Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Годуля, В. В. Старков, О граничном поведении в угле Штольца аналитических в круге функций, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 5, 652–661

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm374>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:54:19

УДК 517.54

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ В УГЛЕ ШТОЛЬЦА АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Я. Годуля, В. В. Старков

Заметка посвящена исследованию поведения в угле Штольца аналитических в круге функций. На этом пути, в частности, доказаны утверждения типа теоремы Харди-Литтльвуда, получены оценки на рост функции в угле Штольца.

Библиография: 3 названия.

Пусть f – аналитическая в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функция. Эта статья посвящена решению некоторых задач о поведении $f(z)$ при $z \rightarrow e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) в угле Штольца с вершиной $e^{i\theta}$, т.е. в области

$$W_\eta = \{z \in \Delta : |\arg(1 - ze^{-i\theta})| < \eta, |1 - ze^{-i\theta}| < \rho\},$$

где $\eta \in (0, \pi/2]$, $0 < \rho < \cos \eta$. Важность такого рода задач обусловлена тем, что условие $W_\eta \ni z \rightarrow e^{i\theta}$ встречается во многих теоремах теории аналитических функций.

Интересно отметить, что техника доказательств полученных в этой статье результатов во многом взята нами из теории линейно-инвариантных семейств, введенных в [1] (см. [2]). Таким образом, методика, разработанная для специальных классов аналитических функций, какими являются линейно-инвариантные семейства, может успешно применяться и для исследования всего класса аналитических функций.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f аналитична в Δ , $c \in \mathbb{C}$ и $\eta \in (0, \pi/2]$ – фиксированные числа, W_η – угол Штольца с вершиной в $z = 1$.

- 1) Если существует конечный предел

$$\lim_{W_\eta \ni z \rightarrow 1} [f(z)(1-z)^c] = A,$$

то для любого $\varepsilon \in (0, \eta)$ существует предел

$$\lim_{W_{\eta-\varepsilon} \ni z \rightarrow 1} [f'(z)(1-z)^{c+1}] = Ac.$$

- 2) Если для любого угла Штольца W_η существует конечный предел

$$\lim_{W_\eta \ni z \rightarrow 1} [f(z)(1-z)^c] = A \neq 0,$$

то

$$\lim_{a \rightarrow 1-} \frac{f((z+a)/(1+az))}{f(a)} = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^c$$

равномерно внутри Δ .

- 3) Если функция $f(z)(1-z)^c$ не ограничена в W_η и $\operatorname{Re} c > 0$, то функция $f'(z)(1-z)^{c+1}$ не ограничена в W_η .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Здесь и далее, в тексте статьи при появлении многозначной аналитической функции считаем, что рассматривается главная ее ветвь: $1^c = 1$, $\log 1 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Простой пример: $f(z) \equiv 1$, $c < 0$ показывает, что утверждение, обратное к утверждению 1) теоремы 1, неверно. Условие $\operatorname{Re} c > 0$ в утверждении 3) теоремы 1 является существенным; об этом говорит, в частности, пример: $f(z) = \log(1 - z)$, $c = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. 1) Любой круг K , лежащий в угле Штольца W_η и касающийся его сторон, является образом круга $\{z : |z| < r(a)\}$ при отображении $w = (z + a)/(1 + az)$, $a \in (-1, 1)$. При этом центр C круга K и его радиус R связаны с $r(a)$ формулами

$$C = C(a) = \frac{a(1 - r^2(a))}{1 - a^2 r^2(a)}, \quad R = R(a) = \frac{(1 - a^2)r(a)}{1 - a^2 r^2(a)}.$$

Поскольку $(1 - C(a)) \sin \eta = R(a)$, то

$$(1 + ar^2(a)) \sin \eta = (1 + a)r(a). \quad (1)$$

Отсюда находим

$$r(a) = \frac{a + 1 - \sqrt{(a + 1)^2 - 4a \sin^2 \eta}}{2a \sin \eta} \xrightarrow{a \rightarrow 1-} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} = r_\eta.$$

