Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, Случайные A -подстановки: сходимость к пуассоновскому процессу, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 6, 939–947

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3744>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:11:39

Случайные A -подстановки: сходимости к пуассоновскому процессу

А. Л. Якимив

Пусть S_n – симметрическая группа подстановок степени n , A – некоторое подмножество множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ и $T_n = T_n(A)$ – совокупность всех подстановок из S_n , длины циклов которых принадлежат множеству A . Подстановки из T_n принято называть A -подстановками. Рассматривается широкий класс множеств A положительной асимптотической плотности. Пусть ζ_{mn} – число циклов длины m случайной подстановки, равномерно распределенной на T_n . В статье показано, что конечномерные распределения случайного процесса $\{\zeta_{mn}, m \in A\}$ слабо сходятся при $n \rightarrow \infty$ к конечномерным распределениям пуассоновского процесса на A .

Библиография: 18 названий.

1. Введение. Пусть A – произвольное непустое подмножество множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. A -подстановками называются подстановки, длины циклов которых принадлежат множеству A (см. книгу Сачкова [1]). Пусть $T_n = T_n(A)$ есть множество A -подстановок степени n и c_n – случайная подстановка, равномерно распределенная на T_n . Через ζ_{mn} обозначим число циклов подстановки c_n , имеющих длину $m \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\zeta_{mn} = 0$ при $m \notin A$. Далее, пусть ζ_n – общее число циклов случайной подстановки c_n , т.е.

$$\zeta_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} \zeta_{mn}.$$

Случайные A -подстановки являются объектом пристального внимания ряда авторов на протяжении последних тридцати с лишним лет. Обзор по этой тематике содержится в статье автора [2]. Одними из первых работ в этом направлении были статьи Бендера [3] (1974 г.), Болотникова, Сачкова и Тараканова [4] (1976 г.), Минеева и Павлова [5], [6] (1976 г.). Еще раньше Сачковым в работах [7], [8] (1972, 1973 гг.) были рассмотрены более общие объекты – случайные отображения с ограничениями на длины циклов. При этом для тех или иных классов множеств A изучались задачи асимптотического поведения при $n \rightarrow \infty$ числа элементов множества $T_n(A)$ и предельного поведения (в слабом смысле) случайных величин ζ_{mn} и ζ_n , где m – фиксированный элемент множества A .

Работа написана при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00583) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-4129.2006.1).

Отметим также, что множество решений уравнения $x^d = e$ в симметрической группе S_n всех подстановок степени n (e – тождественная подстановка) представляет собой множество A -подстановок при $A = \{d_0, \dots, d_r\}$, где $1 = d_0 < d_1 < \dots < d_r = d$ – различные делители числа d . В книге Колчина [9] имеется специальная глава, в которой изучаются асимптотические свойства решений уравнений, содержащих неизвестную подстановку.

В настоящей заметке предлагается дальнейшее исследование асимптотических свойств случайных A -подстановок. А именно, изучается предельное поведение при $n \rightarrow \infty$ случайного процесса $\{\zeta_{mn}, m \in A\}$. При этом показано, что для широкого класса множеств A этот процесс слабо сходится к пуассоновскому процессу¹ на A , т.е. к последовательности $\{\eta_m, m \in A\}$ независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона.

2. Основной результат. Пусть $\{\eta_m, m \in A\}$ – последовательность независимых пуассоновских случайных величин с $M\eta_m = 1/m$, $m \in A$. Мы будем предполагать, что выполнено следующее соотношение:

$$p(n) \equiv \frac{|T_n(A)|}{n!} = n^{\sigma-1} L(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где функция $L(n)$ медленно меняется на бесконечности [11], а $\sigma \in (0, 1]$ (здесь и далее $|X|$ обозначает число элементов конечного множества X). В работе автора [2] приводится ряд примеров классов множеств A , для которых имеет место соотношение (1). Основным результатом настоящей заметки является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть множество A таково, что для него выполнено соотношение (1). Тогда конечномерные распределения случайного процесса $\{\zeta_{mn}, m \in A\}$ слабо сходятся при $n \rightarrow \infty$ к конечномерным распределениям пуассоновского процесса на A $\{\eta_m, m \in A\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае, когда $A = \mathbb{N}$, т.е. когда рассматривается равномерное распределение на симметрической группе S_n всех подстановок степени n , соответствующий результат получен Колчиным в 1971 г. (см. [12] и [13]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В статье [14] показано, что если при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{|k : k \leq n, k \in A|}{n} \rightarrow \sigma > 0 \quad (2)$$

