функции, удовлетворяющие таким условиям, равновероятны. Тогда при $s \rightarrow \infty$ последовательность $f_s(t)$ слабо сходится к детерминированной функции $f(t) = 1$ почти наверное, т.е. для любой интегрируемой по Лебегу пробной функции $\varphi(t)$

$$\mathbf{P}\left(\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^1 (f_s(t) - 1)\varphi(t) dt = 0\right) = 1.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f_s(t)$, $s = 1, 2, \dots$ – последовательность независимых неубывающих ступенчатых случайных функций на отрезке $[0, 1]$ таких, что $f_s(t)$ постоянна на интервалах $t \in ((j-1)/s, j/s]$, $j = 1, \dots, s$, $f_s(0) = 0$, $f_s(1) = 1$ и для каждого фиксированного s все функции, удовлетворяющие таким условиям, равновероятны. Тогда при $s \rightarrow \infty$ последовательность $f_s(t)$ слабо сходится к детерминированной функции $f(t) = t$ почти наверное, т.е. для любой интегрируемой по Лебегу пробной функции $\varphi(t)$

$$\mathbf{P}\left(\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^1 (f_s(t) - t)\varphi(t) dt = 0\right) = 1.$$

Случай, когда λ_j различны. Пусть задана последовательность

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_j < \dots \quad (11)$$

попарно различных неотрицательных чисел, причем эта последовательность возрастает равномерно том смысле, что

$$\lambda_j \simeq \text{const} \cdot j \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty. \quad (12)$$

(Примером такой последовательности может служить $\lambda_j = j$ или $\lambda_j = j + aj^{-b}$, где $a, b > 0$ и a достаточно мало, так что последовательность возрастает при всех j .) Для заданного $s = 1, 2, \dots$ “обрежем” последовательность (11) на s -м члене, т.е. оставим только ее начальный отрезок $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, и рассмотрим случайный вектор $x = (x_1, \dots, x_s)$, равномерно распределенный на множестве (2). Поведение таких случайных величин при $s \rightarrow \infty$ описывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3. При выполнении условий (11), (12) и условия (6) для E для произвольных $C_0, \beta_{\min} > 0, \mu \in [0, 1/2), \gamma \in [0, 1), \varepsilon \in (0, (1-\gamma)/2)$ и $\varepsilon_1 < 2\varepsilon$ существуют такие числа $C, K > 0$, не зависящие от s , что для любых заданных попарно непересекающихся подмножеств $J_1, \dots, J_k \subset \{1, \dots, s\}$, где $k \leq C_0 s^\gamma$, справедлива оценка (9) при условии, что

$$\beta > \beta_{\min} s^{-\mu} N^{-1}. \quad (13)$$

ПРИМЕР 1 (см. также [4]). Рассмотрим задачу об безрисковом инвестировании ограниченного объема капиталовложений в инвестиционные фонды из заданного списка с заданной ранжировкой по приоритетности. Безрисковость будем понимать в смысле гипотезы “zero intelligence” для финансовых рынков: *действия трейдеров по покупке и продаже акций можно считать (псевдо)случайными*. Тогда все варианты распределения вложений при выполнении заданных ограничений равноправны, и если найдется такое распределение вложений, что большинство возможных вариантов распределения находится вблизи него, то оно и будет безрисковым.

Пусть задан список из s инвестиционных фондов $A_1, \dots, A_s$. Предполагается, что сумма C_i инвестиций в i -й инвестиционный фонд может быть произвольна. В такой ситуации разумно считать ее непрерывной переменной. Пусть заданы ограничения

$$\sum_{j=1}^s C_j \leq \Phi \quad (\text{бюджетное ограничение}),$$

$$K = C_1 \leq C_2 \leq \dots \leq C_s = M \quad (\text{условие приоритетности}).$$

Если обозначить

$$x_j = C_{s-j+1} - C_{s-j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, s-1,$$

то

$$\sum_{j=1}^{s-1} x_j = M - K \equiv N,$$

$$\sum_{j=1}^{s-1} jx_j \leq \Phi' = \Phi - Ks \equiv E.$$

Таким образом, в данной задаче $\lambda_j = j$ и можно применить теорему 3. Получаем, что (при выполнении соответствующих условий на E и β) доля числа вариантов, для которых при заданном l

$$\left| C_l - C_1 - \sum_{j=s-l+1}^{s-1} \frac{1}{\beta j - \nu} \right| > \frac{N}{s^{1/2-\varepsilon}},$$

