Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Новиков, Бесселевы последовательности как проекции ортогональных систем, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 6, 893–903

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3739>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 07:51:59

Бесселевы последовательности как проекции ортогональных систем

С. Я. Новиков

Доказаны обобщения теорем Шура и Олевского о продолжении систем функций с интервала I до ортогональных систем на интервале $J, I \subset J$. Бесселевы системы в $L^2(I)$ и только они являются проекциями ортогональных систем из более широкого пространства $L^2(J)$. Этот факт позволяет одним методом перенести классические теоремы о сходимости почти всюду ортогональных рядов (Меньшова–Радемахера, Пэли–Зигмунда, Гарсиа) на ряды по бесселевым системам. Проекция полной ортогональной системы из $L^2(J)$ на $L^2(I)$ является жестким фреймом, но не базисом.

Библиография: 10 названий.

Основными объектами работы являются два вида последовательностей в комплексном гильбертовом пространстве – бесселевы последовательности и фреймы (каркасы). Они стали весьма популярными в математической литературе последних лет, как теоретической, так и прикладной направленности [1]–[4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется *бесселевой*, если существует константа $B > 0$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Число B называется *границей бесселевой последовательности*. Точную нижнюю грань всех возможных границ бесселевой последовательности называют *оптимальной границей бесселевой последовательности*.

ЛЕММА 2. Ортогональная система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\|\varphi_k\| = \sqrt{B}, k=1, 2, \dots$, является бесселевой последовательностью с границей B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для ортонормированной системы $f_k = \varphi_k/\sqrt{B}$ имеет место классическое неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2, \quad f \in \mathcal{H},$$

из которого следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad f \in \mathcal{H}.$$

С бесселевой последовательностью связаны два оператора: оператор

$$C = C_{\mathcal{F}}: \mathcal{H} \rightarrow \ell^2, \quad C_{\mathcal{F}} f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$$

называется *оператором анализа*, оператор

$$D = D_{\mathcal{F}}: \ell^2 \rightarrow \mathcal{H}, \quad D_{\mathcal{F}}\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

– *оператором синтеза*. Операторы C и D являются взаимно сопряженными.

ЛЕММА 3. *Последовательность $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ является бесселевой в $\mathcal{H}$ с границей B тогда и только тогда, когда оператор синтеза $D_{\mathcal{F}}$ ограничен из ℓ^2 в $\mathcal{H}$ и $\|D\| \leq \sqrt{B}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – бесселева последовательность с границей B и $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$. Покажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ сходится. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$ и $n > m$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n c_k f_k - \sum_{k=1}^m c_k f_k \right\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^n c_k f_k \right\| = \sup_{\|g\|=1} \left| \left\langle \sum_{k=m+1}^n c_k f_k, g \right\rangle \right| \\ &\leq \sup_{\|g\|=1} \sum_{k=m+1}^n |c_k \langle f_k, g \rangle| \\ &\leq \left(\sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \right)^{1/2} \sup_{\|g\|=1} \left(\sum_{k=m+1}^n |\langle f_k, g \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{B} \left(\sum_{k=m+1}^n |c_k|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$, из проведенных преобразований получаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ сходится и $\|D\| \leq \sqrt{B}$.

Для доказательства обратной импликации предположим, что оператор синтеза ограничен и $\|D\| \leq \sqrt{B}$. Тогда сопряженный оператор, оператор анализа C , также ограничен и мы приходим к определению бесселевой последовательности.

Заметим, что определение бесселевой последовательности не зависит от порядка следования элементов последовательности. Это простое замечание приводит к важному следствию.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – бесселева последовательность в $\mathcal{H}$, то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

сходится безусловно для всех $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$.