и для произвольной постоянной $C > 1$

$$\frac{|k : k \leq n, k \in A, m - k \in A|}{n} \rightarrow \sigma^2 \quad (3)$$

равномерно по $m \in [n, Cn]$, то для любых неотрицательных целых a и $m \in A$

$$P\{\zeta_{mn} = a\} \rightarrow \exp\left(\frac{-1}{m}\right) \frac{m^{-a}}{a!}, \quad n \rightarrow \infty;$$

при этом из соотношений (2) и (3) следует (1). Таким образом, теорему 1 можно рассматривать как обобщение и уточнение упомянутого результата из [14].

¹Определение пуассоновского процесса на общем фазовом пространстве дано в энциклопедии [10; с. 525] в статье “Пуассоновский точечный процесс”.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если выполнено (1), то имеет место (2). Обратное неверно. Например, когда A – множество четных чисел, то $p(n) = 0$ для нечетных n .

Отметим, что исходной для всех упомянутых исследований явилась работа 1944 г. Гончарова [15], где, в частности, впервые была получена пуассоновская предельная теорема для случайных величин ζ_{mn} (при $A = \mathbb{N}$).

Сейчас, спустя более 60 лет с момента публикации упомянутой работы Гончарова, в случае $A = \mathbb{N}$ известно гораздо больше. А именно, в работах Аппатия и Таваре [16], [17] показано, что для расстояния по вариации d_{TV} (the total variance distance) и произвольной последовательности $b = o(n)$, $n \rightarrow \infty$,

$$d_{TV}(\mathfrak{L}(\zeta_{mn}, m \in A(b)), \mathfrak{L}(\eta_m, m \in A(b))) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

(здесь $A(b) = A \cap [1, b]$ и $\mathfrak{L}$ обозначает распределение соответствующих случайных величин). Напомним, что *расстояние по вариации* между двумя случайными векторами X и Y , принимающими значения из $\mathbb{Z}_+^k = \{(x_1, \dots, x_k), x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \forall i = 1, \dots, k\}$ есть

$$d_{TV}(\mathfrak{L}(X), \mathfrak{L}(Y)) = \sup_{B \subseteq \mathbb{Z}_+^k} |\mathbb{P}\{X \in B\} - \mathbb{P}\{Y \in B\}|.$$

Сформулируем одно следствие из теоремы 1. Расположим длины циклов случайной подстановки c_n в возрастающем порядке:

$$l_n(1) \leq l_n(2) \leq \dots \leq l_n(\zeta_n). \quad (4)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для произвольных $m, r \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\{l_n(m) \leq r\} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda_r^k e^{-\lambda_r}}{k!} + o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$\lambda_r = \begin{cases} \sum_{k \in A(r)} 1/k, & \text{если } A(r) = A \cap [1, r], \\ 0, & \text{если } A(r) = \emptyset. \end{cases}$$

Действительно,

$$\mathbb{P}\{l_n(m) \leq r\} = \mathbb{P}\left\{ \sum_{k \in A(r)} \zeta_{kn} \geq m \right\},$$

и для доказательства следствия 1 нам остается воспользоваться теоремой 1.

Предельные теоремы для крайних правых членов вариационного ряда (4) получены в работе автора [2]. Отметим также, что в книге Колчина [13] в случае $A = \mathbb{N}$ приводится предельная теорема и для средних членов этого ряда, имеющих номера $m = \alpha \ln n + o(\sqrt{\ln n})$, где $\alpha \in (0, 1)$ фиксировано (в этом случае $(\zeta_n - \ln n)/\sqrt{\ln n}$ слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к стандартному нормальному распределению, стало быть, члены с такими номерами m действительно являются средними).

