Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Шейпак, О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах $L_p[0, 1]$, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 6, 924–938

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3741>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 11:21:49

УДК 517.518

О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах $L_p[0, 1]$

И. А. Шейпак

В статье приводится конструкция аффинно-самоподобных функций. В терминах параметров преобразований самоподобия дается условие принадлежности этих функций классам $L_p[0, 1]$, а также пространству $C[0, 1]$. Изучаются некоторые свойства этих функций (монотонность, ограниченность вариации). Устанавливается связь самоподобных функций с самоподобными мерами.

Библиография: 19 названий.

1. Введение

Самоподобные (фрактальные) объекты (множества, меры, функции) нашли широкое применение в различных областях математики. Одним из способов построения таких объектов является применение теоремы о неподвижной точке сжимающего отображения в полном метрическом пространстве. Достаточно общую конструкцию самоподобных множеств и мер, опирающуюся на такой подход, а также некоторые их приложения можно найти, например, в [1].

Одним из важных приложений самоподобных непрерывных функций является теория сжатия компьютерных изображений (см. [2]). При этом, в основном, решаются вопросы интерполяции изображаемых объектов или их границ непрерывными самоподобными функциями, значения которых заданы в конечном наборе точек. В конструкции этих функций параметры отображений, определяющих самоподобие, могут быть вычислены через узлы интерполяции.

Кроме того, самоподобные меры находят применение и в спектральной теории операторов [3], и в гармоническом анализе [4], [5]. Заметим, что в работе [5] терминология “самоподобные меры” не употреблялась, но конструкция мер, коэффициенты Фурье–Стилтьеса которых не стремятся к нулю, тем не менее использует идею самоподобия. Различные задачи, связанные с изучением свойств вероятностных самоподобных мер, естественным образом возникают в теории фрактальных кривых, изучение которых началось с уже ставших классическими работ [6]–[8]. Впоследствии непрерывные фрактальные кривые нашли применение в теории функций, теории вероятностей, эргодической теории и т.д. [9]–[11].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00712) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-5247.2006.1).

Большое развитие теория фрактальных кривых получила после того, как обнаружилась ее связь с теорией всплесков (вейвлетов) и масштабирующих функций (см., например, [12]). В частности, определенный интерес представляет исследование гладкости решений масштабирующих уравнений в различных функциональных пространствах. Например, в работе [13] были получены оценки сверху на показатель Гёльдера этих решений в пространстве $C[0, 1]$. В [14] были получены критерии таких свойств решений масштабирующих уравнений, как абсолютная непрерывность, сингулярная непрерывность, ограниченность вариации.

Расширением понятий самоподобных мер и непрерывных функций являются функции из пространств L_p . В связи с этим необходимо упомянуть о введенных в работе [15] суммируемых фрактальных кривых. В этой работе были получены критерии существования фрактальной кривой и принадлежности ее классам L_p в терминах спектральных p -радиусов ρ_p [16]. Кроме того, там же были выведены формулы для показателей гладкости в различных функциональных пространствах.

Некоторые частные случаи квадратично-суммируемых самоподобных функций были рассмотрены в [17]. Свойства самих функций не изучались. Основное отличие конструкции самоподобных функций из $L_p[0, 1]$ от самоподобных непрерывных функций заключается в том, что параметры самоподобия нельзя определить через значения функции в некотором наборе точек.

Упомянутые работы [3], [17], а также некоторые результаты работы [18] указывают на тесную связь спектра некоторых граничных задач с такими свойствами самоподобных функций как монотонность, непрерывность, абсолютная непрерывность, ограниченность вариации. В связи с этим изучение указанных и других свойств самоподобных функций различных классов представляет интерес для многих математических направлений.

Целью данной работы является построение самоподобных функций в $L_p[0, 1]$ и исследование некоторых их свойств (непрерывность, монотонность, ограниченность вариации). В основе конструирования таких функций лежит теорема о неподвижной точке сжимающего отображения в полном метрическом пространстве. Предлагаемый подход, с одной стороны является более общим, по сравнению с построением фрактальных кривых (отрезки разбиения могут иметь различную длину). С другой стороны, фрактальная кривая принадлежит $\mathbb{R}^n$. В случае, когда самоподобная функция является непрерывной, эту конструкцию можно переформулировать в терминах узлов интерполяции (см. [2]). В случае, когда самоподобная функция является неубывающей, она естественным образом порождает самоподобную меру. Самоподобной функции ограниченной вариации соответствует самоподобный заряд.

2. Самоподобные функции в пространстве $L_p[0, 1]$

2.1. Операторы подобия в пространстве $L_p[0, 1]$. Пусть фиксировано натуральное число $n > 1$, и пусть вещественные числа $a_k > 0$, $c_k > 0$, d_k и β_k , где $k = 1, \dots, n$, таковы, что $\sum_{k=1}^n a_k = 1$. Данному набору чисел и произвольному $x \in [0, 1]$ можно поставить в соответствие непрерывный нелинейный оператор $G: L_p[0, 1] \rightarrow L_p[0, 1]$ вида

$$G(f) = \sum_{k=1}^n \{ \beta_k \cdot \chi_{(\alpha_k, \alpha_{k+1})} + c_k \cdot x + d_k \cdot G_k(f) \}, \quad (2.1)$$

где использованы следующие обозначения:

- (1) через α_k , где $k = 1, 2, \dots, n+1$, обозначены числа $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_k = \sum_{l=1}^{k-1} a_l$, где $k = 2, \dots, n+1$;
- (2) через $\chi_{(\zeta, \xi)}$ обозначена характеристическая функция интервала (ζ, ξ) , рассматриваемая как элемент пространства $L_p[0, 1]$;
- (3) через G_k , где $k = 1, \dots, n$, обозначены непрерывные линейные операторы в пространстве $L_p[0, 1]$, действующие на функцию f согласно правилу

$$G_k(f)(t) = f(a_k t + \alpha_k), \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Операторы G вида (2.1) будут называться *операторами подобия*. Этот оператор на непрерывные функции действует следующим образом:

$$G(f)(t) = c_k \cdot t + d_k \cdot f(t) + \beta_k, \quad (2.3)$$

где $x \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, $t \in [0, 1]$, а переменные x и t связаны соотношением $t = a_k \cdot x + \alpha_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Это отображение является частью большего отображения A , действующего на график непрерывной функции. Чтобы описать его, введем операторы A_k :

$$A_k \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k & 0 \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix}.$$

Отображение A определено так:

$$A \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} = \bigcup_{k=1}^n A_k \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Среди всех операторов подобия для дальнейшего изложения наибольший интерес представляют сжимающие операторы.

