Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Сорокин, О теореме Зудилина–Ривоаля, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 6, 912–923

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3742>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:52:27

УДК 511.3

О теореме Зудилина–Ривоаля

В. Н. Сорокин

Предложен новый способ доказательства теоремы Зудилина–Ривоаля, утверждающей в частности, что последовательность значений бета-функции Дирихле в четных натуральных точках содержит бесконечно много иррациональностей. Применяются аппроксимации Эрмита–Паде первого типа для полилогарифмов, инвариантные относительно группы Клейна. Получены количественные добавления к этой теореме.

Библиография: 15 названий.

1. Первый прорыв в изучении арифметических свойств значений дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1,$$

произошел в 1978 г., когда французский математик Апери [1] доказал иррациональность числа $\zeta(3)$. Напомним, что значения дзета-функции в четных натуральных точках пропорциональны с рациональными коэффициентами соответствующим четным степеням числа π . Тем самым, все эти числа – трансцендентные и линейно независимые над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Следующим существенным продвижением была доказанная в 2000 г. Боллом и Ривоалем [2] теорема о том, что в последовательности чисел

$$\zeta(3), \quad \zeta(5), \quad \zeta(7), \quad \dots$$

есть бесконечно много иррациональных. Различные усиления этого результата принадлежат Зудилину [3] (см. также [4], [5]).

В работах [2], [3] применялись аппроксимации Эрмита–Паде первого типа для полилогарифмов

$$\text{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}, \quad s \geq 1. \quad (1)$$

Такие аппроксимации изучались ранее многими авторами (см., например, [6]–[8]), но в работе [2] было сделано на первый взгляд простое, но по сути глубокое наблюдение, состоящее в необходимости рассматривать аппроксимации, инвариантные

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00565), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1551.2003.1) и фонда INTAS (грант № 03-51-6637).

относительно группы преобразований

$$\mathbb{Z}_2 = \left\langle x \mapsto \frac{1}{x} \right\rangle. \quad (2)$$

Наряду с дзета-функцией не меньший интерес представляет так называемая *бета-функция Дирихле*:

$$\beta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}, \quad s \geq 1.$$

Значения этой функции в нечетных натуральных точках пропорциональны с рациональными коэффициентами соответствующим нечетным степеням числа π . О значениях в четных точках до недавнего времени ничего не было известно. Заметим, что $G = \beta(2)$ – это знаменитая постоянная Каталана.

Недавно Зудилиным и Ривоалем [9] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА ZR. 1. Пусть $a \geq 2$ – четное натуральное число, и пусть $\delta(a)$ обозначает размерность над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ линейного пространства, натянутого на числа

$$1, \quad \beta(2), \quad \beta(4), \quad \dots, \quad \beta(a).$$

Тогда

$$\delta(a) \geq c_0 \log a,$$

где c_0 – эффективная положительная постоянная.

2. По крайней мере одно из семи чисел

$$\beta(2), \quad \beta(4), \quad \beta(6), \quad \beta(8), \quad \beta(10), \quad \beta(12), \quad \beta(14)$$

иррационально.

В работе [9] также использовались аппроксимации Эрмита–Паде, инвариантные относительно группы (2), но построенные не для полилогарифмов (1), а для специальных функций

$$\Phi_s \left(z; \frac{1}{2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1/2)^s}, \quad s \geq 1.$$

В настоящей работе мы покажем, что утверждение 1 теоремы ZR может быть доказано с помощью аппроксимаций полилогарифмов (1), но инвариантных относительно группы Клейна

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \left\langle x \mapsto \pm \frac{1}{x} \right\rangle.$$

Мы также дополним утверждение 2 теоремы ZR одним новым результатом. Будет доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА S. Существует эффективная положительная постоянная b_0 такая, что для любого нечетного натурального числа $b > b_0$ и четного натурального числа

$$a > 100b \log b$$

среди чисел

$$\beta(b+1), \quad \beta(b+3), \quad \beta(b+5), \quad \dots, \quad \beta(b+a-1)$$

есть хотя бы одно иррациональное.