3. Доказательство теоремы 1. Доказательство этой теоремы при помощи подхода, использованного в [14], слишком громоздко. Более просто и более прозрачно оно проводится при помощи подхода, опирающегося на следующую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$ таково, что $n \geq \min A$. Тогда для произвольных неотрицательных целых чисел $a_1, \dots, a_n$ имеет место равенство

$$\mathbb{P}\{\zeta_{in} = a_i \ \forall i \in A(n)\} = \mathbb{P}\left\{\eta_i = a_i \ \forall i \in A(n) \mid \sum_{i \in A(n)} i\eta_i = n\right\}. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае, когда $A = \mathbb{N}$, аналогичное утверждение получено в статье Шеппа и Ллойда [18].

Введем при целых $0 \leq l \leq m$ случайные величины

$$\theta_{lm} = \sum_{i \in (l, m] \cap A} i\eta_i \quad (6)$$

(мы полагаем $\theta_{lm} = 0$ при $(l, m] \cap A = \emptyset$). Докажем сначала лемму 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\eta_i = a_i \ \forall i \in A(n) \mid \sum_{i \in A(n)} i\eta_i = n\right\} &= \mathbb{P}\{\eta_i = a_i \ \forall i \in A(n) \mid \theta_{0n} = n\} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{\eta_i = a_i \ \forall i \in A(n), \sum_{i \in A(n)} i\eta_i = n\}}{\mathbb{P}\{\theta_{0n} = n\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{\eta_i = a_i \ \forall i \in A(n), \sum_{i \in A(n)} ia_i = n\}}{\mathbb{P}\{\theta_{0n} = n\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{\eta_i = a_i \ \forall i \in A(n)\} \chi\{\sum_{i \in A(n)} ia_i = n\}}{\mathbb{P}\{\theta_{0n} = n\}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\chi(\cdot)$ – индикатор. Далее, при $s \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} M_s^{\theta_{0n}} &= \exp\left(-\sum_{i \in A(n)} \frac{1-s^i}{i}\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{i \in A(n)} \frac{1}{i}\right) \exp\left(\sum_{i \in A(n)} \frac{s^i}{i}\right) = \exp(-l(n)) \exp\left(\sum_{i \in A(n)} \frac{s^i}{i}\right), \end{aligned}$$

где

$$l(n) = \sum_{i \in A(n)} \frac{1}{i}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P\{\theta_{0n} = n\} &= e^{-l(n)} \text{coef}_{s^n} \exp\left(\sum_{i \in A(n)} \frac{s^i}{i}\right) \\ &= e^{-l(n)} \text{coef}_{s^n} \exp\left(\sum_{i \in A} \frac{s^i}{i}\right) = e^{-l(n)} \frac{|T_n|}{n!}, \end{aligned} \quad (8)$$

так как для произвольного $s \in (0, 1]$

$$u(s) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} s^i \frac{|T_i|}{i!} = \exp\left(\sum_{i \in A} \frac{s^i}{i}\right) \quad (9)$$

(см. книгу Сачкова [1; формула (0.12)]).

Согласно (7) и (8) для произвольных чисел $s_i \in (0, 1]$, $i \in \mathbb{N}$, и $t \in (0, 1)$ мы имеем