ЛЕММА 2.1. *Оператор подобия G является сжимающим оператором в $L_p[0, 1]$ в том и только том случае, когда справедливы неравенства*

$$\sum_{k=1}^n a_k |d_k|^p < 1, \quad 1 \leq p < +\infty, \quad (2.4)$$

$$\max_{1 \leq k \leq n} |d_k| < 1, \quad p = +\infty. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p < \infty$ утверждение доказываемой леммы следует из того факта, что при любых $f_1, f_2 \in L_p[0, 1]$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|G(f_1) - G(f_2)\|_{L_p[0,1]}^p &= \int_0^1 |G(f_1) - G(f_2)|^p dx \\ &= \sum_{k=1}^n \left(|d_k|^p \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |G_k(f_1) - G_k(f_2)|^p dx \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_k |d_k|^p \right) \int_0^1 |f_1 - f_2|^p dx \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_k |d_k|^p \right) \|f_1 - f_2\|_{L_2[0,1]}^p. \end{aligned}$$

При $p = +\infty$ справедливо неравенство

$$\|f_1 - f_2\|_{L_\infty[0,1]} \leq \max_k |d_k| \|f_1 - f_2\|_{L_\infty[0,1]}.$$

Из леммы 2.1 и принципа сжимающих отображений немедленно вытекает справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2.1. *Если справедливо неравенство (2.4) при $1 \leq p < +\infty$ или (2.5) при $p = +\infty$, то существует и единственная функция $f \in L_p[0, 1]$, удовлетворяющая уравнению $G(f) = f$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функции, заданные условием $G(f) = f$ при некотором сжимающем операторе подобия G будем называть *аффинно-самоподобными* или просто *самоподобными*. Числа $\{a_k\}$, $\{c_k\}$, $\{d_k\}$ и $\{\beta_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, соответствующие этому оператору G , будем называть *параметрами самоподобия*.

В дальнейшем всегда будет предполагаться, что неравенство (2.4) или (2.5) выполнено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Набор чисел $\{\alpha_k\}$, как нетрудно видеть, задает разбиение отрезка $[0, 1]$: $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < 1 = \alpha_{n+1}$. Числа a_k отвечают за горизонтальное сжатие функции f , а числа d_k – за вертикальное сжатие.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Параметры c_k не влияют на свойство сжимаемости оператора G .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Для фрактальных кривых, заданных семейством аффинных (не обязательно сжимающих) операторов, условию (2.4) при $p \in [1, +\infty)$ соответствует условие $\rho_p < 1$ (см., например, [15]), где ρ_p – p -радиус этих операторов.

Одной и той же функции могут соответствовать разные параметры самоподобия. Например, функция $f(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$ может быть задана как набором $n = 2$, $a_1 = a_2 = 1/2$, $c_1 = c_2 = 1/2$, $d_1 = d_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1/2$, так и набором $n = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $c_1 = c_2 = c_3 = 1/3$, $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1/3$, $\beta_3 = 1/3$.

2.2. Неравенства, оценивающие нормы самоподобных функций $f \in L_p[0, 1]$ через параметры самоподобия. На пространстве n -мерных векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ введем весовую норму для пары векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ и фиксированного $s \in [1, +\infty)$:

$$\|\{x, y\}\|_{s,a} = \left(\sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|)^s a_k \right)^{1/s},$$

где коэффициенты a_k удовлетворяют условиям $0 < a_k < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\sum_{k=1}^n a_k = 1$.

Кроме того, для облегчения выкладок введем обозначение

$$r_p = \sum_{k=1}^n a_k |d_k|^p.$$

Легко заметить, что из условия $r_p < 1$ для любого $1 \leq s < p$ также вытекает условие $r_s < 1$ и, более того, $r_s \leq (r_p)^{s/p}$.

При $p = +\infty$ введенные выше величины не зависят от чисел $\{a_k\}$ и соответственно определяются так:

$$\|\{x, y\}\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} \{|x_k| + |y_k|\}, \quad r_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} \{|d_k|\}.$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.2. Для самоподобной функции $f \in L_p[0, 1]$, $p \in \mathbb{N}$, с параметрами самоподобия a_k, c_k, d_k, β_k выполнено неравенство

$$\|f\|_{L_p[0,1]} \leq \frac{\sum_{s=1}^p \|\{c, \beta\}\|_{s,a}}{(\prod_{s=1}^p (1 - r_s))^{1/p}}, \quad (2.6)$$

где $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем методом математической индукции по p .

Действительно, при $p = 1$ справедливы следующие выкладки:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_1[0,1]} &= \int_0^1 |f(x)| dx = \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |f(x)| dx = \sum_{k=1}^n \int_0^1 |c_k \cdot t + \beta_k + d_k \cdot f(t)| a_k dt \\ &\leq \sum_{k=1}^n (|c_k| + |\beta_k|) a_k + \left(\sum_{k=1}^n a_k |d_k| \right) \|f\|_{L_1[0,1]}, \end{aligned}$$

из которых следует справедливость неравенства (2.6) при $p = 1$.