где $\varepsilon > 0$, не превосходит $c_1 e^{-s^\delta}$, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. Итак, “безрисковое” вложение задается формулами

$$C_i = K + \sum_{j=s-l+1}^{s-1} \frac{1}{\beta j - \nu}, \quad i = 1, \dots, s.$$

2. Доказательства предложения и теорем

Будем в дальнейшем использовать обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x) &= \sum_{i=1}^s x_i, \quad \mathcal{E}(x) = \sum_{i=1}^s \lambda_i x_i, \quad x \in \mathbb{R}^s, \\ \Delta_{s-1} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^s : x_i \geq 0, i = 1, \dots, s; \sum_{j=1}^s x_j = s \right\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Прежде всего заметим, что без ограничения общности можно считать, что

$$N = s, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, s, \quad (14)$$

что и будет предполагаться в дальнейшем. Действительно, этого можно добиться преобразованием

$$\begin{aligned} N &\rightarrow s, \quad E \rightarrow \frac{sE}{N\lambda_s}, \quad \lambda_j \rightarrow \frac{\lambda_j}{\lambda_s}, \quad x \rightarrow \frac{s}{N} x, \\ \beta &\rightarrow \frac{N\lambda_s}{s} \beta, \quad \nu \rightarrow \frac{N}{s} \nu, \quad \bar{x} \rightarrow \frac{s}{N} \bar{x}, \end{aligned} \quad (15)$$

относительно которого все формулы, предположения и утверждения, используемые в предложении, инвариантны. При этом оценка в утверждении предложения приобретает вид

$$\mathbf{P} \left(\sum_{m=1}^k \left| \sum_{j \in J_m} x_j - \sum_{j \in J_m} \bar{x}_j \right| > s^{(1+\gamma)/2+\varepsilon} \right) < C e^{-K s^{\gamma+\varepsilon_1}}, \quad (16)$$

а оценка в условии (ii) – вид

$$\sum_{j=1}^s \left(\frac{t - \beta \lambda_j \tau}{\beta \lambda_j - \nu} \right)^2 \geq c_1 s^\alpha (t^2 + \tau^2), \quad (t, \tau) \in \mathbb{R}^2. \quad (17)$$

Разберем последовательно указанные в предложении случаи.

Пусть выполнено условие (i). Тогда $\bar{x}_j = 1$, $j = 1, \dots, s$. Будем считать во избежание громоздкости, что $k = 1$, а в конце доказательства укажем изменения, которые нужно сделать в общем случае. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\left|\sum_{j \in J} x_j - \sum_{j \in J} 1\right| > \delta\right) &= \frac{1}{\text{vol } \Delta_{s-1}} \int_{A(\delta)} dx_1 \dots dx_{s-1} \\ &= \frac{1}{\text{vol } \Delta_{s-1}} \int_{B(\delta)} dx_1 \dots dx_{s-1} dx_s, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A(\delta) &= \left\{x \in \Delta_{s-1} : \left|\sum_{j \in J} x_j - \sum_{j \in J} 1\right| > \delta\right\}, \\ B(\delta) &= \{x \in \mathbb{R}^s : x = y + (0, \dots, 0, \tau), y \in A(\delta), \tau \in [0, 1]\}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\phi(x) = \sum_{j \in J} (x_j - 1)$$

На множестве $B(\delta)$ для любого $c > 0$ справедливо неравенство

$$1 \leq e^{s+2-c\delta} e^{-\sum_{j=1}^s x_j} e^{c|\phi(x)|} \leq e^{s+2-c\delta} e^{-\sum_{j=1}^s x_j} (e^{c\phi(x)} + e^{-c\phi(x)}) \quad (18)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{B(\delta)} dx_1 \dots dx_s &\leq e^{s+2-c\delta} \int_{B(\delta)} e^{-\sum_{j=1}^s x_j} (e^{c\phi(x)} + e^{-c\phi(x)}) dx_1 \dots dx_s \\ &\leq e^{s+2-c\delta} \int_{\mathbb{R}_+^s} e^{-\sum_{j=1}^s x_j} (e^{c\phi(x)} + e^{-c\phi(x)}) dx_1 \dots dx_s \\ &\equiv e^{s+2-c\delta} (I_+ + I_-) \end{aligned} \quad (19)$$

Пусть $l = \#(J)$ – число элементов во множестве J . Тогда

$$I_{\pm} = \exp\{-l(\ln(1 \mp c) \pm c)\} = \exp\left\{\frac{lc^2}{2(1+\theta c)}\right\} \leq \exp\left\{\frac{sc^2}{2(1+\theta c)}\right\},$$