Для бесселевой последовательности $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ определен ограниченный оператор

$$C \circ D: \ell^2 \rightarrow \ell^2, \quad C \circ D\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \left\langle \sum_{l=1}^{\infty} c_l f_l, f_k \right\rangle \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Матричное представление этого оператора в стандартном базисе $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ ортов пространства ℓ^2 имеет вид

$$(C \circ D)_{j,k} = \langle C \circ De_k, e_j \rangle = \langle De_k, De_j \rangle = \langle f_k, f_j \rangle,$$

т.е. является матрицей Грама $G_{\mathcal{F}}$ последовательности $\mathcal{F}$. Известно [4; п. 3.5.1], что матрица Грама $G_{\mathcal{F}}$ определяет ограниченный на ℓ^2 оператор с $\|G_{\mathcal{F}}\| \leq B$ в том и только том случае, когда последовательность $\mathcal{F}$ бesselева с границей B . Нам понадобится уточнение последнего результата.

ЛЕММА 5. *Последовательность $\mathcal{F}$ бesselева с границей B в том и только том случае, когда ее матрица Грама удовлетворяет неравенствам $0 \leq G_{\mathcal{F}} \leq B\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – тождественный оператор пространства ℓ^2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если последовательность бesselева, то

$$\langle G_{\mathcal{F}}c, c \rangle = \langle C_{\mathcal{F}} \circ D_{\mathcal{F}}c, c \rangle = \langle D_{\mathcal{F}}^* \circ D_{\mathcal{F}}c, c \rangle = \langle D_{\mathcal{F}}c, D_{\mathcal{F}}c \rangle \geq 0, \quad c \in \ell^2,$$

и в силу леммы 3

$$\langle G_{\mathcal{F}}c, c \rangle = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\|^2 \leq B\|c\|^2 = B\langle c, c \rangle, \quad c \in \ell^2.$$

С другой стороны, из неравенства $B\mathbf{I} - G_{\mathcal{F}} \geq 0$ получаем

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \right\|^2 \leq B\|c\|^2, \quad c \in \ell^2,$$

что эквивалентно (лемма 3) бesselевости последовательности $\mathcal{F}$.

ЛЕММА 6. *Если матрица A определяет ограниченный неотрицательный оператор в пространстве ℓ^2 , то в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ существует последовательность элементов $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что матрица Грама $G_{\mathcal{F}} = A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В комплексном гильбертовом пространстве каждый ограниченный неотрицательный оператор A является самосопряженным. Для него однозначно определен неотрицательный (следовательно, самосопряженный) оператор $\sqrt{A}$ такой, что $(\sqrt{A})^2 = A$ [5; п. 12.33]. В пространстве ℓ^2 последовательность $\mathcal{F}$ образована строками матрицы, которая соответствует оператору $\sqrt{A}$. Для определения последовательности в произвольном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ используется изометрия пространств ℓ^2 и $\mathcal{H}$.

В следующей теореме, обобщающей известный критерий Шура ([6; гл. 8, теорема 1], [7; с. 56]), показано, что бesselевы последовательности в пространстве $L^2(I)$ являются проекциями ортогональных систем из более широкого пространства $L^2(J)$.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть I и J – открытые интервалы на числовой прямой $\mathbb{R}$, причем $I \subset J^1$. Функции $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty$ образуют бesselеву последовательность в пространстве $L^2(I)$ с границей B тогда и только тогда, когда в пространстве $L^2(J)$ существует ортогональная система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ такая, что*

$$\|\varphi_k(x)\| = \sqrt{B}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{и} \quad f_k(x) = \varphi_k(x), \quad x \in I, \quad k = 1, 2, \dots$$

¹Допускаются и неограниченные интервалы. Знак $\subset$ применяется для обозначения строгого включения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функции $\mathcal{F} = \{f_k(x)\}_{k=1}^\infty$ образуют бesselеву последовательность в пространстве $L^2(I)$ с границей B . По лемме 3 имеем неравенство $B\mathbf{I} - G_{\mathcal{F}} \geq 0$. Следовательно (лемма 6), в пространстве $L^2(J \setminus I)$ существует последовательность функций $\widetilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{f}_k(x)\}_{k=1}^\infty$ такая, что

$$G_{\widetilde{\mathcal{F}}} = B\mathbf{I} - G_{\mathcal{F}}.$$

Определим функции $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ равенствами

$$\varphi_k(x) = f_k(x) + \tilde{f}_k(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

и проверим их ортогональность:

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \int_J \varphi_k(x) \bar{\varphi}_j(x) dx = \int_I f_k(x) \bar{f}_j(x) dx + \int_{J \setminus I} \tilde{f}_k(x) \bar{\tilde{f}}_j(x) dx,$$

следовательно,

$$G_\Phi = G_{\mathcal{F}} + G_{\widetilde{\mathcal{F}}} = G_{\mathcal{F}} + B\mathbf{I} - G_{\mathcal{F}} = B\mathbf{I},$$

что и означает ортогональность и равенство всех норм.