Допустим, что неравенство (2.6) верно при $j = 1, 2, \dots, p-1$. Если $f \in L_p[0, 1]$, то, очевидно, $f \in L_s[0, 1]$ для любого $s \in [1, p)$. Тогда справедливы следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p[0,1]}^p &= \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |f(x)|^p dx = \sum_{k=1}^n \int_0^1 |c_k \cdot t + \beta_k + d_k \cdot f(t)|^p a_k dt \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{p-1} C_p^j (|c_k| + |\beta_k|)^{p-j} |d_k|^j a_k \|f\|_{L_j[0,1]}^j + \left(\sum_{k=1}^n a_k |d_k|^p \right) \|f\|_{L_p[0,1]}^p, \end{aligned}$$

из которых вытекает неравенство

$$(1 - r_p) \|f\|_{L_p[0,1]}^p \leq \sum_{k=1}^n (|c_k| + |d_k|)^p a_k + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p-1} C_p^j (|c_k| + |d_k|)^{p-j} |d_k|^j a_k \|f\|_{L_j[0,1]}^j. \quad (2.7)$$

Учитывая предположение индукции при $j = 1, 2, \dots, p-1$:

$$\|f\|_{L_j[0,1]}^j \leq \frac{(\sum_{s=1}^j \|\{c, \beta\}\|_{s,a})^j}{\prod_{s=1}^j (1 - r_s)} \leq \frac{(\sum_{s=1}^{p-1} \|\{c, \beta\}\|_{s,a})^j}{\prod_{s=1}^{p-1} (1 - r_s)},$$

а также применяя неравенство Гёльдера к сумме

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (|c_k| + |d_k|)^{p-j} |d_k|^j a_k &= \sum_{k=1}^n (|c_k| + |d_k|)^{p-j} a_k^{(p-j)/p} a_k^{p/j} |d_k|^j \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n (|c_k| + |d_k|)^p a_k \right)^{(p-j)/p} \left(\sum_{k=1}^n a_k |d_k|^p \right)^{j/p} \\ &= \|\{c, \beta\}\|_{p,a}^{p-j} r_p^{j/p} \leq \|\{c, \beta\}\|_{p,a}^{p-j}, \end{aligned}$$

неравенство (2.7) преобразуем к следующему виду:

$$(1 - r_p) \|f\|_{L_p[0,1]}^p \leq \| \{c, \beta\} \|_{p,a}^p + \sum_{j=1}^{p-1} C_p^j \| \{c, \beta\} \|_{p,a}^{p-j} \frac{(\sum_{s=1}^{p-1} \| \{c, \beta\} \|_{s,a})^j}{\prod_{s=1}^{p-1} (1 - r_s)}.$$

Из последнего неравенства тем более следует неравенство

$$(1 - r_p) \|f\|_{L_p[0,1]}^p \leq \frac{(\sum_{s=1}^p \| \{c, \beta\} \|_{s,a})^p}{\prod_{s=1}^{p-1} (1 - r_s)},$$

что и завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. В пространстве $L_\infty[0,1]$ неравенство для нормы f , аналогичное (2.6), имеет вид

$$\|f\|_{L_\infty[0,1]} \leq \frac{\max_k \{|c_k| + |\beta_k|\}}{1 - \max_k |d_k|} = \frac{\| \{c, \beta\} \|_\infty}{1 - r_\infty}.$$

Докажем аналогичные оценки для дробного p . Для этого нецелое число $p > 1$ представим в виде $p = [p] + \{p\}$, где $[p]$ обозначает целую часть числа p , а $\{p\}$ – дробную часть числа p , $\{p\} \neq 0$.

ТЕОРЕМА 2.3. Для самоподобной функции $f \in L_p[0,1]$, $\{p\} \neq 0$, справедлива оценка

$$\|f\|_{L_p[0,1]} \leq C \cdot \frac{(\| \{c, \beta\} \|_{[p],a}^{[p]} + \sum_{s=1}^{[p]} \| \{c, \beta\} \|_{s,a})^{[p]/p}}{((1 - r_p) \prod_{s=1}^{[p]} (1 - r_s))^{1/p}},$$

где

$$C = \left(\max \left\{ \max_k \{(|c_k| + |\beta_k|)^{\{p\}}\}, \max_k \{|d_k|^{\{p\}}\}, \left(\sum_{s=1}^{[p]} \| \{c, \beta\} \|_{s,a} \right)^{\{p\}} \right\} \right)^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p[0,1]} &\leq \sum_{k=1}^n \int_0^1 |c_k \cdot t + \beta_k + d_k \cdot f(t)|^{[p]} (|c_k| \cdot t + |\beta_k| + |d_k| \cdot |f(t)|)^{\{p\}} a_k dt \\ &\leq \max_k \{(|c_k| + |\beta_k|)^{\{p\}}\} \sum_{k=1}^n \int_0^1 |c_k \cdot t + \beta_k + d_k \cdot f(t)|^{[p]} a_k dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \int_0^1 |c_k \cdot t + \beta_k + d_k \cdot f(t)|^{[p]} |d_k|^{\{p\}} |f(t)|^{\{p\}} a_k dt \\ &\leq \max_k \{(|c_k| + |\beta_k|)^{\{p\}}\} \|f\|_{L_{[p]}[0,1]}^{[p]} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \int_0^1 (|c_k| + |\beta_k| + |d_k| \cdot |f(t)|)^{[p]} |d_k|^{\{p\}} |f(t)|^{\{p\}} a_k dt. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Преобразуем последнюю сумму в неравенстве (2.8). Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \int_0^1 (|c_k| + |\beta_k| + |d_k| \cdot |f(t)|)^{[p]} |d_k|^{\{p\}} |f(t)|^{\{p\}} a_k dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{[p]} C_{[p]}^j (|c_k| + |\beta_k|)^{[p]-j} |d_k|^j |f(t)|^j \right) |d_k|^{\{p\}} |f(t)|^{\{p\}} a_k dt. \end{aligned}$$

В последнем выражении слагаемое при $j = [p]$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^n a_k |d_k|^p \int_0^1 |f(t)|^p dt = r_p \|f\|_{L_p[0,1]}^p. \quad (2.9)$$