$$\begin{aligned} f(t, s_1, s_2, \dots) &\equiv \sum_{n \geq 0} \frac{|T_n|}{n!} t^n \mathbb{M}\left\{\prod_{i \in A(n)} s_i^{\eta_i} \mid \theta_{0n} = n\right\} \\ &= \sum_{n \geq 0} t^n e^{l(n)} \sum_{a_i \geq 0, i \in A(n)} \prod_{i \in A(n)} e^{-1/i} \frac{i^{-a_i}}{a_i!} \chi\left\{\sum_{i \in A(n)} i a_i = n\right\} s_i^{a_i} \\ &= \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{a_i \geq 0, i \in A(n)} \chi\left\{\sum_{i \in A(n)} i a_i = n\right\} \prod_{i \in A(n)} \frac{i^{-a_i}}{a_i!} s_i^{a_i} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{a_i \geq 0, i \in A} \chi\left\{\sum_{i \in A} i a_i = n\right\} \prod_{i \in A} \left(\frac{t^i s_i}{i}\right)^{a_i} \cdot \frac{1}{a_i!}. \end{aligned} \quad (10)$$

Поменяв в последнем выражении порядок суммирования, получаем, что

$$f(t, s_1, s_2, \dots) = \sum_{a_i \geq 0, i \in A} \prod_{i \in A} \left(\frac{t^i s_i}{i}\right)^{a_i} \cdot \frac{1}{a_i!} \sum_{n \geq 0} \chi\left\{\sum_{i \in A} i a_i = n\right\}.$$

Поскольку

$$\sum_{n \geq 0} \chi\left\{\sum_{i \in A} i a_i = n\right\} = \chi\left\{\sum_{i \in A} i a_i < \infty\right\}$$

и при $\sum_{i \in A} i a_i = \infty$

$$\prod_{i \in A} \left(\frac{t^i s_i}{i}\right)^{a_i} \cdot \frac{1}{a_i!} = 0,$$

то

$$\begin{aligned} f(t, s_1, s_2, \dots) &= \sum_{a_i \geq 0, i \in A} \prod_{i \in A} \left(\frac{t^i s_i}{i}\right)^{a_i} \cdot \frac{1}{a_i!} \\ &= \prod_{i \in A} \sum_{a_i \geq 0} \left(\frac{t^i s_i}{i}\right)^{a_i} \cdot \frac{1}{a_i!} = \prod_{i \in A} \exp\left(\frac{t^i s_i}{i}\right) = \exp\left(\sum_{i \in A} \frac{t^i s_i}{i}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Однако согласно формуле (0.14) из книги Сачкова [1],

$$\sum_{n \geq 0} \frac{|T_n|}{n!} t^n M \prod_{i=1}^n s_i^{\zeta_{in}} = \exp \left(u(t) + \sum_{i \in A} (s_i - 1) \frac{t^i}{i} \right) = \exp \left(\sum_{i \in A} \frac{t^i s_i}{i} \right), \quad (12)$$

где функция $u(\cdot)$ задана формулой (9). Сравнивая (11) и (12), получаем равенство (5). Лемма 1 доказана.

Анализируя последовательность равенств (10), легко приходим к такому следствию.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $|T_n| \neq 0$. Тогда для произвольных неотрицательных целых чисел a_i , $i \in A(n)$, выполнено

$$P\{\zeta_{in} = a_i \ \forall i \in A(n)\} = \frac{n!}{|T_n|} \prod_{i \in A(n)} \frac{i^{-a_i}}{a_i!} \chi \left\{ \sum_{i \in A(n)} i a_i = n \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Зафиксируем некоторое $b \in A$ и неотрицательные целые числа a_m , $m \in A(b)$, такие, что

$$a \equiv \sum_{m \in A(b)} m a_m \leq n.$$

Согласно лемме 1 и равенству (6) мы имеем

$$\begin{aligned} P\{\zeta_{mn} = a_m \ \forall m \in A(b)\} &= P\{\eta_m = a_m \ \forall m \in A(b) \mid \theta_{0n} = n\} \\ &= \frac{P\{\eta_m = a_m \ \forall m \in A(b), \sum_{m \in A(b)} m \eta_m = n\}}{P\{\theta_{0n} = n\}} \\ &= \frac{P\{\eta_m = a_m \ \forall m \in A(b), \theta_{bn} = n - a\}}{P\{\theta_{0n} = n\}} \\ &= \frac{P\{\eta_m = a_m \ \forall m \in A(b)\} P\{\theta_{bn} = n - a\}}{P\{\theta_{0n} = n\}}. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу (13) для доказательства теоремы 1 нам достаточно показать, что

$$\frac{P\{\theta_{bn} = n - a\}}{P\{\theta_{0n} = n\}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Для произвольного $s \in (0, 1)$ мы имеем

$$M s^{\theta_{bn}} = \exp \left(- \sum_{i \in A(b, n)} \frac{1}{i} \right) \exp \left(\sum_{i \in A(b, n)} \frac{s^i}{i} \right),$$