2. Обозначим через

$$\varepsilon(x) = \log \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

главную ветвь натурального логарифма, и

$$\varepsilon_s(x) = \frac{1}{s!} \varepsilon^s(x), \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда

$$f_{s+1}(z) = \operatorname{Li}_{s+1}\left(\frac{1}{z}\right) = \int_0^1 \frac{\varepsilon_s(x)}{z-x} dx, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Зафиксируем четное натуральное число $a \geq 4$ и целые неотрицательные числа n и N так, чтобы

$$2N \leq an + a - 1.$$

Рассмотрим следующую задачу Эрмита–Паде.

ЗАДАЧА НР. Требуется найти набор многочленов

$$A_{n,a}, \quad \dots, \quad A_{n,1} \tag{3}$$

такой, что

- 1) $A_{n,a} \neq 0$;
- 2) степени всех многочленов (3) не превосходят $2n$;
- 3) многочлены (3) четные:

$$A_{n,s}(-x) = A_{n,s}(x), \quad s = 1, \dots, a;$$

- 4) справедливы соотношения

$$A_{n,s}(x) = (-1)^{a-s} x^{2n} A_{n,s}\left(\frac{1}{x}\right), \quad s = 1, \dots, a;$$

- 5) для некоторого многочлена второго рода $A_{n,0}$ выполняется следующее интерполяционное условие в точке $z = \infty$:

$$R_n(z) = A_{n,a}(z)f_a(z) + \dots + A_{n,1}(z)f_1(z) + A_{n,0}(z) = O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty;$$

- 6) выполняется следующее интерполяционное условие в точке $x = 1$:

$$\begin{aligned} \lambda_n(x) &= A_{n,a}(x)\varepsilon_{a-1}(x) + \dots + A_{n,2}(x)\varepsilon_1(x) + A_{n,1}(x) \\ &= O((1-x)^{an+a-1-2N}), \quad x \rightarrow 1. \end{aligned}$$

В дальнейшем нам понадобится *свертка Меллина*

$$(f * g)(x) = \int_x^1 f(\xi)g\left(\frac{x}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi}.$$

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 1. *Решение задачи НР существует и единственно с точностью до нормировки. Решение находится по формуле*

$$R_n(z) = \int_0^1 \frac{\lambda_n(x)}{z-x} dx,$$

где весовая функция $\lambda_n(x)$ определена формулой Родрига

$$\lambda_n(x) = \Lambda_n(x, 1),$$

$$\Lambda_n(p, q) = \frac{1}{N!} \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^N p^N \frac{1}{N!} \left(\frac{\partial}{\partial q} \right)^N q^N \tilde{\Lambda}_n(p, q), \quad (4)$$

$$\tilde{\Lambda}_n(p, q) = q^{2n} \tilde{\lambda}_n \left(\frac{p^2}{q^2} \right);$$

при этом

$$\tilde{\lambda}_n(x) = \underbrace{(1-x)^n * \dots * (1-x)^n}_a. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование и единственность решения вытекают из общих результатов [10] о нормальности аппроксимаций Эрмита–Паде для обобщенных систем Никишина. В нашей ситуации мы имеем четыре неперекрывающихся промежутка (как в системе Анжелеско)

$$(-\infty, -1], \quad [-1, 0], \quad [0, 1], \quad [1, +\infty)$$

и на каждом из них систему Никишина (на $[0, 1]$ это последовательность полилогарифмов $f_1, \dots, f_a$). Свертка (5) представляет собой хорошо известную формулу для аппроксимаций Эрмита–Паде первого типа последовательных степеней логарифма (см. [8], [11]). Впервые такая задача исследовалась и применялась Малером [12]. Написав формулу Родрига (4), мы, очевидно, удовлетворим всем условиям задачи НР. Заметим, что формула Родрига типа (4) применялась нами ранее в [13].