Поменяв порядок суммирования, оставшиеся слагаемые можно переписать в виде

$$\sum_{j=0}^{[p]-1} C_{[p]}^j \sum_{k=1}^n (|c_k| + |\beta_k|)^{[p]-j} |d_k|^j |d_k|^{\{p\}} a_k \int_0^1 |f(t)|^{j+\{p\}} dt. \quad (2.10)$$

Сумма по k в выражении (2.10) допускает оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (|c_k| + |\beta_k|)^{[p]-j} |d_k|^j |d_k|^{\{p\}} a_k \\ & \leq \max_k \{|d_k|^{\{p\}}\} \left(\sum_{k=1}^n (|c_k| + |\beta_k|)^{[p]} a_k \right)^{([p]-j)/[p]} \left(\sum_{k=1}^n a_k |d_k|^{[p]} \right)^{j/[p]} \\ & = \max_k \{|d_k|^{\{p\}}\} \|\{c, \beta\}\|_{[p],a}^{[p]-j} r_{[p]}^{j/[p]} \\ & \leq \max_k \{|d_k|^{\{p\}}\} \|\{c, \beta\}\|_{[p],a}^{[p]-j}, \quad j = 0, 1, \dots, [p] - 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь мы применили неравенство Гёльдера с показателями $p_1 = [p]/([p] - j)$ и $q_1 = [p]/j$.

Интегралы допускают следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |f(t)|^{j+\{p\}} dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^{j+1} dt \right)^{(j+\{p\})/(j+1)} \\ & = \|f\|_{L_{j+1}[0,1]}^{j+\{p\}} \leq \|f\|_{L_{[p]}[0,1]}^{j+\{p\}}, \quad j = 0, 1, \dots, [p] - 1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь также применено неравенство Гёльдера с показателями $p_1 = (j+1)/(j+\{p\})$ и $q_1 = (j+1)/(1-\{p\})$.

Подставив теперь соотношение (2.9) и неравенства (2.11), (2.12) в неравенство (2.8), получим

$$\begin{aligned} (1 - r_p) \|f\|_{L_p[0,1]}^p & \leq \max_k \{(|c_k| + |\beta_k|)^{\{p\}}\} \|f\|_{[p]}^{[p]} \\ & \quad + \max_k \{|d_k|^{\{p\}}\} \sum_{j=0}^{[p]-1} C_{[p]}^j \|\{c, \beta\}\|_{[p],a}^{[p]-j} \|f\|_{L_{[p]}[0,1]}^{j+\{p\}}. \end{aligned}$$

С учетом соотношения (2.6) получаем, что

$$(1 - r_p) \|f\|_{L_p[0,1]}^p \leq \max_k \{(|c_k| + |\beta_k|)^{\{p\}}\} \frac{(\sum_{s=1}^{[p]} \|\{c, \beta\}\|_{s,a})^{[p]}}{\prod_{s=1}^{[p]} (1 - r_s)} \\ + \max_k \{|d_k|^{\{p\}}\} \sum_{j=0}^{[p]-1} C_{[p]}^j \|\{c, \beta\}\|_{[p],a}^{[p]-j} \frac{(\sum_{s=1}^{[p]} \|\{c, \beta\}\|_{s,a})^{j+\{p\}}}{(\prod_{s=1}^{[p]} (1 - r_s))^{(j+\{p\})/[p]}},$$

что окончательно можно оценить таким образом:

$$(1 - r_p) \|f\|_{L_p[0,1]}^p \leq \max \left\{ \max_k \{(|c_k| + |\beta_k|)^{\{p\}}\}, \max_k \{|d_k|^{\{p\}}\}, \left(\sum_{s=1}^{[p]} \|\{c, \beta\}\|_{s,a} \right)^{\{p\}} \right\} \\ \times \frac{(\|\{c, \beta\}\|_{[p],a}^{[p]} + \sum_{s=1}^{[p]} \|\{c, \beta\}\|_{s,a})^{[p]}}{\prod_{s=1}^{[p]} (1 - r_s)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Для фиксированного $p \in [1, +\infty]$ и любых $R > 0$, $\varepsilon > 0$ рассмотрим всевозможные сжимающие отображения в $L_p[0,1]$, заданные параметрами $\{a_k\}$, $\{c_k\}$, $\{d_k\}$, $\{\beta_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, такими, что

$$\|\{c, \beta\}\|_{p,a} \leq R, \quad \sum_{k=1}^n a_k |d_k|^p \leq 1 - \varepsilon, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|\{c, \beta\}\|_{\infty} \leq R, \quad \max_{1 \leq k \leq n} |d_k| \leq 1 - \varepsilon, \quad p = \infty.$$

Тогда все функции, являющиеся неподвижными точками таких сжимающих отображений, образуют ограниченное множество в $L_p[0,1]$.

2.3. Непрерывная зависимость неподвижной точки сжимающего отображения от параметров d_k , c_k , β_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Пусть задано разбиение отрезка $[0,1]$: $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < 1$. Числа a_k являются длинами отрезков разбиения:

$$a_k = \alpha_k - \alpha_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Зададим также два набора чисел d_k , c_k , β_k и d'_k , c'_k , β'_k , $k = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющие условиям

$$r_p = \sum_{k=1}^n a_k |d_k|^p < 1, \quad r'_p = \sum_{k=1}^n a_k |d'_k|^p < 1$$

при некотором фиксированном $p \in [1, +\infty)$. Эти наборы порождают два сжимающих отображения G и G' , неподвижными точками которых соответственно будут функции f и g .

