Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Покорный, И. Ю. Покорная, В. Л. Прядиев,
Н. Н. Рябцева, Об интегрировании в вариационных
неравенствах на пространственных сетях, *Матем. за-
метки*, 2007, том 81, выпуск 6, 904–911

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3740>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 12:32:47

Об интегрировании в вариационных неравенствах на пространственных сетях

Ю. В. Покорный, И. Ю. Покорная, В. Л. Прядиев, Н. Н. Рябцева

Устанавливается аналог классической теоремы Якоби о положительной определенности второй вариации для функционала, заданного на функциях ветвящегося аргумента из пространственной сети (геометрического графа). Особенности соответствующего аналога уравнения Якоби (как и уравнения Эйлера) порождены процедурой интегрирования по частям, приводящей к дифференцированию по склеенным (состыкованным) мерам.

Библиография: 8 названий.

При анализе задач вариационного происхождения для объектов сетеподобной структуры (по типу геометрического графа) неизбежно столкновение с трудностями, порождаемыми неоднозначным толкованием используемых на сети интегралов, объединяющих исходную систему в цельный объект. Дело в том, что в рамках основополагающей для вариационного подхода процедуры интегрирования по частям используемые интегралы, являющиеся по существу интегралами Стилтеса, меняют смысл, так как меняется характер мер, их порождающих. Уже для функций скалярного аргумента на отрезке $[a, b]$ корректность равенства

$$\int_a^b u \, dv + \int_a^b v \, du = [uv]_a^b \quad (= u(b)v(b) - u(a)v(a)) \quad (1)$$

зависит от гладкости u , v и от толкования интеграла. Если хотя бы одна из функций $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ непрерывна, а другая принадлежит $BV[a, b]$, т.е. имеет ограниченную вариацию, то равенство (1) верно при трактовке интегралов по Риману–Стилтьесу. Расширение понятия суммирования с риманова до лебегова позволяет допускать разрывы одновременно у обеих функций. Деликатность ситуации состоит в том, что оба интеграла слева в (1) могут оказаться различными по существу: если в первом из них $\int_a^b u \, dv$ функция $v(x)$ определяет меру, по которой происходит интегрирование, и в каждой точке $s \in (a, b)$ важны лишь значения левого и правого пределов $v(s-0)$ и $v(s+0)$, задающие меру любого сегмента $\mu[\alpha, \beta] = v(\beta+0) - v(\alpha-0)$, а собственное значение $v(s)$ в этой точке не играет никакой роли, то у интегрируемой функции $u(x)$ именно собственное значение в каждой точке играет определяющую

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1643.2003.1), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 04-01-00049 и № 02-01-00307), Минобразования РФ (КЦ СПбГУ) (грант N E02-1.0-46) и программы “Университеты России” (грант № УР.04.01.004).

роль. Во втором интеграле $\int_a^b v du$ функции $v(x)$ и $u(x)$ меняются ролями: $v(x)$ важна уже поточечными значениями, а $u(x)$ уже задает меру, как функцию множества. При этом осмысленность каждого слагаемого слева в равенстве (1) еще не означает справедливости этого равенства в целом. Как в важнейшем для нас случае, когда исследуемая физическая система состоит из двух смыкающихся одномерных континуумов и есть потребность ассоциировать их с двумя смыкающимися отрезками $[a, \xi]$ и $[\xi, b]$ (при $a < \xi < b$), что связано со стыковкой в рамках каждого интеграла из (1) двух пар “соседствующих” мер, когда каждая из этих односторонних относительно точки ξ мер как бы наслаивается в точке ξ на соседку. Можно ли результат каждой такой стыковки объединять *единым интегралом на $[a, b]$* так, чтобы для такого интеграла была верна в целом формула типа (1)?! Именно этот вопрос в миниатюре отражает проблемы интегрирования в вариационных задачах на геометрических графах, где во внутренних узлах может стыковаться более, чем по два отрезка-ребра.