где $|\theta| \leq 1$, и, значит, при $0 \leq c \leq 1/2$ и достаточно больших s таких, что

$$\text{vol } \Delta_{s-1} = \frac{s^{s-1}}{(s-1)!} \geq \frac{2}{3} \frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}},$$

имеем

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{j \in J} x_j - \sum_{j \in J} 1\right| > \delta\right) \leq \frac{3\sqrt{2\pi s}}{2e^s} \cdot 2e^{s+2-c\delta+sc^2} = 3\sqrt{2\pi s} e^{2-c\delta+sc^2}. \quad (20)$$

Взяв $\delta = s^{1/2+\varepsilon}$ и минимизируя правую часть по s (минимум достигается в точке $\delta/(2s) = s^{-1/2+\varepsilon}/2 \in [0, 1/2]$), получаем

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{j \in J} x_j - \sum_{j \in J} 1\right| > s^{1/2+\varepsilon}\right) \leq 3\sqrt{2\pi s} e^{2-s^{2\varepsilon}/4} \leq C e^{-K s^{2\varepsilon}}$$

для любого $K < 1/4$ при достаточно большом C (зависящем от K)².

Укажем изменения, необходимые в доказательстве при произвольном $k \leq C_0 s^\gamma$. Вместо функции $\phi(x)$ вводятся функции

$$\phi_m(x) = \sum_{j \in J_m} (x_j - 1), \quad m = 1, \dots, k;$$

тогда в формулах (18) и (19) сумма $e^{c\phi(x)} + e^{-c\phi(x)}$ заменяется на произведение

$$\prod_{m=1}^k (e^{c\phi_m(x)} + e^{-c\phi_m(x)}), \quad (21)$$

а в правой части оценки (2) сумма $I_+ + I_-$ заменяется на сумму 2^k членов, каждый из которых отвечает одному из слагаемых в сумме, получающейся, если раскрыть скобки в произведении (21). При $0 \leq c \leq 1/2$ каждый из этих членов по-прежнему оценивается через e^{sc^2} . С учетом того, что число их не превосходит $2^{C_0 s^\gamma} = e^{C_0 s^\gamma \ln 2}$, аналогично (20) получаем

$$\mathbf{P} \leq \frac{3}{2} \sqrt{2\pi s} e^{2+C_0 s^\gamma \ln 2 - c\delta + sc^2}.$$

Взяв $\delta = s^{(\gamma+1)/2+\varepsilon}$ и минимизируя правую часть по s , получаем

$$\mathbf{P} \leq \frac{3}{2} \sqrt{2\pi s} e^{2+C s^\gamma \ln 2 - s^{\gamma+2\varepsilon}/4},$$

откуда немедленно следует нужная оценка.

Пусть выполнено условие (ii). Заметим, что из неравенств (6) вытекает, что при некоторых $b, \beta_0, c_0 > 0$, не зависящих от s , выполнены неравенства

$$0 < \beta \leq \beta_0, \quad \nu < -c_0, \quad 1/b < \bar{x}_i \leq b, \quad i = 1, \dots, s, \quad (22)$$

которые будут использованы в дальнейшем.

Мы опять считаем, что $k = 1$; необходимые изменения для общего k аналогичны указанным в п. (i). Обозначим

$$\phi(x) = \sum_{j \in J} (x_j - \bar{x}_j),$$

$$D_\delta = \{x \in \Delta_{s-1} : \mathcal{E}(x) \leq E, |\phi(x)| \geq \delta\},$$

$$\Gamma(E, s, \delta) = \int_{D_\delta} dx_1 \dots dx_{s-1}, \quad \Gamma(E, s) = \Gamma(E, s, 0).$$

²Полагая в конце доказательства $\delta = s^{1/2} \ln s$, можно также получить оценку

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{j \in J} x_j - \sum_{j \in J} 1\right| > s^{1/2} \ln s\right) \leq C s^{-K \ln s} \leq C_m s^{-m}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

с некоторыми постоянными C_m .

Вероятность, которую нужно оценить (обозначим ее просто через $\mathbf{P}$) есть отношение

$$\mathbf{P} = \frac{\Gamma(E, s, s^{1/2+\varepsilon})}{\Gamma(E, s)}.$$

Мы получим оценку сверху для $\Gamma(E, s, \delta)$ и оценку снизу для $\Gamma(E, s)$, что и даст нужную оценку для $\mathbf{P}$.