Обратно, пусть в пространстве $L^2(J)$ задана ортогональная система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ такая, что $\|\varphi_k(x)\| = \sqrt{B}$, $k = 1, 2, \dots$. Для каждого $k = 1, 2, \dots$ определим функцию $f_k(x)$, $x \in I$, как сужение функции $\varphi_k(x)$, $x \in J$, на интервал I . Для произвольной последовательности $c = \{c_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2$ имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^\infty c_k f_k \right\|_{L^2(I)}^2 &= \int_I \left| \sum_{k=1}^\infty c_k f_k(x) \right|^2 dx = \int_J \left| \sum_{k=1}^\infty c_k \varphi_k(x) \right|^2 \cdot \chi_I(x) dx \\ &\leq \int_J \left| \sum_{k=1}^\infty c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx = \left\| \sum_{k=1}^\infty c_k \varphi_k \right\|_{L^2(J)}^2 \leq B \|c\|_{\ell^2}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано (см. лемму 3), что последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty$ бesselева.

Теорема 7 позволяет одним методом перенести известные теоремы о сходимости почти всюду ортогональных рядов на ряды по бesselевым последовательностям. Приведем три примера (теоремы Меньшова–Радемахера, Пэли–Зигмунда и Гарсиа).

ТЕОРЕМА 8 (аналог теоремы Меньшова–Радемахера для бesselевых систем). Пусть I, J – открытые интервалы на $\mathbb{R}$ и $I \subset J$. Пусть $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^\infty$, $x \in I$ – произвольная бesselева последовательность на I с границей B . Если

$$L := \sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 \log_2^2(k+1) < \infty, \quad (1)$$

то ряд

$$\sum_{k=1}^\infty c_k f_k(x) \quad (2)$$

сходится почти всюду на I . Если

$$S_{\mathcal{F}}^*(c, x) := \sup_{1 \leq N < \infty} \left| \sum_{k=1}^N c_k f_k(x) \right|, \quad c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty},$$

– мажоранта частных сумм ряда (2), то при условии (1) имеет место оценка

$$\|S_{\mathcal{F}}^*(c, x)\|_{L^2(I)} \leq C(BL)^{1/2},$$

где C – абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 7 существует ортогональная система $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ на J , $\|\varphi_k\|_{L^2(J)} = \sqrt{B}$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что $f_k(x) = \varphi_k(x)$, $x \in I$, $k = 1, 2, \dots$, где B – бесселева граница $\mathcal{F}$. По теореме Меньшова–Радемахера [6; гл. 9, теорема 1] ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

сходится почти всюду на J , причем существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|S_{\Phi}^*(c, x)\|_{L^2(J)} \leq C(BL)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\|S_{\mathcal{F}}^*(c, x)\|_{L^2(I)} \leq \|S_{\Phi}^*(c, x)\|_{L^2(J)} \leq C(BL)^{1/2}.$$

Другой способ доказательства аналога теоремы Меньшова–Радемахера для бесселевых последовательностей основан на использовании факторизационной теоремы Морэ–Никишина по схеме Макарова [8; п. 2.3.3]. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x)$$

безусловно сходится в $L^2(I)$ для любого $c \in \ell^2$ (следствие 4). Отсюда следует [8; п. 2.3.3], что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\log_2(k+1)} f_k(x)$$

сходится почти всюду на I .

Важным частным случаем бесселевой последовательности является *фрейм* или *каркас*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Последовательность $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется *фреймом* для $\mathcal{H}$, если существуют постоянные $A > 0$, $B > 0$ такие, что

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Числа A и B называются *границами фрейма*. Если возможен выбор границ $A = B$, то фрейм называется *жестким*. Заметим, что жесткие фреймы являются частным случаем ортоподобных систем, которые исследовались в работах Лукашенко и его учеников (см., например, [9], [10]).