При малых $\delta > 0$ круг $K_\eta(\delta) = \{z : |z| \leq r_\eta - \delta\} \subset \{z : |z| < r(a)\}$, если a достаточно близко к 1. Отсюда и из утверждения 1) теоремы вытекает, что

$$f\left(\frac{z + a}{1 + az}\right) \left(1 - \frac{z + a}{1 + az}\right)^c \xrightarrow{a \rightarrow 1-} A \quad (2)$$

равномерно в круге $K_\eta(\delta)$. После дифференцирования (2) по z получим

$$\left[f'\left(\frac{z + a}{1 + az}\right) \left(1 - \frac{z + a}{1 + az}\right)^c - f\left(\frac{z + a}{1 + az}\right) c \left(1 - \frac{z + a}{1 + az}\right)^{c-1} \right] \frac{1 - a^2}{(1 + az)^2} \xrightarrow{a \rightarrow 1-} 0,$$

что равносильно

$$\left[f'\left(\frac{z + a}{1 + az}\right) \left(1 - \frac{z + a}{1 + az}\right)^{c+1} - f\left(\frac{z + a}{1 + az}\right) c \left(1 - \frac{z + a}{1 + az}\right)^c \right] \frac{1 + a}{(1 + az)(1 - z)} \xrightarrow{a \rightarrow 1-} 0$$

равномерно в $K_\eta(\delta)$. Следовательно,

$$f'(w)(1 - w)^{c+1} - f(w)c(1 - w)^c \longrightarrow 0; \quad (3)$$

здесь $w \rightarrow 1$ в множестве Ω , которое заполняют образы круга $K_\eta(\delta)$ при отображениях $w(z) = (z + a)/(1 + az)$, $a \in (0, 1)$. Вычисления, аналогичные проведенным выше,

показывают: если стороны угла W_γ касаются образа круга $K_\eta(\delta)$ при его отображении функцией $w(z) = (z+a)/(1+az)$, то

$$\sin \gamma = \frac{(r_\eta - \delta)(1+a)}{1+a(r_\eta - \delta)^2} \xrightarrow{a \rightarrow 1-} \frac{2(r_\eta - \delta)}{1+(r_\eta - \delta)^2}. \quad (4)$$

Сравнивая (4) и (1) и учитывая, что δ сколь угодно мало, приходим к выводу, что для любого $\varepsilon \in (0, \eta)$ угол Штольца $W_{\eta-\varepsilon} \subset \Omega$, если δ достаточно близко к 0. Следовательно, (3) справедливо в любом угле Штольца $W_{\eta-\varepsilon}$, т.е.

$$\lim_{W_{\eta-\varepsilon} \ni w \rightarrow 0} [f'(w)(1-w)^{c+1}] = Ac.$$

2) Пусть для любого угла Штольца W_η с вершиной в $z = 1$

$$\lim_{W_\eta \ni z \rightarrow 1} [f(z)(1-z)^c] = A \neq 0.$$

Тогда в любом угле Штольца W_η

$$\lim_{W_\eta \ni z \rightarrow 1} \frac{f(z)}{g(z)} = A2^{2-c}, \quad (5)$$

где $g(z) = (1+z)^{c-2}/(1-z)^c$. В частности, при $a \in (0, 1)$

$$\lim_{a \rightarrow 1-} \frac{f(a)}{g(a)} = A2^{2-c}.$$

Аналогично тому, как это сделано в при доказательстве утверждения 1), предельное соотношение (5) может быть записано в виде

$$\lim_{a \rightarrow 1-} \frac{f((z+a)/(1+az))g(a)}{g((z+a)/(1+az))f(a)} = 1, \quad (6)$$

причем сходимость здесь равномерная внутри Δ , так как в круге $K_\eta(\delta)$ можно выбрать η сколь угодно близким к $\pi/2$, а δ — к нулю. Легко показать, что

$$\frac{g((z+a)/(1+az))}{g(a)(1+az)^2} \equiv g(z)$$

при $a \in (-1, 1)$. Отсюда и из (6) следует утверждение 2) теоремы.