Оценка сверху для меры множества вариантов с большими отклонениями. Эта оценка по существу доказывается так же, как и в случае (i) (оценка (ii) при этом не используется). Справедливо соотношение

$$\Gamma(E, s, \delta) = \int_{\tilde{D}_\delta} dx_1 \dots dx_s, \quad (23)$$

где

$$\tilde{D}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^s : x = y + (\tau, 0, \dots, 0), y \in D_\delta, \tau \in [0, 1]\}.$$

На множестве $\tilde{D}_\delta$ справедливы неравенства

$$\mathcal{N}(x) \leq s + 1, \quad \mathcal{E}(x) \leq E + \lambda_1, \quad |\phi(x)| \geq \delta - 1,$$

а следовательно, для любого $c \geq 0$, неравенство

$$\begin{aligned} 1 &\leq e^{\beta E + \beta \lambda_1 - \nu s - \nu - c\delta + c} e^{-\beta \mathcal{E}(x) + \nu \mathcal{N}(x)} e^{c|\phi(x)|} \\ &\leq e^{\beta E - \nu s + \beta \lambda_1 - \nu + c - c\delta} e^{-\beta \mathcal{E}(x) + \nu \mathcal{N}(x)} (e^{c\phi(x)} + e^{-c\phi(x)}). \end{aligned} \quad (24)$$

Кроме того, функция в правой части (24) всюду положительна. Поэтому, заменяя подынтегральное выражение в (23) на эту функцию и расширяя область интегрирования до положительного октанта $\mathbb{R}_+^s$, получаем оценку

$$\Gamma(E, s, \delta) \leq e^{c + \beta \lambda_1 - \nu} e^{\beta E - \nu s - c\delta} (I_+ + I_-),$$

где

$$I_\pm = \int_{\mathbb{R}_+^s} e^{-\beta \mathcal{E}(x) + \nu \mathcal{N}(x) \pm c\phi(x)} dx_1 \dots dx_s.$$

Оценим, например, интеграл I_+ (I_- оценивается точно так же). Имеем

$$I_+ = \prod_{j \in J} e^{-c\bar{x}_i - \ln(\beta \lambda_j - \nu - c)} \prod_{j \notin J} e^{-\ln(\beta \lambda_j - \nu - c)}$$

Далее, по формуле Тейлора с остаточным членом при $0 \leq c \leq |\nu|/2$ имеем

$$\begin{aligned} -c\bar{x}_i - \ln(\beta \lambda_j - \nu - c) &= -\ln(\beta \lambda_j - \nu) + \frac{c}{\beta \lambda_j - \nu} + \frac{c^2}{2} \left(\frac{1}{\beta \lambda_j - \nu - \theta c} \right)^2 - c\bar{x}_i \\ &= -\ln(\beta \lambda_j - \nu) + \frac{c^2}{2} \left(\frac{1}{\beta \lambda_j - \nu - \theta c} \right)^2 \\ &\leq -\ln(\beta \lambda_j - \nu) + \frac{c^2}{2} \left(\frac{1}{\beta \lambda_j - \nu/2} \right)^2 \\ &\leq -\ln(\beta \lambda_j - \nu) + \frac{c^2}{2} \cdot 4 \left(\frac{1}{\beta \lambda_j - \nu} \right)^2 \end{aligned}$$

для некоторого $\theta \in [0, 1]$, так что

$$\Gamma(E, s, \delta) \leq 2e^{c+\beta\lambda_1-\nu} e^{\beta E-\nu s-\sum_{j=1}^s \ln(\beta\lambda_j-\nu)} e^{-c\delta+K_1 s c^2/2},$$

где K_1 – такая постоянная (не зависящая от s), что

$$\sum_{j=1}^s \left(\frac{1}{\beta\lambda_j - \nu} \right)^2 < \frac{K_1 s}{4}.$$

Полагая $\delta = s^{1/2+\varepsilon}$ и минимизируя правую часть по c (минимум достигается в точке $c = \delta/(Ks) = K^{-1}s^{-1/2+\varepsilon}$; при достаточно больших s эта величина меньше, чем $c_0/2$, так что в силу второго условия из (22) эта точка действительно лежит на отрезке $[0, |\nu|/2]$), получаем окончательную верхнюю оценку

$$\Gamma(E, s, s^{1/2+\varepsilon}) \leq \text{const } e^{\beta E-\nu s-\sum_{i=1}^s \ln(\beta\lambda_i-\nu)} e^{-s^{2\varepsilon}/(2K_1)}. \quad (25)$$

(Здесь постоянной const мы оценили сомножитель $2e^{c+\beta\lambda_1-\nu}$.)