При разговоре об интегрировании мы пользуемся общепринятой терминологией из [1]–[3]. Наиболее корректную версию классических вариационных фактов см. в [4]. Уравнения на геометрических графах мы обсуждаем в терминах [5], в основном напоминая их.

Общая природа трудностей, порождаемых обобщенным дифференцированием по “склеенным мерам”, обсуждается в [6], [7]. Ниже, помня об этих трудностях, мы преодолеваем их стандартными средствами.

1. Отправным объектом разговора далее является функционал

$$\Phi(u) = \int_{\Gamma} F(x, u, u') dx \quad \left(= \sum_{\gamma_i \subseteq \Gamma} \int_{\gamma_i} F(x, u, u') dx \right). \quad (2)$$

Здесь Γ обозначает геометрический связный граф из $\mathbb{R}^n$, составленный из конечного набора $\{\gamma_i\}_1^m$ ребер (интервалов) и совокупности $\mathcal{J}(\Gamma)$ внутренних вершин (узлов) – концов этих интервалов, где они смыкаются. Остальные концы этих интервалов, не вошедшие в $\mathcal{J}(\Gamma)$, мы называем *граничными вершинами*, обозначая их совокупность через $\partial\Gamma$ и предполагая, что $\partial\Gamma \neq \emptyset$. Мы предполагаем, что граф Γ ориентирован (это необходимо для придания смысла дифференцированию вдоль ребер). Подчеркнем, что каждое ребро Γ является интервалом открытым, т.е. не содержит концов.

Функция $F(x, u, u')$ трех аргументов определена на $\Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Это значит, что второй и третий аргументы F скалярны, т.е. изменяются в $\mathbb{R}$, а первый – ветвящийся, т.е. изменяется в Γ . Последнее означает, что фактически мы имеем набор $\{F^{(\gamma_i)}(x, u, u')\}$ функций трех скалярных аргументов, где через $F^{(\gamma_i)}$ мы обозначили сужение F на γ_i . Каждую из функций $F^{(\gamma_i)}(x, u, u')$ мы предполагаем равномерно непрерывной по совокупности переменных. Описанное предположение означает, что для любой равномерно непрерывной на каждом γ_i функции $u(x): \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ с аналогичной производной $u'(x)$ формальная запись (2) допускает корректную расшифровку как сумма интегралов от сужений $F(x, u(x), u'(x))$ на ребра γ_i .

Мы рассматриваем функционал (2) на функциях, каждая из которых непрерывна на Γ и непрерывно дифференцируема на замыкании $[\gamma_i]$ каждого ребра $\gamma_i \subseteq \Gamma$. Для каждого ребра γ_i рассматриваемое множество функций вполне аналогично стандартному $C^1[\gamma_i]$, так что функционал (2) может считаться определенным на прямой

сумме этих пространств. Используя здесь в качестве нормы сумму (по i) обычных норм в $C^1[\gamma_i]$, мы рассматриваем этот функционал на сужении этого пространства, состоящем из непрерывных в целом на Γ функций. Обозначим это пространство через E . Оно оказывается банаховым, т.е. полным, ибо оно является сужением банахова пространства на пересечение гиперплоскостей непрерывных функционалов, порождаемых условиями непрерывных стыковок в $\mathcal{J}(\Gamma)$.

Каждую функцию $F^{(\gamma_i)}(x, u, u')$ трех аргументов ($F^{(\gamma_i)}: \gamma_i \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) мы предполагаем дважды равномерно непрерывно дифференцируемой по всем аргументам. Из проводимых далее рассуждений будет видно, что это предположение имеет определенный избыток жесткости и может быть соответственно обстоятельствам ослаблено.

Аналогом классического условия закрепления концов у нас будет условие задания фиксированного набора значений

$$\{u(a)\}_{a \in \partial\Gamma}. \quad (3)$$

Множество функций из E с фиксированным набором (3) мы обозначаем далее через $\mathfrak{M}$. Очевидно, $\mathfrak{M}$ есть линейное многообразие в E .