3) Пусть $\operatorname{Re} c > 0$ и $f(z)(1-z)^c$ не ограничено в W_η . Предположим, что

$$\sup_{z \in W_\eta} |f'(z)(1-z)^{c+1}| < \infty,$$

т.е. существует постоянная $M > 0$ такая, что $|f'(z)| \leq M/|1-z|^{\operatorname{Re} c+1}$ для $z \in W_\eta$. Тогда для z и z_0 , лежащих на одном луче в W_η , исходящем из 1, и таких, что z_0 фиксировано, а $z \rightarrow 1$ вдоль этого луча, в результате интегрирования по отрезку $[z_0, z]$ получим

$$\begin{aligned} |f(z_0) - f(z)| &\leq \int_z^{z_0} |f'(s)| |ds| \leq M \int_z^{z_0} \frac{|d(1-s)|}{|1-s|^{\operatorname{Re} c+1}} \\ &= M \int_{|1-z|}^{|1-z_0|} \frac{dt}{t^{\operatorname{Re} c+1}} = \frac{M}{\operatorname{Re} c} \left[\frac{1}{|1-z|^{\operatorname{Re} c}} - \frac{1}{|1-z_0|^{\operatorname{Re} c}} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|f(z)| |1-z|^{\operatorname{Re} c} \leq \frac{M}{\operatorname{Re} c} \left[1 - \left| \frac{1-z}{1-z_0} \right|^{\operatorname{Re} c} \right] + |f(z_0)| |1-z|^{\operatorname{Re} c} \xrightarrow{z \rightarrow 1} \frac{M}{\operatorname{Re} c}.$$

Отсюда вытекает ограниченность $|f(z)(1-z)^c|$ в W_η . Противоречие доказывает утверждение 3) теоремы 1.

Теорема 1 доказана.

Применяя n раз утверждение 1) теоремы 1, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. 1) В предположениях утверждения 1) теоремы 1 в любом угле Штольца, меньшем W_η , существует предел

$$\lim_{z \rightarrow 1} [f^{(n)}(z)(1-z)^{c+n}] = A c(c+1) \cdots (c+n-1)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

2) Если $f(z)(1-z)^c$ не ограничено в угле Штольца W_η и $\operatorname{Re} c > 0$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $f^{(n)}(z)(1-z)^{c+n}$ не ограничена в W_η .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если f регулярна в Δ , $c \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}$, W_η – угол Штольца с вершиной в $e^{i\theta}$ и существует конечный предел

$$\lim_{W_\eta \ni z \rightarrow e^{i\theta}} [f(z)(1 - ze^{-i\theta})^c] = A,$$

то в любом меньшем угле Штольца с вершиной в $z = e^{i\eta}$ существует предел

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} [f'(z)(1 - ze^{-i\theta})^{c+1}] = A c e^{-i\theta}.$$

Вещественным аналогом теоремы 1 можно считать теорему Харди и Литтльвуда [3, с. 215–216], а именно

если функция $f(x)$ дифференцируема на $(0, 1)$, $f'(x)$ возрастает на $(0, 1)$, $c > 0$ и

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)(1-x)^c = A > 0,$$

то существует предел

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f'(x)(1-x)^{c+1} = A c.$$

Из доказательства утверждения 1) теоремы 1 вытекает справедливость следующего утверждения

МОДИФИКАЦИЯ ТЕОРЕМЫ ХАРДИ–ЛИТТЛЬВУДА. Если функция $f(x)$ определена на интервале $(r_0, 1)$, $r_0 \in (0, 1)$, и является сужением на этот интервал функции $f(z)$, аналитической в некотором угле Штольца W_η с вершиной в $z = 1$, и при фиксированном $c \in \mathbb{C}$ существует предел

$$\lim_{W_\eta \ni z \rightarrow 1} [f(z)(1-z)^c] = A \in \mathbb{C}, \quad (7)$$