Каждый фрейм является бесселевой системой. Известны примеры полных² бесселевых систем, которые не являются фреймами [4; п. 5.4.6].

Фреймовым оператором $S = S_{\mathcal{F}}$ называется композиция операторов синтеза и анализа

$$S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad Sf = D \circ Cf = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k.$$

Ряд, определяющий S , сходится безусловно для любого $f \in \mathcal{H}$ (следствие 4). Оператор S является ограниченным, обратимым, самосопряженным и положительным. Последовательность $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ также образует фрейм для $\mathcal{H}$, который называют *каноническим дуальным фреймом* для $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}$ – фрейм с фреймовым оператором S , то

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (3)$$

Ряд (3) сходится безусловно в $\mathcal{H}$ для любого $f \in \mathcal{H}$ (следствие 4). Представление (3) называется *фреймовым представлением* элемента (сигнала) f . Перечисленные выше факты доказаны в [3] и [4; п. 5.1].

СЛЕДСТВИЕ 10. Если $\mathcal{F}$ – фрейм для пространства $L^2(I)$ и

$$f \stackrel{L^2(I)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k$$

– произвольное фреймовое представление, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle f, S^{-1}f_k \rangle}{\log_2(k+1)} f_k(x)$$

сходится почти всюду на I .

ЛЕММА 11. Если $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – бесселева последовательность с границей B в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то $\|f_k\|_{\mathcal{H}} \leq \sqrt{B}$, $k = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем натуральное число m такое, что $\|f_m\|_{\mathcal{H}} \neq 0$. По определению бесселевой последовательности имеем

$$|\langle f_m, f_m \rangle|^2 + \sum_{k \neq m} |\langle f_m, f_k \rangle|^2 \leq B \|f_m\|_{\mathcal{H}}^2,$$

или

$$\|f_m\|_{\mathcal{H}}^4 \leq \|f_m\|_{\mathcal{H}}^4 + \sum_{k \neq m} |\langle f_m, f_k \rangle|^2 \leq B \|f_m\|_{\mathcal{H}}^2,$$

отсюда следует, что $\|f_m\|_{\mathcal{H}} \leq \sqrt{B}$.

²Система $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *полной*, если $\overline{\text{span}}\{f_k\} = \mathcal{H}$. Очевидно, что фрейм является полной системой.

ТЕОРЕМА 12 (аналог теоремы Пэли–Зигмунда для бесселевых систем). Пусть J – открытый интервал на $\mathbb{R}$, $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – бесселева последовательность в $L^2(J)$. Если $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$, то при почти всех $t \in [0, 1]$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) c_k f_k(x), \quad x \in J,$$

где $\{r_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ – функции Радемахера, сходится почти всюду на J , т.е. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pm c_k f_k(x), \quad x \in J,$$

сходится почти всюду на J при почти всех выборах знаков у членов ряда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 11, имеем

$$\int_J \sum_{k=1}^n |c_k|^2 |f_k(x)|^2 dx \leq B \cdot \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq B \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Отсюда по теореме Б. Леви следует, что для почти всех $x \in J$ конечна сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 |f_k(x)|^2.$$

Следовательно [6; гл. 2, теорема 11], ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) c_k f_k(x)$$

сходится почти всюду на J при почти каждом $t \in [0, 1]$.

Альтернативный способ доказательства основан на теореме 7. Если $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – бесселева последовательность в $L^2(I)$, то $f_k(x) = \varphi_k(x)$, $x \in I$, $k = 1, 2, \dots$, для некоторой ортогональной системы

$$\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}, \quad \|\varphi_k\|_{L^2(J)} = \sqrt{B}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

из пространства $L^2(J)$, где $I \subset J$. Для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ можно применить классический результат об ортогональных рядах [6; с. 66] и “спроектировать” его на ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x)$.