При $p = +\infty$ предполагается, что параметры самоподобия удовлетворяют условиям

$$r_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq n} \{|d_k|\} < 1, \quad r'_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq n} \{|d'_k|\} < 1.$$

Утверждения теорем 2.2 и 2.3 означают, что операторы подобия G непрерывно зависят от параметров d_k , c_k , β_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Применяя известный результат о непрерывной зависимости неподвижной точки сжимающего оператора от параметра (см., например, [2; лемма 2, с. 111]), получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.4. *Самоподобная функция, являющаяся неподвижной точкой сжимающего отображения, непрерывно зависит от параметров самоподобия, а именно, если $c_k \rightarrow c'_k$, $d_k \rightarrow d'_k$ и $\beta_k \rightarrow \beta'_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, то $\|f - g\|_{L_p[0,1]} \rightarrow 0$.*

В частности, при $p \in [1, +\infty)$ несложно получить следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \|f - g\|_{L_p[0,1]} \\ & \leq \frac{2^p \|\{c - c', \beta - \beta'\}\|_{p,a} + 2^{p-1} \left(\sum_{k=1}^n a_k |d_k - d'_k|^p\right)^{1/p} (\|g\|_{L_p[0,1]} + \|f\|_{L_p[0,1]})}{2 - r_p^{1/p} - r'_p{}^{1/p}}. \end{aligned}$$

В $L_\infty[0, 1]$ аналогичные оценки выглядят так:

$$\|f - g\|_{L_\infty[0,1]} \leq \frac{2\|\{c - c', \beta - \beta'\}\|_\infty + \max_k \{|d_k - d'_k|\} (\|f\|_{L_\infty[0,1]} + \|g\|_{L_\infty[0,1]})}{2 - r_\infty - r'_\infty}.$$

3. Непрерывные самоподобные функции

Укажем условия на числа $\{c_k\}_{k=1}^n$, $\{d_k\}_{k=1}^n$ и $\{\beta_k\}_{k=1}^n$, при которых оператор подобия G задает непрерывную функцию.

ТЕОРЕМА 3.1. *Сжимающий оператор подобия G задает непрерывную функцию тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$$\max_{1 \leq k \leq n} |d_k| < 1, \quad (3.1)$$

$$\beta_1 = f(0)(1 - d_1), \quad (3.2)$$

$$\beta_k = \sum_{j=1}^{k-1} c_j + f(1) \sum_{j=1}^{k-1} d_j + f(0) \left(1 - \sum_{j=1}^k d_j\right), \quad k = 2, 3, \dots, n, \quad (3.3)$$

$$\sum_{j=1}^n c_j + (f(1) - f(0)) \sum_{j=1}^n d_j = f(1) - f(0). \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве $C[0, 1]$ оператор подобия G будет сжимающим при выполнении условия

$$|d_k| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

что может быть получено аналогично рассуждениям в лемме 2.1 для пространства $L_\infty[0, 1]$.

Пусть дано разбиение $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$. Если функция f является неподвижной точкой отображения G , то $f(\alpha_k) = G_{k+1}(f(0)) = G_k(f(1))$, $k = 2, 3, \dots, n-1$. Кроме того, $G_1(f(0)) = f(0)$ и $G_n(f(1)) = f(1)$. Отсюда следует, что самоподобная непрерывная функция f удовлетворяет в точках α_k условиям

$$d_1 f(0) + \beta_1 = f(0) \quad \text{в точке } 0 = \alpha_1, \quad (3.5)$$

$$c_k + d_k f(1) + \beta_k = d_{k+1} f(0) + \beta_{k+1} = f(\alpha_k) \quad \text{в точках } \alpha_k, \quad k = 2, 3, \dots, n-1, \quad (3.6)$$

$$c_n + d_n f(1) + \beta_n = f(1) \quad \text{в точке } \alpha_{n-1}. \quad (3.7)$$

Эти соотношения равносильны следующим равенствам:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= f(0)(1 - d_1), \\ \beta_k &= \sum_{j=1}^{k-1} c_j + f(1) \sum_{j=1}^{k-1} d_j + f(0) \left(1 - \sum_{j=1}^k d_k \right), \quad k = 2, 3, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n c_j + (f(1) - f(0)) \sum_{j=1}^n d_j &= f(1) - f(0).\end{aligned}$$

Условия (3.1) и (3.2)–(3.4) являются необходимыми и достаточными условиями, чтобы функция $G(f)$ была непрерывна в точках α_k , если исходная функция f непрерывна. В интервалах (α_{k-1}, α_k) непрерывная функция f под действием сжимающего отображения G перейдет в непрерывную функцию $G(f)$. В результате при выполнении условий (3.1), (3.2) произвольная непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция f перейдет в непрерывную функцию $G(f)$. Таким образом, для произвольной непрерывной начальной функции f_0 последовательность непрерывных функций $f_n = G^{n-1}f_0$ равномерно сходится к неподвижной функции сжимающего отображения и этот предел является непрерывной функцией.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Условия (3.2)–(3.4) являются обобщением условия Барнсли (или перекрестного условия) [2].

Условие (3.1) было получено в [2]. Условия (3.2)–(3.4) не описывались, потому что в этой работе решалась задача интерполяции, а именно, описать все непрерывные аффино-самоподобные функции, графики которых проходят через заданные точки (x_k, y_k) , $k = 1, 2, \dots, n$. Коэффициенты $\{d_k\}$ задаются произвольно, но подчинены условию (3.1). Остальные параметры операторов подобия $\{a_k\}$, $\{c_k\}$, $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, выражаются через координаты узлов интерполяции и коэффициенты $\{d_k\}$. В нашем случае самоподобная функция f проходит через точки (α_k, β_k) . Через параметры самоподобия не выражаются значения $f(0)$ и $f(1)$.

При описании самоподобных вероятностных мер бывает более удобным рассматривать функции, заданные на отрезке $[0, 1]$ и принимающие на концах значения $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. В этом случае условия (3.2)–(3.4) принимают более простой вид:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 0, \\ \beta_k &= \sum_{j=1}^{k-1} (c_j + d_j), \quad k = 2, 3, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n (c_j + d_j) &= 1.\end{aligned}$$

4. Связь самоподобных функций из $L_p[0, 1]$ и самоподобных мер

4.1. Самоподобные меры. Напомним вкратце конструкцию самоподобных мер. Общую конструкцию фрактальных и самоподобных мер можно найти, например, в [1]. Некоторые частные случаи самоподобных сингулярных мер представлены в работе [3]. Ограничимся рассмотрением вероятностных мер.