то существует предел

$$\lim_{x \rightarrow 1-} [f'(x)(1-x)^{c+1}] = Ac.$$

Если при этом функция f является нормальной в Δ , то вместо существования углового предела в (7) достаточно потребовать существования радиального предела

$$\lim_{x \rightarrow 1-} [f(x)(1-x)^c] = A \in \mathbb{C}.$$

Аналогично тому, как доказано утверждение 1) теоремы 1, можно доказать, например, следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть f аналитична в Δ , $c, \mu \in \mathbb{C}$. Если (обозначения из теоремы 1) существует конечный предел

$$\lim_{W_\eta \ni z \rightarrow 1} \left[f(z)(1-z)^c \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^\mu \right] = A \quad \left(\text{или} \quad \lim_{W_\eta \ni z \rightarrow 1} \left[f(z) \exp \frac{c}{1-z} \right] = A \right),$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{W_{\eta-\varepsilon} \ni z \rightarrow 1} \left[f'(z)(1-z)^{c+1} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^\mu \right] &= cA \\ \left(\text{или} \quad \lim_{W_{\eta-\varepsilon} \ni z \rightarrow 1} \left[f'(z)(1-z)^2 \exp \frac{c}{1-z} \right] \right) &= -cA. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть f аналитична в Δ . Точку $e^{i\theta} \in \partial\Delta$ назовем *точкой роста функции* f , если существует угол Штольца W_η с вершиной в $e^{i\theta}$ и $\beta > 0$ такие, что

$$\limsup_{W_\eta \ni z \rightarrow e^{i\theta}} [|f(z)|(1-|z|)^\beta] > 0. \quad (8)$$

Супремум таких β обозначим $\delta_\eta = \delta_\eta(f) \in (0, \infty]$ и назовем *порядком роста функции f в угле W_η* , а число $\delta = \delta(f) = \sup_{\eta \in (0, \pi/2)} \delta_\eta$ – *порядком роста функции f в точке $e^{i\theta}$* .

Порядок роста δ_η данной функции f зависит, вообще говоря, от η (см. теорему 3) и является неубывающей по η функцией. Из определения 1 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $M_\varepsilon > 0$ такая, что $|f(z)| \leq M_\varepsilon / (1-|z|)^{\delta_\eta + \varepsilon}$ для $z \in W_\eta$. Связь между порядками роста в угле функций f и f' описывает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Если $e^{i\theta}$ – точка роста функции f , то $e^{i\theta}$ является точкой роста f' , при этом $\delta_\eta(f') \geq \delta(f) + 1$; однако для любого $\varepsilon \in (0, \eta)$ $\delta_{\eta-\varepsilon}(f') \leq \delta_\eta(f) + 1$. Если $\delta_\eta(f) < \infty$, то для любого $\alpha \in (\delta_\eta(f) + 1, \delta_\eta(f) + 1 + \pi/2\eta]$ существует функция f с точкой роста в $e^{i\theta}$ такая, что $\delta_\eta(f') = \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $0 < \beta < \delta_\eta$, то

$$\limsup_{W_\eta \ni z \rightarrow e^{i\theta}} [|f(z)|(1 - |z|)^\beta] = \infty.$$

Покажем, что и

$$\limsup_{W_\eta \ni z \rightarrow e^{i\theta}} [|f'(z)|(1 - |z|)^{\beta+1}] = \infty.$$

Пусть это не так. Тогда существует постоянная $M > 0$ такая, что $|f'(z)| \leq M/(1 - |z|)^{\beta+1}$ для всех $z \in W_\eta$, достаточно близких к $e^{i\theta}$. Возьмем такие $z, z_0 \in W_\eta$, достаточно близкие к $e^{i\theta}$, зафиксируем z_0 , z устремим к $e^{i\theta}$ в W_η . Интегрируя по отрезку $[z_0, z]$, оценим разность