ТЕОРЕМА 13 (аналог теоремы Гарсия для бесселевых систем). Пусть I, J – открытые интервалы на $\mathbb{R}$ и $I \subset J$. Пусть $\mathcal{F} = \{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $x \in I$, – произвольная бесселева последовательность на I с границей B . Для любого ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x), \quad c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2,$$

существует перестановка натурального ряда $\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{\sigma(k)} f_{\sigma(k)}(x)$$

сходится почти всюду на I и, кроме того, существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что

$$\int_I \sup_{1 \leq N < \infty} \left| \sum_{k=1}^N c_{\sigma(k)} f_{\sigma(k)}(x) \right|^2 dx \leq C \cdot \|c\|_{\ell^2}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 7 существует ортогональная система $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ на J , $\|\varphi_k\|_{L^2(J)} = \sqrt{B}$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что $f_k(x) = \varphi_k(x)$, $x \in I$, $k = 1, 2, \dots$, где B – бесселева граница $\mathcal{F}$. Для ряда $\sum_{k=1}^\infty c_k \varphi_k(x)$ справедлива теорема Гарсия [6; гл. 2, теорема 16]. В [10] показано, что теорема Гарсия сохраняет силу и для комплексных чисел $\{c_k\}_{k=1}^\infty$. Таким образом, существует перестановка натурального ряда $\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^\infty$ такая, что ряд

$$\sum_{k=1}^\infty c_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x)$$

сходится почти всюду на J и имеет место неравенство

$$\int_J \sup_{1 \leq N < \infty} \left| \sum_{k=1}^N c_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \right|^2 dx \leq C \cdot \|c\|_{\ell^2}^2$$

с абсолютной постоянной C .

Отсюда следует сходимость почти всюду на I ряда

$$\sum_{k=1}^\infty c_{\sigma(k)} f_{\sigma(k)}(x)$$

и неравенство

$$\int_I \sup_{1 \leq N < \infty} \left| \sum_{k=1}^N c_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \right|^2 dx \leq \int_J \sup_{1 \leq N < \infty} \left| \sum_{k=1}^N c_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \right|^2 dx \leq C \cdot \|c\|_{\ell^2}^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 14. Если $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty$ – фрейм для пространства $L^2(I)$ с фреймовым оператором S , $I \subset J$ – открытые интервалы на $\mathbb{R}$, то для любого $f \in L^2(I)$ существует перестановка натурального ряда $\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^\infty$ такая, что ряд

$$\sum_{k=1}^\infty \langle f, S^{-1} f_{\sigma(k)} \rangle f_{\sigma(k)}(x) = f(x)$$

почти всюду на I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый фрейм является бесселевой системой, фреймовы коэффициенты $\{f, S^{-1} f_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2$, сходимость фреймова представления является безусловной в $L^2(I)$. Эти три факта и аналог теоремы Гарсия для бесселевых последовательностей доказывают следствие.

Следующая теорема показывает, какие бесселевы последовательности допускают продолжение до *полной* ортогональной системы. Такими последовательностями являются жесткие фреймы с двумя дополнительными условиями на матрицу Грама. Теорема обобщает известную теорему Олевского [6; гл. 8, теорема 3], [7; с. 57].

ТЕОРЕМА 15. Пусть I и J – открытые интервалы на числовой прямой $\mathbb{R}$, причем $I \subset J$, и пусть $B > 0$. Функции $\mathcal{F} = \{f_k(x)\}_{k=1}^\infty \subset L^2(I)$ могут быть продолжены до элементов полной ортогональной системы

$$\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty \subset L^2(J), \quad \|\varphi_k(x)\| = \sqrt{B}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1) последовательность $\mathcal{F}$ образует жесткий фрейм пространства $L^2(I)$ с границей B ;
- 2) $BG_{\mathcal{F}} = G_{\mathcal{F}}^2$;
- 3) матрица $B\mathbf{I} - G_{\mathcal{F}}$ имеет бесконечный ранг.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ образует полную ортогональную систему в пространстве $L^2(J)$, $\|\varphi_k(x)\| = \sqrt{B}$, $k = 1, 2, \dots$, и пусть

$$f_k(x) = \varphi_k(x)\chi_I(x), \quad x \in J.$$

Проверим выполнение условий 1)–3). Функцию $f \in L^2(I)$ продолжаем нулем на $J \setminus I$ и такое продолжение вновь обозначаем f . В силу полноты системы Φ имеем

$$\sum_{k=1}^\infty |(f, f_k)|^2 = B \sum_{k=1}^\infty \left| \int_J f \chi_I \frac{\bar{\varphi}_k}{\sqrt{B}} dx \right|^2 = B \|f \chi_I\|_{L^2(J)}^2 = B \|f\|_{L^2(I)}^2,$$