где $A(b, n) = A \cap (b, n]$. Поэтому

$$\begin{aligned} P\{\theta_{bn} = n - a\} &= \exp \left(- \sum_{i \in A(b, n)} \frac{1}{i} \right) \text{coef}_{s^{n-a}} \exp \left(\sum_{i \in A(b, n)} \frac{s^i}{i} \right) \\ &= P\{\theta_{bn} = n - a\} = \exp \left(- \sum_{i \in A(b, n)} \frac{1}{i} \right) \text{coef}_{s^{n-a}} \exp \left(\sum_{i \in A_b} \frac{s^i}{i} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где $A_b = (b, \infty) \cap A$. Согласно соотношениям (8), (14) и (15) для доказательства теоремы 1 нам достаточно показать, что

$$\exp\left(\sum_{i \in A(b)} \frac{1}{i}\right) \frac{n!}{|T_n|} \text{coef}_{s^{n-a}} \exp\left(\sum_{i \in A_b} \frac{s^i}{i}\right) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

или же, что

$$\text{coef}_{s^{n-a}} \exp(u(s))g(s) \sim p(n) \exp\left(-\sum_{i \in A(b)} 1/i\right) \quad (16)$$

при $n \rightarrow \infty$, где функция $u(s)$ задана формулой (3), $p(n) = |T_n|/n!$, а

$$g(s) = \exp\left(-\sum_{i \in A(b)} \frac{s^i}{i}\right). \quad (17)$$

Согласно формуле (9) при $m = n - a$

$$\begin{aligned} I_n &\equiv \text{coef}_{s^{n-a}} \exp(u(s))g(s) = \sum_{k=0}^m \text{coef}_{s^k} g(s) \cdot \text{coef}_{s^{m-k}} \exp(u(s)) \\ &= \sum_{k=0}^m p(m-k) \cdot \text{coef}_{s^k} g(s) = \sum_{k=0}^m p(m-k)q(k), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$q(k) = \text{coef}_{s^k} g(s). \quad (19)$$

Из (18) следует, что

$$I_n = \sum_{k=0}^{[\sqrt{n}]} p(m-k)q(k) + \sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^m p(m-k)q(k) = I_{1n} + I_{2n}. \quad (20)$$

Для I_{1n} согласно (1), (17) и (19) мы получаем

$$\begin{aligned} I_{1n} &= \sum_{k=0}^{[\sqrt{n}]} p(n-a-k)q(k) \\ &= (1+o(1))p(n) \sum_{k=0}^{[\sqrt{n}]} q(k) = (1+o(1))p(n) \sum_{k=0}^{[\sqrt{n}]} \text{coef}_{s^k} g(s) \\ &= (1+o(1))p(n)(g(1)+o(1)) = (1+o(1))p(n) \exp\left(-\sum_{i \in A(b)} \frac{1}{i}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

при $n \rightarrow \infty$. Далее,

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^m p(m-k)q(k) \leq \max_{k \geq [\sqrt{n}]} |q(k)| \sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^m p(m-k) \\ &\leq \max_{k \geq [\sqrt{n}]} |q(k)| \cdot \sum_{i=1}^n p(i) = O(np(n)) \cdot \max_{k \geq [\sqrt{n}]} |q(k)|, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (22)$$