ЛЕММА 2. *Функция $R_n(z)$ имеет следующее разложение в ряд Лорана:*

$$R_n(z) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(t)}{z^t}, \quad (6)$$

где

$$\Phi_n(t) = C_n \frac{\prod_{m=1}^N (t-m) \prod_{m=2n+1}^{2n+N} (t+m)}{\prod_{m=0}^n (t+2m)^a}, \quad (7)$$

$$C_n = (-1)^N \frac{n!^a}{N! N!} 2^{an+a-1}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим преобразование Меллина

$$\Phi_n(t) = \int_0^1 \lambda_n(x) x^{t-1} dx.$$

Тогда $\Phi_n(t)$ – рациональная функция с тем же знаменателем, что в (7). В силу условия 6) задачи [НР](#)

$$\Phi_n(t) = O\left(\frac{1}{t^{an+a-2N}}\right), \quad t \rightarrow \infty,$$

т.е. в числителе стоит многочлен степени $2N$. В силу условия 5) мы знаем N нулей этого многочлена:

$$\Phi_n(1) = \dots = \Phi_n(N) = 0.$$

В силу условия 4) нули $\Phi_n(t)$ симметричны относительно точки $t = -n$. Таким образом, формула (7) доказана с точностью до нормировочного множителя.

Из (4) следует, что

$$\begin{aligned} A_{n,a}(x) &= A_n(x, 1), \\ A_n(p, q) &= \frac{1}{N!} \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^N p^N \frac{1}{N!} \left(\frac{\partial}{\partial q} \right)^N q^N \tilde{A}_n(p, q), \\ \tilde{A}_n(p, q) &= 2^{a-1} q^{2n} \tilde{A}_{n,a} \left(\frac{p^2}{q^2} \right), \end{aligned}$$

где в силу (5) многочлен $\tilde{A}_{n,a}$ равен композиции по Адамару

$$\tilde{A}_{n,a}(x) = \underbrace{(1-x)^n \circ \dots \circ (1-x)^n}_a.$$

Окончательно,

$$A_{n,a}(x) = 2^{a-1} \sum_{l=0}^n \tilde{a}_l x^{2l}, \quad (9)$$

где

$$\tilde{a}_l = (-1)^{al} \binom{n}{l}^a \binom{N+2l}{N} \binom{N+2n-2l}{N}. \quad (10)$$

С другой стороны, коэффициенты многочлена

$$A_{n,a}(x) = \sum_{l=0}^n a_l x^{2l}$$

вычисляются по формуле

$$a_l = \lim_{t \rightarrow -2l} \{(t+2l)^a \Phi_n(t)\}.$$

Откуда следует, что

$$a_l = C_n \frac{(-1)^N}{2^{an}} \frac{N! N!}{n!^a} \tilde{a}_l.$$

Таким образом, получаем (8). Лемма доказана.

Обозначим

$$\omega_M = \text{LCM}\{1, \dots, M\}$$

наименьшее общее кратное первых M натуральных чисел. Зафиксируем натуральное число $r \leq a/2$. В дальнейшем полагаем $N = rn$. Для получения лучших арифметических свойств изменим нормировку решений задачи [НР](#), а именно, введем нормировочный множитель

$$\widehat{C}_n = 2 \frac{N! N!}{n!^r n!^r}.$$

Следствием леммы [2](#) является

ЛЕММА 3. *Следующие многочлены имеют целые рациональные коэффициенты*

$$\widehat{C}_n \omega_n^{a-s} A_{n,s}(x) \in \mathbb{Z}[x], \quad s = 1, \dots, a.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы почти дословно повторяет доказательство соответствующей леммы в работе [\[2\]](#).

СЛЕДСТВИЕ. *Многочлены*

$$\widehat{C}_n \omega_{2n}^a A_{n,0}(x) \in \mathbb{Z}[x] \tag{11}$$

имеют целые рациональные коэффициенты.

Отметим, что оценка [\(11\)](#) довольно грубая. Имеется значительный резерв по улучшению арифметики.