таким образом, выполнено условие 1).

Определим систему функций

$$\tilde{\Phi} = \{\tilde{\varphi}_k(x)\}_{k=1}^\infty,$$

полагая

$$\tilde{\varphi}_k(x) = \varphi_k(x)\chi_{J \setminus I} = \varphi_k(x) - f_k(x).$$

Заметим, что

$$G_{\tilde{\Phi}} = B\mathbf{I} - G_{\mathcal{F}}.$$

С другой стороны, в силу равенства Парсеваля имеем

$$(G_{\tilde{\Phi}})_{j,k} = \int_J \tilde{\varphi}_k \bar{\tilde{\varphi}}_j dx = \sum_{n=1}^\infty \left\langle \tilde{\varphi}_k, \frac{\varphi_n}{\sqrt{B}} \right\rangle \left\langle \frac{\varphi_n}{\sqrt{B}}, \tilde{\varphi}_j \right\rangle = \frac{1}{B} \sum_{n=1}^\infty (G_{\tilde{\Phi}})_{j,n} (G_{\tilde{\Phi}})_{n,k}.$$

В матричной форме последнее соотношение имеет вид

$$G_{\tilde{\Phi}} = \frac{1}{B} G_{\tilde{\Phi}}^2,$$

или

$$BG_{\mathcal{F}} = G_{\mathcal{F}}^2.$$

Получаем условие 2).

Полнота системы $\tilde{\Phi}$ в пространстве $L^2(J \setminus I)$ влечет условие 3).

Рассмотрим систему функций $\mathcal{F}$, для которой выполнены условия 1)–3). Обозначим через $\tilde{g}_{j,k}$ (j, k)-й элемент матрицы $B\mathbf{I} - G_{\mathcal{F}}$. Пусть $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – произвольная полная ортонормированная система в пространстве $L^2(J \setminus I)$. Определим функции

$$p_j(x) = \sum_{k=1}^\infty \tilde{g}_{j,k} \psi_k(x), \quad j = 1, 2, \dots$$

Имеем, во-первых,

$$\langle p_j, p_m \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}_{j,k} \tilde{g}_{m,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}_{j,k} \tilde{g}_{k,m} = B \tilde{g}_{j,m},$$

по условию 2).

Во-вторых, в силу 3) существует изометрия U между $\overline{\text{span}}\{p_j\}$ и $L^2(J \setminus I)$, причем $\langle Up_j, Up_m \rangle = B \tilde{g}_{j,m}$.

Теперь мы определяем полную ортонормированную систему Φ , которая является продолжением системы $\mathcal{F}$:

$$\Phi = \{\varphi_k\}, \quad \varphi_k(x) = \begin{cases} f_k(x), & x \in I, \\ \frac{1}{\sqrt{B}} (Up_k)(x), & x \in J \setminus I. \end{cases}$$

Непосредственно из определения получаем равенство для матриц Грама

$$G_\Phi = G_{\mathcal{F}} + B\mathbf{I} - G_{\mathcal{F}} = B\mathbf{I},$$

которое показывает, что система Φ ортонормирована и $\|\varphi_k\| = \sqrt{B}$, $k = 1, 2, \dots$.