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \left| \int_{z_0}^z f'(s) ds \right| \leq M \int_{z_0}^z \frac{|ds|}{(1 - |s|)^{\beta+1}} \\ &\leq \frac{M}{2 \cos \eta} \int_{z_0}^z \frac{d|s|}{(1 - |s|)^{\beta+1}} = \frac{M}{2\beta \cos \eta} \left[\frac{1}{(1 - |z|)^\beta} - \frac{1}{(1 - |z_0|)^\beta} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|f(z)|(1 - |z|)^\beta \leq |f(z_0)|(1 - |z|)^\beta + \frac{M}{2\beta \cos \eta} \left[1 - \left(\frac{1 - |z|}{1 - |z_0|} \right)^\beta \right] \leq \frac{M}{\beta \cos \eta},$$

если z достаточно близко к $e^{i\theta}$. Следовательно, $|f(z)|(1 - |z|)^\beta$ ограничено при $z \in W_\eta$, $z \rightarrow e^{i\theta}$. Противоречие показывает, что $e^{i\theta}$ – точка роста f' , причем порядок роста f' в угле W_η не меньше $\delta_\eta + 1$.

Если $\delta_\eta < \infty$ и $\beta > \delta_\eta$, то

$$\limsup_{W_\eta \ni z \rightarrow e^{i\theta}} [|f(z)|(1 - |z|)^\beta] = 0 \implies \lim_{W_\eta \ni z \rightarrow e^{i\theta}} [|f(z)(1 - z)^\beta|] = 0.$$

Применяя утверждение 1) теоремы 1 при $A = 0$, получим

$$\lim_{W_{\eta-\varepsilon} \ni z \rightarrow e^{i\theta}} [|f'(z)(1 - z)^{\beta+1}|] = 0, \quad \varepsilon \in (0, 1).$$

Следовательно,

$$\lim_{W_{\eta-\varepsilon} \ni z \rightarrow e^{i\theta}} [|f'(z)|(1 - |z|)^{\beta+1}] = 0,$$

т.е. порядок роста f' в угле $W_{\eta-\varepsilon}$ не превосходит $\delta_\eta + 1$.

Теперь фиксируем $\alpha \in (0, \pi/2\eta]$. Функция $\zeta = 1/(1 - ze^{-i\theta})^\alpha$ переводит W_η однолистно в область $\{\zeta : |\arg \zeta| < \eta\alpha\} \setminus \Omega$, где Ω – ограниченное множество. Поэтому функция $t(z) = ie^{i\eta\alpha}/(1 - ze^{-i\theta})^\alpha$ однолистно отображает W_η в область, лежащую в

левой полуплоскости и содержащую луч $\{i\tau - 1 : \tau \geq \tau_0\} = l$. Обозначим $\Gamma = t^{-1}(l)$. Если $l \ni t \rightarrow \infty$, то соответствующая точка $z \in \Gamma$ стремится к $e^{i\theta}$. Поскольку $\Gamma \subset W_\eta$, то для функции

$$f(z) = \frac{\exp[ie^{i\eta\alpha}(1 - ze^{-i\theta})^{-\alpha}]}{(1 - ze^{-i\theta})^\delta}, \quad \delta > 0,$$

имеем

$$\limsup_{\Gamma \ni z \rightarrow 1} [|f(z)|(1 - |z|)^\delta] = e^{-1} \limsup_{\Gamma \ni z \rightarrow 1} \left(\frac{1 - |z|}{|1 - ze^{-i\theta}|} \right)^\delta > 0.$$

С другой стороны,

$$\limsup_{W_\eta \ni z \rightarrow 1} [|f(z)|(1 - |z|)^\delta] \leq \limsup_{W_\eta \ni z \rightarrow 1} \left(\frac{1 - |z|}{|1 - ze^{-i\theta}|} \right)^\delta \leq 1.$$

Следовательно, порядок роста f в угле W_η равен δ . Однако порядок роста f' в угле W_η равен $\delta + 1 + \alpha$, так как

$$f'(z) = f(z) \left[\frac{\delta}{e^{i\theta} - z} + \frac{\alpha ie^{i(\eta\alpha - \theta)}}{(1 - ze^{-i\theta})^{\alpha+1}} \right].$$

Теорема 3 доказана.