Оценка снизу для меры множества всех вариантов. Для $\Gamma(E, s)$ справедлива формула

$$\begin{aligned} \Gamma(E, s) &= \int_{\Delta_{s-1}} \Theta(E - \mathcal{E}(x)) dx_1 \dots dx_{s-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^s} \Theta(E - \mathcal{E}(x)) \delta(\mathcal{N}(x) - s) dx_1 \dots dx_s. \end{aligned} \quad (26)$$

(Заметим, что произведение δ - и Θ -функций корректно определено, поскольку в силу условия (8) не все λ_i одинаковы, а значит, градиенты функций $\mathcal{N}(x)$ и $\mathcal{E}(x)$ линейно независимы.) Воспользуемся интегральными представлениями Θ - и δ -функции

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{N}(x) - s) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^{\nu(\mathcal{N}(x)-s)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\mathcal{N}(x)-s)} \rho(at) dt, \\ \Theta(y) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\beta y(1+i\tau)}}{\tau - i} \rho(a\tau) d\tau \end{aligned}$$

(предел в смысле *-слабой сходимости линейных функционалов), где ρ – финитная функция, равная единице в начале координат, подставим их в формулу (26) и проведем интегрирование по всем x_i от 0 до ∞ ; затем, переходя в подынтегральном выражении к пределу при $a \rightarrow 0$, получим

$$\Gamma(E, s) = \frac{e^{\beta E-\nu N-\sum_{j=1}^s \ln(\beta\lambda_j-\nu)}}{4\pi^2 i} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{s\Phi(t,\tau)}}{\tau - i} d\tau dt, \quad (27)$$

где

$$\Phi(t, \tau) = i \frac{\beta E}{s} \tau - it - \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s [\ln(\beta\lambda_j - \nu + i\beta\lambda_j\tau - it) - \ln(\beta\lambda_j - \nu)],$$

а аргумент выражения под знаком логарифма выбирается в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. (Как мы увидим ниже, интеграл (27) абсолютно сходится, так что переход к пределу в подынтегральном выражении – законная процедура.)

Дадим оценку снизу интеграла (27), используя метод, аналогичный применявшемуся в статье [3]. Дополнительная сложность (по сравнению со случаем, который рассматривался в указанной статье) состоит в том, что фазовая функция комплексна и, кроме того, сама зависит от большого параметра. Однако ее специальная структура позволяет тем не менее провести нужные оценки.

Обозначим

$$d_j \equiv d_j(t, \tau) = \frac{\beta \lambda_j \tau - t}{\beta \lambda_j - \nu}, \quad j = 1, \dots, s, \quad r = \sqrt{t^2 + \tau^2}. \quad (28)$$

Тогда, используя уравнения (1), получаем

$$\begin{aligned} \Phi(t, \tau) &= i \frac{\beta E}{s} \tau - it - \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \ln[1 + i d_j(t, \tau)] \\ &= \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s (-\ln[1 + d_j^2] + i[d_j - \arctan d_j]). \end{aligned} \quad (29)$$

Из наложенных нами условий вытекает, что все производные функции Φ равномерно по s ограничены. Кроме того,

$$\Phi(0, 0) = 0, \quad \operatorname{Re} \Phi(t, \tau) \leq 0.$$

Разобьем интеграл (27) на два интеграла:

$$\begin{aligned} \Gamma(E, s) &= \frac{e^{\beta E - \nu N - \sum_{j=1}^s \ln(\beta \lambda_j - \nu)}}{4\pi^2} \left(\frac{1}{i} \int_{r \leq 1} (\dots) + \frac{1}{i} \int_{r \geq 1} (\dots) \right) \\ &\equiv \frac{e^{\beta E - \nu N - \sum_{j=1}^s \ln(\beta \lambda_j - \nu)}}{4\pi^2} (I_1 + I_2) \end{aligned}$$

и изучим каждый из них по отдельности. Интеграл (27) вещественный, поэтому при достаточно оценить вещественные части интегралов I_1 и I_2 . Прежде всего займемся интегралом

$$I_1 = \iint_{r < 1} e^{s \operatorname{Re} \Phi} \frac{e^{is \operatorname{Im} \Phi}}{1 + i\tau} d\tau dt \equiv \iint_{r < 1} e^{s \operatorname{Re} \Phi} f(s, t, \tau) d\tau dt.$$