Для доказательства полноты проверяем, что система Φ является жестким фреймом с границей B для пространства $L^2(J)$. Определение жесткого фрейма достаточно проверять для элементов некоторой полной системы пространства $L^2(J)$. В качестве такой "тестовой системы" определяем систему

$$\Theta = \{\theta_m, \tilde{\theta}_m\} = \{\varphi_m \chi_I, \varphi_m \chi_{J \setminus I}\}.$$

Полнота системы Θ непосредственно следует из построения,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \theta_m, \varphi_k \rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_m, f_k \rangle \langle f_k, f_m \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} g_{m,k} g_{k,m} \\ &= (G_{\mathcal{F}})_{m,m}^2 = (B G_{\mathcal{F}})_{m,m} = B \|\theta_m\|^2, \\ \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \tilde{\theta}_m, \varphi_k \rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \frac{1}{\sqrt{B}} Up_m, \varphi_k \chi_{J \setminus I} \right\rangle \langle \varphi_k \chi_{J \setminus I}, Up_m \rangle \\ &= \frac{1}{B} \sum_{k=1}^{\infty} \langle p_m, p_k \rangle \langle p_k, p_m \rangle = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^{\infty} B \tilde{g}_{m,k} B \tilde{g}_{k,m} \\ &= B(B\mathbf{I} - G_{\mathcal{F}})_{m,m} = B \|\tilde{\theta}_m\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом показано, что система Φ является жестким фреймом, следовательно, полной системой в пространстве $L^2(I)$.

ПРИМЕРЫ. 1) Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — орты пространства ℓ^2 ,

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ e_1, \frac{1}{\sqrt{2}} e_2, \frac{1}{\sqrt{2}} e_2, \frac{1}{\sqrt{3}} e_3, \frac{1}{\sqrt{3}} e_3, \frac{1}{\sqrt{3}} e_3, \dots \right\},$$

т.е. в последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ вектор $e_k/\sqrt{k}$ повторяется k раз.

Для каждого $f \in \ell^2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k |\langle f, \frac{1}{\sqrt{k}} \rangle|^2 = \|f\|^2.$$

Получаем, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует жесткий фрейм для пространства ℓ^2 с границей $A = B = 1$. Непосредственно проверяется, что для матрицы Грама последовательности $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеем $G_{\mathcal{F}}^2 \neq G_{\mathcal{F}}$, и соответствующая $\mathcal{F}$ последовательность в пространстве $L^2(I)$ не может быть продолжена до полной ортонормированной системы в $L^2(J)$.

2) Если $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – полная ортонормированная система в $L^2(J)$, то система $\{\varphi_k \chi_I\}_{k=1}^{\infty}$ доставляет пример жесткого фрейма для пространства $L^2(I)$, который не является базисом. Функция $f \in L^2(I)$ может быть разными способами продолжена на интервал J . Каждому продолжению соответствует единственный набор коэффициентов представления по системе Φ . Любой из таких наборов в пространстве $L^2(I)$ представляет функцию f по системе $\{\varphi_k \chi_I\}_{k=1}^{\infty}$. Таким образом, система $\{\varphi_k \chi_I\}_{k=1}^{\infty}$ не является базисом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, НИЦ “Регуляр. и хаотич. динамика”, М.–Ижевск, 2001.
- [2] Б. С. Кашин, Т. Ю. Куликова, “Замечание об описании фреймов общего вида”, *Матем. заметки*, **72**:6 (2002), 941–945.
- [3] С. Малла, *Вэйвлеты в обработке сигналов*, Мир, М., 2005.
- [4] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, Boston, 2003.
- [5] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975.
- [6] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, АФЦ, М., 1999.
- [7] A. M. Olevskii, *Fourier Series with Respect to General Orthogonal Systems*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1975.
- [8] Б. М. Макаров, “ p -абсолютно суммирующие операторы и некоторые их приложения”, *Алгебра и анализ*, **3**:2 (1991), 1–76.
- [9] Т. П. Лукашенко, “О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным”, *Матем. сборник*, **188**:12 (1997), 57–72.
- [10] Т. П. Лукашенко, Т. В. Родионов, “О сходимости рядов по обобщенным ортоподобным системам”, *Фундам. и прикл. матем.*, **6**:3 (2000), 813–829.

С. Я. Новиков

Самарский государственный университет

E-mail: nvks@ssu.samara.ru

Поступило

20.03.2006

Исправленный вариант

26.09.2006