ЛЕММА 4. *Справедливо интегральное представление*

$$R_n(z) = \gamma_n z^{N+1+2n} \int_0^1 \frac{x^N \widehat{\lambda}_n(x) dx}{(z-x)^{2N+2n+2}}, \tag{12}$$

где

$$\gamma_n = (-1)^N \frac{(2N+2n+1)!}{N! N! (2n)!},$$

и

$$\widehat{\lambda}_n(x) = \widetilde{\lambda}_n(x^2) * (1-x)^{2n},$$

при этом, линейная форма от степеней логарифма $\widetilde{\lambda}_n(x)$ определена формулой [\(5\)](#).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [\(6\)](#) имеем

$$R_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_k}{z^{N+1+k}}, \quad R_k = \Phi_n(N+1+k).$$

Используя [\(7\)](#), получим

$$\begin{aligned} R_k &= C_n \frac{(N+k)! (2N+1+k+2n)!}{k!} \frac{\Gamma((N+1+k)/2)}{(N+1+k+2n)! \left\{ 2^{n+1} \Gamma((N+1+k)/2 + n+1) \right\}^a} \\ &= \gamma_n (-1)^k \binom{-2N-2n-2}{k} \frac{1}{2} B(2n+1, N+1+k) \left\{ B\left(n+1, \frac{N+1+k}{2}\right) \right\}^a. \end{aligned}$$

С другой стороны, вычислим преобразование Меллина

$$\widehat{\Phi}_n(t) = \int_0^1 \widehat{\lambda}_n(x) x^{t-1} dx = \int_0^1 \widetilde{\lambda}(x^2) x^{t-1} dx \cdot \int_0^1 (1-x)^{2n} x^{t-1} dx. \quad (13)$$

Первый интеграл в правой части равенства (13) равен

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \widetilde{\lambda}_n(x) x^{t/2-1} dx = \frac{1}{2} \left\{ B\left(n+1, \frac{t}{2}\right) \right\}^a.$$

Второй интеграл равен $B(2n+1, t)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} R_n(z) &= \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{N+1+k}} (-1)^k \binom{-2N-2n-2}{k} \int_0^1 \widehat{\lambda}_n(x) x^{N+k} dx \\ &= \frac{\gamma_n}{z^{N+1}} \int_0^1 x^N \widehat{\lambda}_n(x) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2N-2n-2}{k} \left(-\frac{x}{z}\right)^k \right\} dx \\ &= \gamma_n z^{N+1+2n} \int_0^1 \frac{x^N \widehat{\lambda}_n(x) dx}{(z-x)^{2N+2n+2}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Справедливо неравенство*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |R_n(i)|^{1/n} \leq \frac{(2r+2)^{2r+2}}{r^r(r+2)^{r+2}} \left\{ \frac{(r/2)^{r/2}}{(1+r/2)^{1+r/2}} \right\}^a. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из (12) следует, что

$$|R_n(i)| \leq |\gamma_n| \cdot \int_0^1 x^N \widehat{\lambda}_n(x) dx. \quad (15)$$

Мы воспользовались тем, что функция $\widehat{\lambda}_n(x)$ положительна на интервале $(0, 1)$. Интеграл в (15) равен $\widehat{\Phi}_n(N+1)$. Применяя формулу Стирлинга, получим (14).

ЛЕММА 6. *Для всех $s = 0, \dots, a$ выполняются неравенства*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_{n,s}(i)|^{1/n} \leq 2^{a+2r+2}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале рассмотрим многочлены $A_{n,a}$. В силу (9) и (10)

$$|A_{n,a}(i)| \leq 2^{a-1} \sum_{l=0}^n |\widetilde{a}_l|,$$

где

$$|\widetilde{a}_l| = \binom{n}{l}^a \binom{N+2l}{N} \binom{N+2n-2l}{N} \leq 2^{an} \cdot 2^{N+2l} \cdot 2^{N+2n-2l}.$$

Откуда и следует неравенство (16) при $s = a$. По свойствам систем Никишина для всех многочленов $A_{n,s}$ имеем ту же оценку. Лемма доказана.

3. Докажем утверждение 1 теоремы [ZR](#).

Пусть n – четное число. Тогда по свойствам 3) и 4) задачи [HP](#) все числа $A_{n,s}(i)$ вещественны, когда $s = 1, \dots, a$, и равны нулю для нечетных s .