Оценим второй сомножитель в (22). Мы имеем согласно (17)

$$g(s) = \prod_{i \in A(b)} \sum_{k_i=0}^{\infty} (-1)^{k_i} \frac{s^{ik_i}}{k_i! i^{k_i}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} q(n) = \text{coef}_{s^n} g(s) &\leq \sum_{k_i \geq 0, i \in A(b), \sum_{i \in A(b)} ik_i = n} \prod_{i \in A(b)} \frac{1}{k_i! i^{k_i}} \\ &\leq \sum_{k_i \geq 0, i \in [1, b], \sum_{i \in A(b)} ik_i = n} \prod_{i \in A(b)} \frac{1}{k_i! i^{k_i}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как

$$\sum_{i=1}^b ik_i \geq \sum_{i \in A(b)} ik_i = n,$$

то

$$\max_{i=1, \dots, b} k_i \sum_{i=1}^b i \geq n,$$

откуда

$$\max_{i=1, \dots, b} k_i \geq \frac{2n}{b(b+1)} = cn, \quad (24)$$

где $c = 2/(b(b+1))$. Из (23) и (24) следует, что

$$q(n) \leq \frac{1}{[cn]!} \sum_{k_i \geq 0, i \in [1, b]} \chi \left\{ \sum_{i \in A(b)} ik_i = n \right\} \leq \frac{b^n}{[cn]!}. \quad (25)$$

Из (1) и (22) с учетом неравенства (25) мы получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$I_{2n} = O(np(n)) \frac{b^{\sqrt{n}}}{[c[\sqrt{n}]]!} = o(1). \quad (26)$$

Следствием соотношений (18), (20), (21) и (26) является соотношение (16). Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Сачков, *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*, Наука, М., 1978.
- [2] А. Л. Якимив, “Распределение длины m -го максимального цикла случайной A -подстановки”, *Дискрет. матем.*, **17:4** (2005), 40–58.
- [3] Е. А. Bender, “Asymptotic methods in enumeration”, *SIAM Rev.*, **16:4** (1974), 485–515.
- [4] Ю. В. Болотников, В. Н. Сачков, В. Е. Тараканов, “Асимптотическая нормальность некоторых величин, связанных с цикловой структурой случайных подстановок”, *Матем. сб.*, **99:1** (1976), 121–133.
- [5] М. П. Минеев, А. И. Павлов, “О числе подстановок специального вида”, *Матем. сб.*, **99:3** (1976), 468–476.

- [6] М. П. Минеев, А. И. Павлов, “Об уравнении в подстановках”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН, **142**, 1976, 182–194.
- [7] В. Н. Сачков, “Отображения конечного множества с ограничениями на контур и высоту”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **17**:4 (1972), 679–694.
- [8] В. Н. Сачков, “Случайные отображения ограниченной высоты”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **18**:1 (1973), 122–132.
- [9] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Физматлит, М., 2000.
- [10] *Вероятность и математическая статистика*, Научное издательство “Большая российская энциклопедия”, М., 1999.
- [11] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985.
- [12] В. Ф. Колчин, “Одна задача о размещении частиц по ячейкам и циклы случайных подстановок”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **16**:1 (1971), 67–82.
- [13] В. Ф. Колчин, *Случайные отображения*, Наука, М., 1984.
- [14] А. Л. Якимив, “О подстановках с длинами циклов из заданного множества”, *Дискрет. матем.*, **1**:1 (1989), 125–134.
- [15] В. Л. Гончаров, “Из области комбинаторики”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **8** (1944), 3–48.
- [16] R. Arratia, S. Tavaré, “The cycle structure of random permutations”, *Ann. Probab.*, **20** (1992), 1567–1591.
- [17] R. Arratia, S. Tavaré, “Limit theorems for combinatorial structures via distance process approximations”, *Random Structures Algorithms*, **3**:3 (1992), 321–345.
- [18] L. A. Shepp, S. P. Lloyd, “Ordered cycle lengths in a random permutation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **121**:2 (1966), 340–357.

А. Л. Якимив

Математический институт им. В. А. Стеклова

E-mail: arsen@mi.ras.ru

Поступило

24.11.2005

Исправленный вариант

19.09.2006