Таким образом, если величина угла W_η стремится к нулю, то $\delta_\eta(f') - \delta_\eta(f)$ может стремиться к ∞ .

При конформных автоморфизмах $w(z) = (z + a)/(1 + \bar{a}z)$, $a \in \Delta$, единичного круга точки роста функции $f(z, a) = f((z + a)/(1 + \bar{a}z))$ переходят в точки роста функции f .

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция f аналитична в Δ , $a \in \Delta$. Чтобы функция $f(z, a)$ имела в точке $e^{i\phi}$ порядок роста δ , необходимо и достаточно, чтобы порядок роста f в точке $e^{i\gamma} = (e^{i\phi} + a)/(1 + \bar{a}e^{i\phi})$ был равен δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция $f(z, a)$ имеет в точке $e^{i\phi}$ порядок роста δ , то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta \in (0, \pi/2)$ такое, что $0 \leq \delta - \delta_\eta(f(z, a)) < \varepsilon$, где

$$\delta_\eta(f(z, a)) = \sup \left\{ \beta > 0 : \limsup_{W_\eta \ni z \rightarrow e^{i\phi}} [|f(z, a)|(1 - |z|)^\beta] > 0 \right\}. \quad (9)$$

Если $W_\eta \ni z \rightarrow e^{i\phi}$, то

$$w = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z} \rightarrow \frac{e^{i\phi} + a}{1 + \bar{a}e^{i\phi}} = e^{i\gamma};$$

причем можно считать, что $w \in W_{\eta+\lambda}$, где $\lambda > 0$ и сколь угодно близко к 0. Поскольку для z , близких к $e^{i\phi}$, $z \in W_\eta$,

$$\frac{1 - |z|}{1 - |w(z)|} \geq \frac{|e^{i\phi} - z|}{|e^{i\gamma} - w(z)|} \frac{\cos \eta}{2} = \frac{\cos \eta}{2} \frac{|(1 + \bar{a}e^{i\phi})(1 + \bar{a}z)|}{1 - |a|^2} \rightarrow \frac{\cos \eta}{2} \frac{|1 + \bar{a}e^{i\phi}|^2}{1 - |a|^2} > 0,$$

то для каждого $\beta > 0$, удовлетворяющего неравенству (8),

$$\limsup_{W_{\eta+\lambda} \ni w \rightarrow e^{i\gamma}} [|f(w)|(1-|w|)^{\beta}] > 0.$$

Поэтому $e^{i\gamma}$ — точка роста функции $f(z)$ и $\delta_{\eta+\lambda}(f(z)) \geq \delta_{\eta}(f(z, a)) > \delta - \varepsilon$. Следовательно, порядок роста функции $f(z)$ в точке $e^{i\gamma}$ не меньше $\delta - \varepsilon$, значит он не меньше δ (это следует из произвольности $\varepsilon > 0$).

Если теперь в предыдущих рассуждениях взять функцию $f(z, a)$ вместо $f(z)$ и вместо $w(z)$ автоморфизм $(z - a)/(1 - \bar{a}z)$, то получим утверждение теоремы.

Теорема 4 доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $e^{i\theta}$ — точка роста функции f . Если для некоторого угла Штольца W_{η} с вершиной в $e^{i\theta}$ и для некоторого фиксированного $c \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 0 < \delta' &= \liminf_{z=re^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{f(z) - c} (e^{i\theta} - z) \right\} \\ &\leq \limsup_{W_{\eta} \ni z \rightarrow e^{i\theta}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{f(z) - c} (e^{i\theta} - z) \right\} = \delta'' < +\infty, \end{aligned}$$