Далее,

$$f_s(i) = 2^{-s}(2^{1-s} - 1)\zeta(s) - i\beta(s), \quad s = 2, 3, \dots,$$

и

$$f_1(i) = -\frac{1}{2} \log 2 - \frac{\pi i}{4}.$$

Рассмотрим величину

$$L_n = -\widehat{C}_n \omega_{2n}^a \operatorname{Im} R_n(i).$$

Тогда

$$L_n = p_{n,0} + p_{n,2}\beta(2) + \dots + p_{n,a}\beta(a)$$

– линейная форма с целыми рациональными коэффициентами от чисел

$$1, \quad \beta(2), \quad \beta(4), \quad \beta(6), \quad \dots, \quad \beta(a). \quad (17)$$

Обозначим

$$\|L_n\| = \max\{|p_{n,0}|, |p_{n,2}|, \dots, |p_{n,a}|\}.$$

По лемме [6](#)

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|L_n\|^{1/n} \leq \beta = 2^{a+2r+2} \cdot r^{2r} \cdot e^{2a}.$$

По лемме [5](#)

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |L_n|^{1/n} &\leq e^{2a} \cdot r^{2r} \cdot \frac{(2r+2)^{2r+2}}{r^r(r+2)^{r+2}} \left\{ \frac{(r/2)^{r/2}}{(1+r/2)^{1+r/2}} \right\}^a \\ &\leq r^r 2^{2r+2} (r+1)^r \left\{ \frac{e^2}{1+r/2} \right\}^a, \end{aligned}$$

или

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |L_n|^{1/n} \leq \alpha = 2^{3r+2} r^{2r} \left(\frac{16}{r} \right)^a.$$

Более того, из интегрального представления [\(12\)](#) и из метода перевала следует, что для величин $R_n(i)$ имеет место сильная асимптотика вида

$$R_n(i) = B \cdot A^n \cdot (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

причем A и B – алгебраические числа. Тогда из теоремы Гельфонда об оценке линейных форм с двумя логарифмами [\[14\]](#) следует, что имеет место слабая асимптотика не только для величин $R_n(i)$, но и для их мнимых частей, т.е. существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |L_n|^{1/n} = \psi \leq \alpha.$$

Таким образом, мы можем применить лемму Нестеренко [\[15\]](#). А именно, возьмем

$$r = \left\lceil \frac{a}{\log^2 a} \right\rceil.$$

Тогда, при $a \rightarrow \infty$ имеем

$$\log \beta = a(2 + \log 2)(1 + o(1)),$$

$$\log \alpha = -a \log a(1 + o(1)).$$

Следовательно, размерность над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ линейного пространства, натянутого на числа (17), будет не меньше, чем

$$\delta(a) \geq 1 - \frac{\log \alpha}{\log \beta} = \frac{1 + o(1)}{2 + \log 2} \log a,$$

что и требовалось доказать.

4. Рассмотрим следующее обобщение задачи [НР](#).

Пусть по-прежнему $a \geq 4$ – четное натуральное число. Зафиксируем также нечетное натуральное число b . Пусть n и N – целые неотрицательные числа такие, что $2bN \leq an + a - 1$. Более того, сразу будем предполагать, что $N = rn$, где r – натуральное число. Тем самым, $2br \leq a$.

Задача НР_b . Требуется найти набор многочленов

$$A_{n,a}, \quad \dots, \quad A_{n,1} \tag{18}$$

такой, что

- 1) $A_{n,a} \not\equiv 0$;
- 2) степени всех многочленов (18) не превосходят $2n$;
- 3) многочлены (18) четные;
- 4) справедливы соотношения

$$A_{n,s}(x) = (-1)^{a-s} x^{2n} A_{n,s}\left(\frac{1}{x}\right), \quad s = 1, \dots, a;$$

- 5) для некоторых многочленов второго рода

$$B_{n,1}, \quad \dots, \quad B_{n,b}$$

выполняются следующие интерполяционные условия в точке $z = \infty$:

$$R_{n,u}(z) = \sum_{s=1}^a \binom{s+u-2}{u-1} A_{n,s}(z) f_{s+u-1}(z) + B_{n,u}(z) = O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