Пусть $S_k, k = 1, 2, \dots, n$, – семейство сжимающих отображений единичного отрезка $I_0 = [0, 1]$ в себя, удовлетворяющие условию $S_k([0, 1]) = [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$. Пусть также дан набор положительных чисел $\{\rho_k\}_{k=1}^n$, подчиняющихся условию $\sum_{k=1}^n \rho_k = 1$.

Тогда [1] существует и единственная мера μ , заданная уравнением самоподобия

$$\mu = \sum_{k=1}^n \rho_k \mu \circ S_k^{-1}.$$

Такие меры называют *самоподобными*.

С неубывающей непрерывной слева самоподобной функцией f свяжем меру

$$\mu_f([\zeta, \xi)) = f(\xi) - f(\zeta).$$

Естественно возникает вопрос, является ли эта мера самоподобной.

В данной связи интерес представляет вопрос о нахождении условий в терминах параметров самоподобия $\{a_k\}$, $\{c_k\}$, $\{d_k\}$, $\{\beta_k\}$, гарантирующих неубывание самоподобной функции.

Рассмотрим ограниченные самоподобные функции, нормированные условиями $f(0) = 0, f(1) = 1$. В этом случае $\beta_1 = 0$. Также удобно положить $\beta_{n+1} = 1$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Чтобы самоподобная непрерывная слева ограниченная функция f была неубывающей, необходимо, чтобы для всех $k = 1, 2, \dots, n$ выполнялось $c_k + d_k \geq 0$, $\beta_k \leq \beta_{k+1}$, и достаточно, чтобы для всех $k = 1, 2, \dots, n$ выполнялось $c_k \geq 0, d_k \geq 0, \beta_k \leq \beta_{k+1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из самоподобия функции f следует

$$\begin{aligned} f(\alpha_k + 0) &= G_k(f(0)) = c_k \cdot f(0) + \beta_k + d_k \cdot f(0) = \beta_k, \\ f(\alpha_{k+1} + 0) &= G_{k+1}(f(0)) = c_{k+1} \cdot f(0) + \beta_{k+1} + d_k \cdot f(0) = \beta_{k+1}. \end{aligned}$$

Из этих условий вытекает необходимость условий $\beta_k \leq \beta_{k+1}$. С другой стороны, справедливы соотношения

$$f(\alpha_k) = G_{k-1}(f(1)) = c_{k-1} \cdot f(1) + \beta_{k-1} + d_{k-1} \cdot f(1) = c_{k-1} + \beta_{k-1} + d_{k-1} \leq \beta_k,$$

которые приводят к необходимости условий $c_k + d_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$.

Для получения достаточных условий заметим, что при $\beta_{k-1} \leq \beta_k$ выполнено $f(\alpha_{k-1}) \leq f(\alpha_k)$, т.е. функция неубывает “глобально” (в точках разбиения $\{\alpha_k\}$). Установим теперь неубывание функции на интервале (α_k, α_{k+1}) . Очевидно, что функция, являющаяся неподвижной точкой сжимающего отображения, неотрицательна при $c_k \geq 0, d_k \geq 0, \beta_{k-1} \leq \beta_k$. А для произвольной точки $x \in (\alpha_k, \alpha_{k+1})$ выполнено

$$f(x) = c_k \cdot t + d_k \cdot f(t) + \beta_k \geq f(\alpha_k + 0),$$

где $x = \alpha_k \cdot t + \alpha_k$.

Приведем пример, показывающий, что условия $\beta_{k-1} \leq \beta_k, c_k + d_k \geq 0$ не являются достаточными. Рассмотрим функцию с параметрами самоподобия $n = 3, a_1 = a_2 = a_3 = 1/3, c_1 = 0, d_1 = 1/2, \alpha_1 = \beta_1 = 0, c_2 = d > 0, d_2 = -d < 0, \beta_2 = 1/2, c_3 = 0, d_3 = 1/2, \beta_3 = 1/2$, где $0 < d < 1$ – произвольный параметр. Эта функция

является непрерывной, и легко видеть, что все необходимые условия выполнены. Тогда $f(1/3) = 1/2$, а $f(1/3 + 1/9) = d \cdot (1/3) - d \cdot f(1/3) + 1/2 = 1/2 - d/6 < 1/2$.

Рассмотрим неубывающие ограниченные самоподобные функции f , нормированные условиями $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Кроме того, пусть $c_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. В этом случае из теоремы 4.1 следует, что необходимыми и достаточными условиями неубывания функции будут условия $d_k \geq 0$, $\beta_k \leq \beta_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Легко заметить, что мера, построенная по такой самоподобной функции, является самоподобной. При этом роль чисел ρ_k выполняют положительные числа d_k , а отображения $S_k^{-1}: [\alpha_k, \alpha_{k+1}] \rightarrow [0, 1]$ в данном случае действуют по правилу

$$S_k^{-1}(x) = \frac{x - \alpha_k}{a_k}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Рассмотрение неубывающих самоподобных функций с ненулевыми параметрами $\{c_k\}$ приводит к самоподобным мерам с абсолютно-непрерывной частью. Подробное рассмотрение таких мер выходит за рамки данной статьи и является темой дальнейшего исследования.

4.2. Непрерывные самоподобные функции с неограниченной вариацией. Рассмотрим непрерывные самоподобные функции, заданные некоторым набором самоподобия $\{a_k\}$, $\{c_k\}$, $\{d_k\}$, $\{\beta_k\}$ и нормированные условиями $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Изучим только частный случай таких функций, а именно, предположим, что $c_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. В этом случае из условий (3.1)–(3.4) следует, что

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_{k+1} - \beta_k = d_k, \quad \sum_{k=1}^n d_k = 1, \quad \max_{1 \leq k \leq n} \{|d_k|\} < 1.$$

Введем величину $D = \sum_{k=1}^n |d_k|$. Нетрудно видеть, что из условия $\sum_{k=1}^n d_k = 1$ следует, что $D \geq 1$.