где $r \in (0, 1)$, то порядок роста функции f в угле W_{η} удовлетворяет неравенству $\delta' \leq \delta_{\eta}(f) \leq \delta''$; причем нижняя оценка справедлива для любого $\eta \in (0, \pi/2)$. Если же определенное выше $\delta'' \leq 0$ для любого угла Штольца W_{η} с вершиной в $e^{i\theta}$, то $e^{i\theta}$ не является точкой роста f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения δ' вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $r_{\varepsilon} \in (0, 1)$ такое, что для любого $r \in [r_{\varepsilon}, 1)$

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta}) - c} e^{i\theta} \right\} > \frac{\delta' - \varepsilon}{1 - r}.$$

Следовательно, функция $\operatorname{Re}\{\log[f(re^{i\theta}) - c]\} + (\delta' - \varepsilon) \log(1 - r)$ возрастает на интервале $(r_{\varepsilon}, 1)$. Поэтому существует предел

$$\lim_{r \rightarrow 1} [|f(re^{i\theta}) - c|(1 - r)^{\delta' - \varepsilon}] > 0.$$

Следовательно, существует

$$\lim_{r \rightarrow 1} [|f(re^{i\theta})|(1 - r)^{\delta' - \varepsilon}] > 0.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда получаем неравенство $\delta' \leq \delta_{\eta}(f)$ в любом угле Штольца W_{η} с вершиной в $e^{i\theta}$.

Из определения δ'' следует, что

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{f(z) - c} (e^{i\theta} - z) \right\} < \delta'' + \varepsilon \quad (10)$$

при $z \in W_\eta, |z| > r_\varepsilon \in (0, 1)$. Обозначим L пересечение угла W_η с лучом $\{z : \arg(e^{i\theta} - z) = \varphi\}$ (φ фиксировано), лежащим в W_η . На этом луче фиксируем $z_0, |z_0| = r_\varepsilon$, и пусть $z \in [z_0, e^{i\theta})$. Обозначим

$$\lambda = \left| \frac{e^{i\theta} - z}{e^{i\theta} - z_0} \right| = \frac{e^{i\theta} - z}{e^{i\theta} - z_0} \in (0, 1].$$

Тогда $z = e^{i\theta} - \lambda(e^{i\theta} - z_0)$ и (10) примет вид

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(e^{i\theta} - \lambda(e^{i\theta} - z_0))}{f(e^{i\theta} - \lambda(e^{i\theta} - z_0)) - c} (e^{i\theta} - z_0) \right\} \leq \frac{\delta'' + \varepsilon}{\lambda}.$$

Интегрируя это неравенство по отрезку $[\lambda, 1]$, получим

$$\begin{aligned} \log |f(z) - c| - \log |f(z_0) - c| &\leq (\delta'' + \varepsilon) \log \left| \frac{e^{i\theta} - z_0}{e^{i\theta} - z} \right| \\ \iff |f(z) - c| |e^{i\theta} - z|^{\delta'' + \varepsilon} &\leq |f(z_0) - c| |e^{i\theta} - z|^{\delta'' + \varepsilon} \\ &\leq \max_{z \in W_\eta, |z| = r_\varepsilon} [|f(z) - c| |e^{i\theta} - z|^{\delta'' + \varepsilon}]. \end{aligned}$$

Следовательно, величина $|f(z) - c| (1 - |z|)^{\delta'' + \varepsilon}$ ограничена в W_η . Поэтому $|f(z)| \times (1 - |z|)^{\delta'' + \varepsilon}$ ограничена в W_η , так как $\delta'' > 0$. В силу произвольности ε отсюда получаем неравенство $\delta_\eta(f) \leq \delta''$.

Если в любом угле Штольца $\delta'' \leq 0$, то в приведенных выше рассуждениях для фиксированного угла W_η достаточно положить $\delta'' = 0$. Тогда получим неравенство

$$|f(z)|(1 - |z|)^\varepsilon \leq M_\varepsilon(\eta) = \text{const}, \quad z \in W_\eta.$$

Поскольку неравенство справедливо для любого $\varepsilon > 0$, то $e^{i\theta}$ не является точкой роста f .