для всех $u = 1, \dots, b$;

- 6) выполняется следующее интерполяционное условие в точке $x = 1$:

$$\lambda_n(x) = \sum_{s=1}^a A_{n,s}(x) \varepsilon_{s-1}(x) = O((1-x)^{a(n+1)-1-2bN}), \quad x \rightarrow 1.$$

Аналогично случаю $b = 1$ для решений задачи НР_b получаем следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Решение задачи НР_b существует и единственно с точностью до нормировки. Решение находится по формуле*

$$R_{n,u}(z) = \int_0^1 \frac{\lambda_n(x)}{z-x} \varepsilon_{u-1}(x) dx, \quad u = 1, \dots, b,$$

где весовая функция $\lambda_n(x)$ определена формулой Родрига:

$$\begin{aligned} \lambda_n(x) &= \Lambda_n(x, 1), \\ \Lambda_n(p, q) &= \left\{ \frac{1}{N!} \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^N p^N \frac{1}{N!} \left(\frac{\partial}{\partial q} \right)^N q^N \right\}^b \tilde{\Lambda}_n(p, q), \\ \tilde{\Lambda}_n(p, q) &= q^{2n} \tilde{\lambda}_n \left(\frac{p^2}{q^2} \right), \end{aligned}$$

при этом

$$\tilde{\lambda}_n(x) = \tilde{\lambda}_n^{(a)}(x) = \underbrace{(1-x)^n * \dots * (1-x)^n}_a.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Преобразование Меллина весовой функции*

$$\Phi_n(t) = \int_0^1 \lambda_n(x) x^{t-1} dx$$

вычисляется по формуле

$$\Phi_n(t) = C_n \frac{\left\{ \prod_{m=1}^N (t-m) \prod_{m=2n+1}^{2n+N} (t+m) \right\}^b}{\left\{ \prod_{m=0}^n (t+2m) \right\}^a},$$

где

$$C_n = (-1)^{bN} 2^{a(n+1)-1} \frac{n!^a}{N!^b N!^b}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Следующие многочлены имеют целые рациональные коэффициенты*

$$\widehat{C}_n^b \omega_n^{a-s} A_{n,s}(x) \in \mathbb{Z}[x], \quad s = 1, \dots, a,$$

а также

$$\widehat{C}_n^b \omega_{2n}^{a+u-1} B_{n,u}(x) \in \mathbb{Z}[x], \quad u = 1, \dots, b.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Справедливо интегральное представление*

$$R_{n,1}(z) = \frac{\gamma_n}{z^{N+1}} \int_0^1 K_{n,b} \left(\frac{x}{z} \right) x^N \widehat{\lambda}_n(x) dx,$$

где ядро $K_{n,b}(x)$ есть следующая композиция по Адамару:

$$K_{n,b}(x) = \underbrace{K_n(x) \circ \dots \circ K_n(x)}_b; \quad (19)$$

при этом

$$K_n(x) = \frac{1}{(1-x)^{2N+2n+2}};$$

далее,

$$\hat{\lambda}_n(x) = \tilde{\lambda}_n^{(a)}(x^2) * \tilde{\lambda}_{2n}^{(b)}(x),$$

а постоянная γ_n определена следующей формулой:

$$\gamma_n = (-1)^{bN} \left\{ \frac{(2N+2n+1)!}{N!N!(2n)!} \right\}^b.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Для всех $u = 1, \dots, b$ имеют место оценки

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |R_{n,u}(i)|^{1/n} \leq \left\{ \frac{(2b(r+1))^{2r+2}}{r^r(r+2)^{r+2}} \right\}^b \left\{ \frac{(r/2)^{r/2}}{(1+r/2)^{1+r/2}} \right\}^a.$$

Поясним доказательство утверждения 5. Достаточно рассмотреть функцию $R_{n,1}$. Обозначим $M = 2N + 2n + 2$. Из (19) методом перевала получим

$$\lim_{M \rightarrow \infty} |K_{n,b}(x)|^{1/M} = \frac{1}{|1 - \sqrt[b]{x}|^b},$$