В круге $\{r \leq 1\}$ справедливы неравенства

$$|d_j| \leq C_1, \quad \frac{C_2}{s} \sum_{j=1}^s d_j^2 \geq -\operatorname{Re} \Phi \geq \frac{C_3}{s} \sum_{j=1}^s d_j^2, \quad |\operatorname{Im} \Phi| \leq \frac{C_4}{s} \sum_{j=1}^s d_j^3 \quad (30)$$

(здесь и ниже C_j – положительные постоянные, зависящие от s). Далее, с учетом (17) имеем

$$c_1 s^\alpha r^2 \leq \sum_{j=1}^s d_j^2 \leq C_1^2 s r^2.$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^s d_j^3 \leq C_1 r \sum_{j=1}^s d_j^2 \leq C_1 r \sum_{j=1}^s d_j^2 \frac{(\sum_{j=1}^s d_j^2)^{1/2}}{c_1^{1/2} s^{\alpha/2} r} = C_5 \left(\sum_{j=1}^s d_j^2 \right)^{3/2} s^{-\alpha/2}.$$

Комбинируя эту оценку с (30), получаем, что в круге $\{r \leq 1\}$ справедливо неравенство

$$|\operatorname{Im} \Phi| \leq C_6 s^{(1-\alpha)/2} (-\operatorname{Re} \Phi)^{3/2}. \quad (31)$$

Разобьем круг $D = \{r \leq 1\}$ на три подмножества:

$$D = A \cup (B \setminus A) \cup C,$$

где

$$A = \{(t, \tau) \in D : r \leq as^{-1/2}\},$$

$$B = \{(t, \tau) \in D : -\operatorname{Re} \Phi \leq bs^{\alpha/3-1}\},$$

$$C = \{(t, \tau) \in D : -\operatorname{Re} \Phi > bs^{\alpha/3-1}\},$$

где a и b – некоторые постоянные, не зависящие от s . На множестве B выполнено условие

$$|s \operatorname{Im} \Phi| \leq C_6 s \cdot s^{(1-\alpha)/2} (bs^{\alpha/3-1})^{3/2} = C_6 b^{3/2}.$$

Поэтому для достаточно малого b аргумент функции $f(s, t, \tau)$ при $(t, \tau) \in B$ будет лежать в интервале $(-\pi/2 + C_7, \pi/2 - C_7)$, а так как ее модуль не меньше $1/\sqrt{2}$, то на множестве B справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} f(s, t, \tau) > C_8.$$

Итак, вещественная часть подынтегрального выражения на множестве B будет положительна. Далее, на множестве A справедливо неравенство

$$-\operatorname{Re} \Phi \leq C_9 a^2 s^{-1},$$

поэтому при достаточно малом a справедливо включение $A \subset B$ и, следовательно, вещественная часть интеграла по B оценивается снизу через вещественную часть интеграла по A . На множестве A вещественная часть подынтегрального выражения не меньше, чем $C_8 e^{-C_9 a^2}$, а его площадь равна $\pi a^2 s^{-1}$, так что в итоге получаем, что интеграл по множеству A , а значит, и по множеству B , оценивается снизу величиной $C_{10} s^{-1}$. Далее, на множестве C вещественная часть показателя экспоненты удовлетворяет неравенству

$$s \operatorname{Re} \Phi \leq -bs^{\alpha/3},$$

так что этот интеграл экспоненциально мал. Окончательно получаем

$$\operatorname{Re} I_1 \geq C_{11} s^{-1} \quad (32)$$

при больших s . Оценим теперь интеграл I_2 :

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \iint_{r>1} \frac{e^{s \operatorname{Re} \Phi}}{\sqrt{1+\tau^2}} d\tau dt \\ &= \iint_{r>1} \frac{e^{s \operatorname{Re} \Phi + \ln(1+r^2/c_1)}}{(1+r^2/c_1)\sqrt{1+\tau^2}} d\tau dt \\ &\leq C_{12} \exp \left\{ \sup_{r>1} \left[s \operatorname{Re} \Phi + \ln \left(1 + \frac{r^2}{c_1} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$C_{12} = \iint \frac{1}{(1+r^2/c_1)\sqrt{1+\tau^2}} d\tau dt < \infty,$$