ТЕОРЕМА 4.2. Самоподобная непрерывная функция f с параметрами самоподобия $\{a_k\}$, $\{c_k\}$, $\{d_k\}$, $\{\beta_k\}$, удовлетворяющая условиям $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $c_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда $D \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Построим последовательность T_m разбиений отрезка $[0, 1]$. Пусть $T_1 = \{\alpha_k\}_{k=1}^{n+1}$, где $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{n+1} = 1$, – исходное разбиение отрезка, $T_m = \{a_k \cdot x + \alpha_k, x \in T_{m-1}, k = 1, 2, \dots, n\}$. Точки разбиения T_m делят отрезок $[0, 1]$ на n^m подотрезков.

Каждому отрезку, образованному разбиением T_m , сопоставим последовательность чисел $(k_1, k_2, \dots, k_m)$, $k_i = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, m$ (номер отрезка). Отрезку разбиения T_1 соответствует номер k_1 , если границы этого отрезка строятся по правилу

$$x_{k_1} = \alpha_{k_1}, \quad x_{k_1+1} = \alpha_{k_1+1}, \quad k_1 = 1, 2, \dots, n.$$

Отрезку разбиения T_2 соответствует пара k_1, k_2 , если его концы x_{k_2} и x_{k_2+1} построены по правилу

$$x_{k_2} = a_{k_2} x_{k_1} + \alpha_{k_2}, \quad x_{k_2+1} = a_{k_2} x_{k_1+1} + \alpha_{k_2}, \quad k_1, k_2 = 1, 2, \dots, n,$$

где $[x_{k_1}, x_{k_1+1}]$ – отрезок разбиения T_1 с номером k_1 . Далее построение последовательности номеров отрезка проводится по индукции: если каждому отрезку разбиения T_{m-1} соответствует последовательность $(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$, то отрезок разбиения T_m имеет номер $(k_1, k_2, \dots, k_m)$, если его концы x_{k_m} и x_{k_m+1} построены по правилу

$$x_{k_m} = a_{k_m} x_{k_{m-1}} + \alpha_{k_m}, \quad x_{k_m+1} = a_{k_m} x_{k_{m-1}+1} + \alpha_{k_m},$$

где $[x_{k_{m-1}}, x_{k_{m-1}+1}]$ – отрезок с номером $(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$, $k_i = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, m-1$. Нетрудно заметить, что длина отрезка с номером $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ равна $a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_m}$.

Шаг 2. Пусть $f_0(x) = x$ на $[0, 1]$. Последовательность $f_m = G(f_{m-1})$ сходится к предельной самоподобной функции. Докажем, что на отрезке с номером $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ функция f_m линейна и

$$f_m(x) = \frac{d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_m}}{a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_m}} (x - x_{k_m}) + \sum_{j=1}^m \beta_{k_j} \prod_{i=j+1}^m d_{k_i}. \quad (4.1)$$

Очевидно, что по определению действия оператора подобия G на непрерывные функции (2.3) кусочно-линейная функция перейдет в кусочно-линейную же функцию. Пусть $[x_{k_1}, x_{k_1+1}]$ – отрезок разбиения T_1 с номером k_1 . В силу того же свойства (2.3) имеем

$$\begin{aligned} f_1(x_{k_1}) &= d_{k_1} f_0(0) + \beta_{k_1} = \beta_{k_1}, \\ f_1(x_{k_1+1}) &= d_{k_1} f_0(1) + \beta_{k_1} = \beta_{k_1+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, на отрезке разбиения T_1 с номером k_1 функция f_1 линейна и на его концах принимает значения β_{k_1} и β_{k_1+1} , т.е. определяется формулой

$$f_1(x) = \frac{d_{k_1}}{a_{k_1}} (x - x_{k_1}) + \beta_{k_1}.$$

Дальнейшее рассуждение проведем по индукции. Пусть на отрезке разбиения T_m с номером $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ функция f_m имеет вид (4.1). Концы отрезка разбиения T_{m+1} с номером $(k_1, k_2, \dots, k_m, k_{m+1})$ строятся по правилу

$$x_{k_{m+1}} = a_{k_{m+1}} x_{k_m} + \alpha_{k_{m+1}}, \quad x_{k_{m+1}+1} = a_{k_{m+1}} x_{k_m+1} + \alpha_{k_{m+1}},$$

где $[x_{k_m}, x_{k_m+1}]$ – отрезок с номером $(k_1, k_2, \dots, k_m)$. На этом отрезке f_{m+1} кусочно-линейна и на его концах принимает значения

$$\begin{aligned} f_{m+1}(x_{k_{m+1}}) &= d_{k_{m+1}} f_m(x_{k_m}) + \beta_{k_{m+1}} = \sum_{j=1}^m \beta_{k_j} \prod_{i=j+1}^m d_{k_i} + \beta_{k_{m+1}}, \\ f_{m+1}(x_{k_{m+1}+1}) &= d_{k_{m+1}} f_m(x_{k_m+1}) + \beta_{k_{m+1}} \\ &= d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_m} d_{k_{m+1}} + \sum_{j=1}^m \beta_{k_j} \prod_{i=j+1}^m d_{k_i} + \beta_{k_{m+1}}, \end{aligned}$$

откуда и следует справедливость утверждения.

Шаг 3. Заметим, что в точках x_{k_1} разбиения T_1 выполнено

$$f_1(x_{k_1}) = d_{k_1}f_0(0) + \beta_{k_1} = \beta_{k_1}, \quad f(x_{k_1}) = d_{k_1}f(0) + \beta_{k_1}, \quad (4.2)$$

т.е.

$$f_1|_{T_1} = f|_{T_1}.$$

А для точек x_{k_m} разбиения T_m выполнено

$$f_m(x_{k_m}) = d_{k_m}f_{m-1}(x_{k_{m-1}}) + \beta_{k_m}, \quad f(x_{k_m}) = d_{k_m}f(x_{k_{m-1}}) + \beta_{k_m},$$

где x_{k_m} и $x_{k_{m-1}}$ – левые концы отрезков с номерами $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ и $(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ соответственно. Из этих равенств с учетом (4.2) следует, что в точках разбиения T_m выполнены равенства

$$f_m|_{T_m} = f|_{T_m}.$$

Следовательно, вариации функций f и f_m по разбиению T_m совпадают.