при этом, в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ берется главная ветвь корня. Далее,

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \frac{1}{|1 - \sqrt[b]{x/i}|} = \frac{1}{\min_{0 \leq x \leq 1} |1 - \sqrt[b]{x/i}|} = \frac{1}{\sin \pi/(2b)} \leq \frac{1}{1/b} = b.$$

В остальном оценки такие же, как в лемме 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ S. Рассмотрим величину

$$L_n = -\hat{C}_n^b \omega_{2n}^{a+b-1} \operatorname{Im} R_{n,b}(i).$$

Тогда, L_n – линейная форма с целыми рациональными коэффициентами от чисел

$$1, \quad \beta(b+1), \quad \beta(b+3), \quad \dots, \quad \beta(b+a-1),$$

причем $L_n \neq 0$. Имеем оценку

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |L_n|^{1/n} &\leq r^{2br} e^{2(a+b-1)} \left\{ \frac{(2b(r+1))^{2r+2}}{r^r(r+2)^{r+2}} \right\}^b \left\{ \frac{(r/2)^{r/2}}{(1+r/2)^{1+r/2}} \right\}^a \\ &\leq (r^{2r} b^{2r+2} 2^{3r+5})^b \left(\frac{16}{r} \right)^a. \end{aligned} \quad (20)$$

Правая часть неравенства (20) будет меньше единицы для $a > a_0$, где

$$a_0 = \frac{b \log(r^{2r} b^{2r+2} 2^{3r+5})}{\log(16/r)}.$$

Возьмем $r = 48$. Тогда, для всех достаточно больших b выполняется неравенство

$$a_0 < 100b \log b,$$

что и доказывает теорему S.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Вадиму Зудилину за интересное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Apéry, “Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ ”, *Journées Arithmétiques de Luminy*, Colloque International du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) (Centre Universitaire de Luminy, Luminy, June 20–24, 1978), *Astérisque*, **61**, 1979, 11–13.
- [2] K. M. Ball, T. Rivoal, “Irrationalité d’une infinité de valeurs de la fonction zeta aux entiers impairs”, *Invent. Math.*, **146**:1 (2001), 193–207.
- [3] В. В. Зудилин, “Одно из чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ иррационально”, *УМН*, **56**:4 (2001), 149–150.
- [4] S. Fischler, “Irrationalité de valeurs de zeta (d’après Apéry, Rivoal, ...)”, *Bourbaki Seminar*, Exp. 910, *Astérisque*, **294**, 27–62.
- [5] В. В. Зудилин, “Об иррациональности значений дзета-функции Римана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:3 (2002), 49–102.
- [6] G. V. Chudnovsky, “Padé approximations to the generalized hypergeometric functions. I”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **58**:4 (1979), 445–476.
- [7] Е. М. Никишин, “Об иррациональности значений функции $F(x, s)$ ”, *Матем. сб.*, **109 (151)**:3 (1979), 410–417.
- [8] В. Н. Сорокин, “Аппроксимации Эрмита–Паде полилогарифмов”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 1994, № 5, 49–59.
- [9] T. Rivoal, W. Zudilin, “Diophantine properties of numbers related to Catalan’s constant”, *Math. Ann.*, **326**:4 (2003), 705–721.
- [10] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, “Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа”, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 33–58.
- [11] В. Н. Сорокин, “Аппроксимации Эрмита–Паде последовательных степеней логарифма и их арифметические приложения”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 1991, № 11, 66–74.
- [12] K. Mahler, “Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. I”, *J. Reine Angew. Math.*, **166** (1932), 118–136; “Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. II”, *J. Reine Angew. Math.*, **166** (1932), 137–150.
- [13] В. Н. Сорокин, “О совместных двухточечных аппроксимациях Паде марковских функций”, *Укр. матем. журн.*, **43**:6 (1991), 837–841.
- [14] Н. И. Фельдман, *Седьмая проблема Гильберта*, Изд-во МГУ, М., 1982.
- [15] Ю. В. Нестеренко, “О линейной независимости чисел”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1984, № 1, 46–49.

В. Н. Сорокин

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

27.12.2004