а постоянная $c_1 > 0$ та же, что и в (17). Оценим супремум в (33). Пусть

$$d^2 = \sum_{j=1}^s d_j^2, \quad \alpha_j = d_j^2/d^2, \quad j = 1, \dots, s.$$

Тогда

$$s \operatorname{Re} \Phi + \ln \left(1 + \frac{r^2}{c_1} \right) \leq s \operatorname{Re} \Phi + \sum_{j=1}^s \ln \left(1 + \frac{\alpha_j r^2}{c_1} \right) = - \sum_{j=1}^s \ln \left(\frac{1 + d_j^2}{1 + d_j^2 r^2 / (c_1 d^2)} \right).$$

Согласно (17) имеем $r^2/d^2 \leq c_1 s^{-\alpha}$, поэтому

$$\ln \left(\frac{1 + d_j^2}{1 + d_j^2 r^2 / (c_1 d^2)} \right) \geq \ln \left(\frac{1 + d_j^2}{1 + d_j^2 s^{-\alpha}} \right) = \int_{1+d_j^2 s^{-\alpha}}^{1+d_j^2} \frac{dx}{x} \geq (1 - s^{-\alpha}) \frac{d_j^2}{1 + d_j^2}$$

и

$$s \operatorname{Re} \Phi + \ln \left(1 + \frac{r^2}{c_1} \right) \leq -(1 - s^{-\alpha}) \sum_{j=1}^s \frac{d_j^2}{1 + d_j^2}.$$

Функция $d_j^2/(1 + d_j^2)$ возрастает с ростом r , поэтому правая часть не превышает своего значения на сфере $r = 1$, а оно в свою очередь не превышает $-C_{13} \sum_{j=1}^s d_j^2 \geq -C_{14} s^\alpha$. Итак, интеграл I_2 также экспоненциально мал, и в итоге получаем для $\Gamma(E, s)$ оценку

$$\Gamma(E, s) \geq C_{15} \frac{e^{\beta E - \nu N - \sum_{j=1}^s \ln(\beta \lambda_j - \nu)}}{s}.$$

Комбинируя эту оценку с оценкой (25), получаем утверждение предложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 И 2. Докажем теорему 1 (вывод теоремы 2 аналогичен). Функциям f_s можно взаимно однозначно сопоставить векторы x из предложения 1 по правилу

$$f_s(t) = x_j \quad \text{при } t \in ((j-1)/s, j/s], \quad j = 1, \dots, s.$$

Достаточно доказать утверждение для случая, когда φ – характеристическая функция некоторого отрезка $[a, b] \subset [0, 1]$. Для каждого s этот отрезок покрывается

отрезками $X_j = [(j-1)/s, j/s]$, $j = m_1, \dots, m_2$, (где m_1, m_2 зависят от s), так что $a \in X_{m_1}$, $b \in X_{m_2}$,

$$\bigcup_{j=m_1+1}^{m_2-1} X_j \subseteq [a, b] \subseteq \bigcup_{j=m_1}^{m_2} X_j.$$

Поэтому

$$\left| \int_0^1 (f_s(t) - 1) \varphi(t) dt \right| \leq \frac{1}{s} \left(\left| \sum_{j \in J_{s1}} (x_j - 1) \right| + \left| \sum_{j \in J_{s2}} (x_j - 1) \right| + \left| \sum_{j \in J_{s3}} (x_j - 1) \right| \right), \quad (34)$$

где $J_{s1} = \{m_1\}$, $J_{s2} = \{m_1 + 1, \dots, m_2 - 1\}$, $J_{s3} = \{m_2\}$. Обозначим сумму в правой части равенства (4) через z_s . Достаточно доказать, что $z_s \rightarrow 0$ п.н. Согласно предложению 1

$$\mathbf{P}(z_s > s^{-1/2+\varepsilon}) < Ce^{-Ks^{\varepsilon_1}},$$

поэтому для любого $\delta > 0$ при достаточно больших s

$$\mathbf{P}(z_s > \delta) < Ce^{-Ks^{\varepsilon_1}}, \quad \mathbf{P}(z_s \leq \delta) > 1 - Ce^{-Ks^{\varepsilon_1}}.$$

Далее, обозначим через $A_{k\delta}$ событие

$$A_{k\delta} = \{z_s \leq \delta \text{ для всех } s \geq k\}.$$

Тогда для любого достаточно большого $k \geq k(\delta)$ имеем

$$\mathbf{P}(A_{k\delta}) \geq \prod_{s \geq k} (1 - Ce^{-Ks^{\varepsilon_1}}) \geq 1 - C \sum_{s \geq k} e^{-Ks^{\varepsilon_1}} \rightarrow 1$$