Рассмотрим задачу

$$\Phi \rightarrow \min_{\mathfrak{M}}.$$

Аналогом классической теоремы Эйлера–Лагранжа (см. [4; с. 35]) является следующий факт.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u_0(x)$ из $\mathfrak{M}$ – минималь (2). Пусть $u_0(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на каждом ребре γ_i . Тогда на каждом ребре γ_i для нее справедливо тождество

$$F_u(x, u_0(x), u'_0(x)) - \frac{d}{dx} F_{u'}(x, u_0(x), u'_0(x)) = 0, \quad (4)$$

а в каждой внутренней вершине $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$ справедливо условие

$$\sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} \varkappa_i(a) F_{u'}^{(\gamma_i)}(a, u_0(a), (u_0)'_i(a)) = 0. \quad (5)$$

Здесь $\Gamma(a)$ обозначает набор примыкающих к a ребер. Число $\varkappa_i(a)$ равно 1, если ребро γ_i ориентировано “от a ”, и равно -1 , если γ_i ориентировано “к a ”. Через $(u_0)'_i(a)$ обозначен предел $(u_0)'(x)$ при x , стремящемся к a по ребру γ_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E_0 – совокупность таких функций из E , что

$$u|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (6)$$

Так как $E_0 + u_0 = \mathfrak{M}$, то для любой $h \in E_0$ при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ должно быть $(u_0 + \lambda h) \in \mathfrak{M}$. Функция $\varphi(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$ скалярного аргумента λ имеет минимум при $\lambda = 0$, а потому

$$\left. \frac{d\varphi}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 0.$$

Так как

$$\left. \frac{d\varphi}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \int_{\Gamma} (F_u(x, u_0(x), u'_0(x))h(x) + F_{u'}(x, u_0(x), u'_0(x))h'(x)) dx, \quad (7)$$

где, как и в (2), интеграл по Γ понимается как сумма интегралов.

Приравнявая (7) к нулю и проводя следующие преобразования:

- 1) интегрируя вторые слагаемые (точнее, интегралы от соответствующих сужений $F_u^{(\gamma_i)}$) по частям вдоль каждого замыкания $[\gamma_i]$ ребра γ_i ,
 - 2) собирая затем внеинтегральные члены возле соответствующих им внутренних узлов,
 - 3) пользуясь непрерывностью $h(x)$ во внутренних узлах из $\mathcal{J}(\Gamma)$, что позволяет отождествлять предельные вдоль γ_i значения сужений h_i для примыкающих к $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$ ребер γ_i в точке a с единым значением $h(a)$,
 - 4) пользуясь в граничных вершинах для $h(x)$ условиями (6),
- мы получим из (7) равенство

$$\sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} \left(F_u^{(\gamma_i)}(x, u_0(x), u'_0(x)) - \frac{d}{dx} F_{u'}^{(\gamma_i)}(x, u_0(x), u'_0(x)) \right) h_i(x) dx + \sum_{a \in \mathcal{J}(\Gamma)} \left(\sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} \varkappa_i(a) F_{u'}^{(\gamma_i)}(a, u_0(a), (u'_0)'_i(a)) \right) h(a) = 0.$$

Отсюда в силу произвола $h \in E_0$ естественно следует (4) и (5).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предположение о непрерывности второй производной у экстремали $u_0(x)$ нам потребовалось лишь для того, чтобы без помех проинтегрировать по частям (на каждого ребра) интеграл

$$\int_{\gamma_i} F_{u'}^{(\gamma_i)}(x, u_0(x), u'_0(x)) h'_i(x) dx = \int_{\gamma_i} F_{u'}^{(\gamma_i)}(x, u_0(x), u'_0(x)) dh_i(x),$$