Вариация функции f_m по разбиению T_m равна

$$\text{Var}_{T_m} f_m = \sum_{1 \leq k_1, k_2, \dots, k_m \leq n} |d_{k_1} d_{k_2} \cdots d_{k_m}| = D^m,$$

Так как (см. [19; теорема 2, с. 211]) $\text{Var}_{T_m} f \rightarrow \text{Var}_0^1 f$ при $m \rightarrow \infty$, то $\text{Var}_{T_m} f_m \rightarrow \text{Var}_0^1 f$, где $\text{Var}_{T_m} f$ – это вариация функции f по разбиению T_m .

Следовательно,

$$\text{Var}_0^1 f = \lim_{m \rightarrow \infty} D^m.$$

Таким образом, в классе непрерывных самоподобных функций, удовлетворяющих условиям $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$, параметры самоподобия которых подчинены условиям $c_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, ограниченную вариацию имеют только те функции, для которых $D = \sum_{k=1}^n |d_k| = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Для фрактальных кривых, заданных аффинными (не обязательно сжимающими) операторами, условию $D \leq 1$ соответствует условие $\rho_1 \leq 1$ [14].

5. Примеры

1) Характеристическая функция интервала $(\zeta, \xi) \subset [0, 1]$ является самоподобной функцией с параметрами самоподобия $n = 3$, $a_1 = \zeta$, $a_2 = \xi - \zeta$, $a_3 = 1 - \xi$, $c_1 = c_2 = c_3 = d_1 = d_2 = d_3 = \beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = 1$.

2) Кусочно-постоянная функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^n s_k \chi_{[\alpha_k, \alpha_{k+1})}(x),$$

где $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha_{n+1} = 1$ – разбиение отрезка $[0, 1]$, также является самоподобной функцией с параметрами самоподобия $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 0$, $a_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k$, $\beta_k = s_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

3) Рассмотрим двухпараметрическое семейство непрерывных функций $f_{a,\delta}$, где $a \in (0, 1/2)$ и $\delta \in [0, 1/3)$, определяемое параметрами самоподобия $n = 3$, $a_1 = a_2 = a$, $a_3 = 1 - 2a$, $d_1 = d_3 = 1/2 + \delta$, $d_2 = -2\delta$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = d_1 = 1/2 + \delta$, $\beta_3 = d_1 + d_2 = 1 - \delta$. В частности, $f_{1/3,0}$ представляет собой хорошо известную функцию Кантора. Для этих функций $D = \sum_{k=1}^3 |d_k| = 1 + 4\delta$ и при $\delta > 0$ выполнено $D > 1$, т.е. функции имеют неограниченные вариации.

Автор выражает благодарность В. Ю. Протасову за ряд ценных замечаний и полезные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Hutchinson, "Fractals and self-similarity", *Indiana Univ. Math. J.*, **30** (1981), 713–747.
- [2] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Boston, 1988.
- [3] M. Solomyak, E. Verbitsky, "On a spectral problem related to self-similar measures", *Bull. London Math. Soc.*, **27**:3 (1995), 242–248.
- [4] R. S. Strihartz, "Self-similar measures and their Fourier transform, I", *Indiana Univ. Math. J.*, **39**:3 (1990), 797–817.
- [5] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, **1**, Мир, М., 1965.
- [6] G. de Rham, "Un peu de mathématique à propos d'une courbe plane", *Elem. Math.*, **2**:4, 5 (1947), 73–76, 89–97.
- [7] G. de Rham, "Sur une courbe plane", *J. Math. Pures Appl.* (9), **35** (1956), 25–42.
- [8] G. de Rham, "Sur les courbes limitées de polygones obtenus par trisection", *Enseign. Math.* (2), **5** (1959), 29–43.
- [9] A. S. Cavaretta, W. Dahmen, C. A. Micchelli, "Stationary subdivision", *Mem. Amer. Math. Soc.*, **93**:453 (1991).
- [10] Г. А. Дерфель, "Вероятностные методы для одного класса функционально-разностных уравнений", *Укр. матем. журн.*, **41**:10 (1989), 1137–1141.
- [11] П. П. Никитин, "Хаусдорфова размерность гармонической меры на кривой де Рама", *Записки научн. сем. ПОМИ*, **283** (2001), 206–223.
- [12] I. Daubechies, J. Lagarias, "Two scale difference equations. I. Existence and global regularity of solutions", *SIAM J. Math. Anal.*, **22**:5 (1991), 1388–1410.
- [13] I. Daubechies, J. Lagarias, "Two scale difference equations. I. Local regularity, infinite products of matrices and fractals", *SIAM J. Math. Anal.*, **23**:4 (1992), 1031–1079.
- [14] V. Protasov, "Refinement equations with nonnegative coefficients", *J. Fourier Anal. Appl.*, **6**:1 (2000), 55–78.
- [15] В. Ю. Протасов, "Фрактальные кривые и всплески", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:5 (2006), 123–162.
- [16] K.-S. Lau, J. Wang, "Characterization of L_p -solutions for two-scale dilation equations", *SIAM J. Math. Anal.*, **26**:4 (1995), 1018–1046.
- [17] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, *Самоподобные функции в пространстве $L_2[0, 1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным весом*, [arXiv: math.FA/0405410](https://arxiv.org/abs/math.FA/0405410).
- [18] И. С. Кац, М. Г. Крейн., "О спектральных функциях струны", Ф. Аткинсон, *Дискретные и непрерывные граничные задачи*, М., 1968, 648–733.
- [19] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.

И. А. Шейпак

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: iasheip@mech.math.msu.su

Поступило

28.06.2006

Исправленный вариант

29.09.2006