при $k \rightarrow \infty$ и фиксированном δ . Вычислим теперь вероятность сходимости $z_s \rightarrow 0$. Имеем

$$\mathbf{P}(z_s \rightarrow 0) = \mathbf{P}(\forall \delta > 0 \exists k \forall s \geq k : z_s \leq \delta) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{\delta} \bigcup_k A_{k\delta}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{\delta} B_{\delta}\right),$$

где $B_{\delta} = \bigcup_k A_{k\delta}$. Поскольку $A_{k\delta} \subset A_{k'\delta}$ при $k \leq k'$ и $B_{\delta} \subset B_{\delta'}$ при $\delta \geq \delta'$, то

$$\mathbf{P}(B_{\delta}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_{k\delta}) = 1, \quad \mathbf{P}(z_s \rightarrow 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{P}(B_{\delta}) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. При каждом s сделаем преобразование (15), сводя дело к случаю, когда $n = s$, а все числа λ_j лежат на отрезке $[0, 1]$. При этом условие (13) с учетом того факта, что $\lambda_s \sim \text{const } s$, приобретает вид $\beta \geq \text{const } s^{-\mu}$ с положительной постоянной const . В силу условия теоремы асимптотически при $s \rightarrow \infty$ получаем, что на отрезке $[0, 1]$ имеется s чисел λ_j с равномерной функцией распределения. Для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение неравенства (17). В силу третьего неравенства в (22) неравенство (17) эквивалентно (с другой постоянной) неравенству

$$\sum_{i=1}^s (t - \beta \lambda_i \tau)^2 \geq c_1 s^{\alpha} (t^2 + \tau^2), \quad (t, \tau) \in \mathbb{R}^2, \quad (35)$$

которое мы и будем проверять. Неравенство это, очевидно, выполнено при достаточно малых $|\tau|/|t|$, так что достаточно проверить его при $|\tau|/|t| > \text{const} > 0$, т.е., в силу однородности, при $\tau = 1$. Рассмотрим минимум его левой части

$$f(t) \equiv \sum_{i=1}^s (t - \beta \lambda_i)^2 = st^2 - 2Bt + C,$$

где

$$B = \beta \sum_{i=1}^s \lambda_j, \quad C = \beta^2 \sum_{i=1}^s \lambda_j^2.$$

Минимум достигается при

$$t = \frac{B}{s} = \frac{1}{s} \beta \sum_{i=1}^s \lambda_j, \quad |t| \leq \beta \leq \beta_0,$$

и равен

$$C - \frac{B^2}{s} = \beta^2 \sum_{i=1}^s \lambda_j^2 - \frac{\beta^2 (\sum_{i=1}^s \lambda_j)^2}{s} = s\beta^2 (\langle \lambda^2 \rangle - \langle \lambda \rangle^2)$$

(здесь $\langle f \rangle = s^{-1} \sum_{j=1}^s f_j$ — усреднение по всем $j = 1, \dots, s$). Достаточно, таким образом, доказать неравенство

$$s\beta^2 (\langle \lambda^2 \rangle - \langle \lambda \rangle^2) \geq cs^\alpha$$

с некоторыми постоянными $c > 0$ и $\alpha \in (0, 1]$. Поскольку неравенство нужно доказать для больших s , для вычисления средних используем предельное (т.е. равномерное) распределение. Тогда получим

$$\langle \lambda^2 \rangle = \int_0^1 \lambda^2 d\lambda = \frac{1}{3}, \quad \langle \lambda \rangle = \int_0^1 \lambda d\lambda = \frac{1}{2}, \quad \langle \lambda^2 \rangle - \langle \lambda \rangle^2 = \frac{1}{12}.$$

Поскольку $\beta \geq \text{const } s^{-\mu}$, требуемое неравенство выполнено с постоянной $\alpha = 1 - 2\mu$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. P. Maslov, *On a Distribution in Frequency Probability Theory Corresponding to the Bose–Einstein Distribution*, [arXiv: math/0612394](#).
- [2] V. P. Maslov, *Negative Dimension in General and Asymptotic Topology*, [arXiv: math/0612543](#).
- [3] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, “Логарифмическая асимптотика быстроубывающих решений гиперболических по Петровскому уравнений”, *Матем. заметки*, **45**:5 (1989), 50–62.
- [4] В. П. Маслов, *Квантовая экономика*, Наука, М., 2007.

В. П. Маслов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило

10.04.2007

В. Е. Назайкинский

Институт проблем механики РАН