опираясь на дифференцируемость суперпозиции $F_u^{(\gamma_i)}(x, u_0(x), u'_0(x))$. (Даже в этом, достаточно регулярном, случае мы получаем не чистый аналог формулы (1), так как помимо внеинтегральных членов на границе $\partial\Gamma$ у нас появляются внеинтегральные члены и внутри области Γ интегрирования). Если этой дифференцируемости у функции $F_{u'}(x, u_0(x), u'_0(x))$ нет по причине недостаточной гладкости $u_0(x)$ (или в случае отсутствия непрерывности $F_{u'}$), то естественно использовать классические соображения Дюбуа–Реймона. Здесь мы воочию сталкиваемся с проблемой интегрирования по частям в рамках интеграла Стильтеса, когда в проблемных точках (здесь – во внутренних вершинах из $\mathcal{J}(\Gamma)$) обнаруживаются атомы меры, выдавливающие внеинтегральные члены. И условия (5), являясь необходимыми для экстремума функционала, автоматически ликвидируют это малоприятное обстоятельство.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие типа (5) известно для задачи Штурма–Луивилля на графе, естественно возникая в физических задачах, как условие трансмиссии (см., например, [5; с. 7–8]). В случае классической задачи на отрезке условие (5) в точности совпадает с условием Эрдмана–Вейерштрасса для ломаной экстремали [8; с. 218], автоматически выполняясь во всех точках гладкости.

2. Далее нас интересуют условия минимума Φ в терминах второй вариации, которая имеет обычный вид квадратичного функционала

$$\delta^2 \Phi(u_0)h = \int_{\Gamma} (Mh'^2 + 2Qhh' + Nh^2) dx, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} M(x) &= F_{u'u'}(x, u_0(x), u'_0(x)), & Q(x) &= F_{uu'}(x, u_0(x), u'_0(x)), \\ N(x) &= F_{uu}(x, u_0(x), u'_0(x)), \end{aligned}$$

а интеграл, как и ранее, трактуется как сумма обычных интегралов по Риману. Символы-индексы сужений на ребра достаточно очевидны, и мы их опускаем. Мы предполагаем здесь, для упрощения разговора, совокупную равномерную непрерывность на $\gamma_i \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ третьих производных функций $F^{(\gamma_i)}$.

Нам предстоит построить более глубокий, чем выше, аналог формулы интегрирования по частям.

Необходимое условие минимума $\delta^2 \Phi(u_0)h \geq 0$ (на всех допустимых $h \in E_0$) аналогично классической ситуации приводит нас к неравенству $M(x) \geq 0$ на каждом ребре (аналог условия Лежандра). Строгое на замыкании $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$ неравенство $M(x) > 0$ согласно даже скалярной теории недостаточно для неотрицательности квадратичного функционала (8). Желаемое для нас свойство

$$\delta^2 \Phi(u_0)h > 0 \quad h \neq 0, \quad h|_{\partial\Gamma} = 0,$$

мы обеспечим вполне аналогично классической теореме Якоби.

Функцию $w(x)$, равномерно непрерывную на каждом ребре Γ (она может иметь разрывы во внутренних узлах Γ), назовем *приглаженной* во внутренней вершине $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$, если

$$\sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} \varkappa_i(a) w_i(a) = 0.$$

Здесь, естественно, через $w_i(a)$ обозначен предел $w(x)$ при стремлении x к a вдоль ребра γ_i . Для $\varkappa_i(a)$ имеем, как мы уже договорились, $\varkappa_i(a) = +1$, если локальная параметризация γ_i направлена “от a ”, и $\varkappa_i(a) = -1$ в противном случае.

Очевидно, вместе с приглаженной в точке $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$ функцией $w(x)$ свойством приглаженности будет обладать и функция $h(x)w(x)$ при любой непрерывной в точке a функции $h(x)$.