Теорема 5 доказана.

Универсальное линейно-инвариантное семейство $\mathcal{U}_\alpha$ ($\alpha \geq 1$), введенное Померенке [1], представляет собой множество всех локально однолистных в Δ функций $f(z) = z + \dots$, для которых

$$\operatorname{ord} f = \sup_{z \in \Delta} \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \frac{1 - |z|^2}{2} - \bar{z} \right| = \sup_{z \in \Delta} |t(z, f)| \leq \alpha;$$

здесь

$$t(z, f) = \frac{zf''(z)}{f'(z)} \frac{1 - |z|^2}{2|z|} - |z|.$$

Для таких функций теорему 5 можно сформулировать в терминах $t(z, f)$.

ТЕОРЕМА 5'. Пусть f аналитична и локально однолистка в Δ , $e^{i\theta}$ – точка роста f' . Если в некотором угле Штольца W_η выполняется неравенство

$$-1 < \delta_1 = \liminf_{z=re^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta}} \operatorname{Re} t(z, f) \leq \limsup_{W_\eta \ni z \rightarrow e^{i\theta}} \operatorname{Re} t(z, f) = \delta_2 < +\infty,$$

где $r \in (0, 1)$, то $\delta_1 + 1 \leq \delta_\eta(f') \leq \delta_2 + 1$, причем левое неравенство справедливо для любого $\eta \in (0, \pi/2)$. Если $\delta_2 \leq -1$ в любом угле Штольца W_η с вершиной в $e^{i\theta}$, то $e^{i\theta}$ не является точкой роста функции f' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО неравенства $\delta_1 + 1 \leq \delta_\eta(f')$ не отличается от соответствующей части доказательства теоремы 5.

Из определения δ_2 получаем, что для $z = re^{i\varphi} \in W_\eta$

$$\limsup_{z \rightarrow e^{i\theta}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} e^{i\varphi} (1-r) \right\} = \delta_2 + 1.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $r_\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что при $z = re^{i\varphi} \in W_\eta$, $r \geq r_\varepsilon$, выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})} e^{i\varphi} \right\} \leq \frac{\delta_2 + 1 + \varepsilon}{1-r}.$$

Интегрируя это неравенство по отрезку $[r_\varepsilon, r]$, получим

$$|f'(re^{i\varphi})|(1-r)^{\delta_2+1+\varepsilon} \leq |f'(r_\varepsilon e^{i\varphi})|(1-r_\varepsilon)^{\delta_2+1+\varepsilon} \leq \max_{|z|=r_\varepsilon} [|f'(z)|(1-|z|)^{\delta_2+1+\varepsilon}],$$

т.е. $|f'(z)|(1-|z|)^{\delta_2+1+\varepsilon}$ ограничено при $z \in W_\eta$, $|z| \geq r_\varepsilon$. Из произвольности $\varepsilon > 0$, как и в теореме 5 получаем неравенство $\delta_\eta(f') \leq \delta_2 + 1$.

Если $\delta_2 \leq -1$, как и в теореме 5 приходим к выводу, что $e^{i\theta}$ не является точкой роста f .

Теорема 5' доказана.

Таким образом, выражение $t(z, f)$, определяющее порядок $\operatorname{ord} f$ локально однолистной функции f , играет важную роль при исследовании точек роста этой функции.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Pommerenke Ch. Linear-invariante Familien analytischer Funktionen. I // Math. Ann. 1964. V. 155. P. 108–154.
- [2] Старков В. В. Теоремы регулярности для универсальных линейно-инвариантных семейств функций // Болгарский матем. ж. “СЕРДИКА”. 1985. Т. 11. С. 299–318.
- [3] Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.

(Я. Годуля) Институт математики Университета

М. Кюри-Скловской, г. Люблин, Польша

(В. В. Старков) Петрозаводский государственный университет

E-mail: godula@golem.umcs.lublin.pl,

starkov@mainpu.karelia.ru

Поступило

24.06.1999

Исправленный вариант

18.05.2001