ЛЕММА 1. *Для того, чтобы равномерно непрерывная на каждом ребре функция w была приглаженной во всех внутренних узлах $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой $h \in E_0$ имело место равенство*

$$\int_{\Gamma} (h(x)w'(x) + w(x)h'(x)) dx = 0. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначая i -е ребро Γ через (a'_i, a''_i) , будем иметь вместо левой части (9)

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{\gamma_i} (h_i(x)w'_i(x) + w_i(x)h'_i(x)) dx &= \sum_i \left(\int_{\gamma_i} h_i dw_i + \int_{\gamma_i} w_i dh_i \right) \\ &= \sum_i w_i(a''_i)h_i(a''_i) - \left[\sum_i w_i(a'_i)h_i(a'_i) \right]. \end{aligned}$$

Последнее выражение, так как $h|_{\partial\Gamma} = 0$, может быть перегруппировано так, чтобы собрать слагаемые, соответствующие внутренним вершинам, что придаст этому выражению вид

$$- \sum_{a \in \mathcal{J}(\Gamma)} \left(\sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} \kappa_i(a) w_i(a) \right) h(a);$$

так как $h_i(a) = h_j(a)$ при любых $\gamma_i, \gamma_j \in \Gamma(a)$, то мы это общее значение h_i в точке a и обозначим через $h(a)$. Итоговое равенство

$$\int_{\Gamma} (h\omega' + \omega h') dx = - \sum_{a \in \mathcal{J}(\Gamma)} \left(\sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} \kappa_i(a) w_i(a) \right) h(a)$$

в силу произвола $h(\cdot)$ из E_0 полностью доказывает лемму.

ЛЕММА 2. Для любой $w(\cdot)$ из E_0 пригладенность $w'(\cdot)$ в точке $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$ эквивалентна равенству

$$\sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} w'_i(a) = 0,$$

где $w'_i(a)$ вычислены при локальной ориентации γ_i "от a ".

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО напрямую следует из того, что при вычислении $w'_i(a)$ автоматически учитывается ориентация примыкающего к a ребра γ_i , определяющая соответствующий коэффициент $\kappa_i(a)$.

Пригладенность $w(x)$ на $\mathcal{J}(\Gamma)$ означает, по существу, что в аналоге интеграла Стильтеса $\int_{\Gamma} h dw$ порождаемые $w(x)$ атомы меры Стильтеса (аналогично скачкам w для интеграла на отрезке) $\sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} \kappa_i(a) w_i(a)$ во внутренних вершинах оказываются нулевыми.

Введем в рассмотрение уравнение

$$(Mz)' - 2Qz' + \left(\frac{Q^2}{M} - N \right) z = 0, \quad (10)$$

предполагая функции Q, M, N равномерно непрерывными на каждом ребре, причем $\inf M > 0$. Уравнение (10) мы трактуем обычным образом на каждом ребре Γ , а в каждой из внутренних вершин $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$ мы предполагаем непрерывность решения $z(x): \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, а также следующие условия:

$$\sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} M_i(a) z'_i(a) = 0. \quad (11)$$

В случае, когда $Q(x) \equiv 0$, т.е. когда функционал (9) имеет самосопряженный вид

$$\delta^2 \Phi(u_0)h = \int_{\Gamma} (Mh'^2 + Nh^2) dx, \quad (12)$$

как это делается в классической теории при $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$, т.е. в пространстве функций скалярного аргумента, уравнение (10) совпадает со стандартным уравнением Якоби

$$(Mz)' - Nz = 0. \quad (13)$$

Скажем, что функционал (8) удовлетворяет *условию Якоби*, если уравнение (10) имеет при условиях (11) хотя бы одно строго положительное на $\Gamma \cup \partial\Gamma$ решение. Это условие для скалярной (на отрезке) задачи эквивалентно классическому условию Якоби об отсутствии на рассматриваемом отрезке сопряженных к левому концу точек. Для случая общего графа и двучленного уравнения (13) аналогичное условие детально изучено в [5; глава 4]. Условие (11) вполне аналогично вводимому выше условию трансмиссии (5).

ТЕОРЕМА 2. *Если для функционала (8) $M(x) > 0$ при $x \in \Gamma \cup \partial\Gamma$ и выполняется условие Якоби, то функционал (9) строго положителен для любой $h(x)$ из E_0 ($h \neq 0$).*

Сформулированная теорема является точным аналогом классической теоремы Якоби, совпадая с ней, если Γ имеет только одно ребро, т.е. является интервалом из $\mathbb{R}^1$.

3. Доказательство теоремы 2. Покажем существование такой функции $g(x)$, что функционал (8) может быть представлен в виде

$$\int_{\Gamma} M(h' + gh)^2 dx. \quad (14)$$

Ввиду очевидной неотрицательности всех значений последнего функционала равенство его нулю возможно лишь для функции $h_0(x)$, удовлетворяющей тождеству

$$h'_0(x) + g(x)h_0(x) = 0.$$

Последнее означает, что h_0 оказывается на каждом ребре Γ решением линейного однородного уравнения и в силу нулевых значений на $\partial\Gamma$ оказывается тождественным нулем как на ребрах, примыкающих к $\partial\Gamma$, так и, рекуррентно рассуждая, на всех остальных.

Возможность представить (8) в виде (14) у нас появится, если положить

$$g = \frac{Q + \varphi}{M}, \quad (15)$$

а в качестве φ взять функцию

$$\varphi = -\frac{Mz'}{z}, \quad (16)$$

где $z(x)$ – существующее по условию Якоби строго положительное решение уравнения (10), удовлетворяющее условиям (11). Покажем это.

Вычтя из (8) интеграл, полученный из (14) после замены (15), будем иметь

$$-2 \int_{\Gamma} \varphi h h' dx + \int_{\Gamma} (N - Mg^2) h^2 dx.$$

Из (16) в силу (11) видно, что функция $\varphi(x)$ оказывается пригlaженной на $\mathcal{J}(\Gamma)$, и потому в последней сумме у первого интеграла, взятого по частям (при $2hh' dx = d(h^2)$) все внеинтегральные члены в узлах из $\mathcal{J}(\Gamma)$ пропадают, что приводит эту сумму к выражению

$$\int_{\Gamma} (\varphi' + N - Mg^2) h^2 dx.$$

Подынтегральное выражение здесь после окончательной замены g на выражение (15) примет вид

$$\varphi' + N - \frac{(Q + \varphi)^2}{M},$$

что с учетом (16) может быть записано в виде

$$-\frac{(Mz')'}{z} + 2Q\frac{z'}{z} - \frac{Q^2}{M} + N,$$

что с точностью до множителя совпадает с левой частью уравнения (10), оказываясь, стало быть, тождественным нулем.

Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы*, т. 1: Общая теория, ИЛ, М., 1962.
- [2] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976.
- [3] В. А. Садовничий, *Теория операторов*, Высшая школа, М., 1999.
- [4] Л. Янг, *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления*, Мир, М., 1974.
- [5] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров, *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, Физматлит, М., 2004.
- [6] Ю. В. Покорный, “Интеграл Стильтеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях”, *Докл. РАН*, **364**:2 (1999), 167–169.
- [7] Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров, “Об одном классе обобщенных задач Штурма–Лиувилля с разрывными решениями”, *Дифференциальные уравнения и смежные вопросы*, Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 103-летию со дня рождения И. Г. Петровского (XXI совместное заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского), Изд-во МГУ, М., 2004, 166–167.
- [8] М. Лаврентьев, Л. Люстерник, *Основы вариационного исчисления*, т. 1, ч. II, ОНТИ, М.–Л., 1935.

Ю. В. Покорный

Воронежский государственный университет

E-mail: pokorny@kma.vsu.ru

Поступило

21.12.2004

Исправленный вариант

17.04.2006

И. Ю. Покорная

Воронежский государственный педагогический университет

В. Л. Прядиев

Воронежский государственный университет

E-mail: pryad@mail.ru

Н. Н. Рябцева

Белгородский университет потребительской кооперации