Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Денисов, Спектральная функция для некоторых произведений самосопряженных операторов, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 6, 948–951

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3745>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:36:02

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Спектральная функция для некоторых произведений самосопряженных операторов

М. С. Денисов

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, а $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – линейный самосопряженный непрерывный оператор, причем $\lambda = 0$ не является его собственным значением, т.е. $0 \notin \sigma_p(G)$.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$[x, y] := (Gx, y), \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ с формой $[x, y]$ называется *сингулярным G -пространством*, если $\lambda = 0$ – точка непрерывного спектра оператора G , и *регулярным G -пространством*, если $\lambda = 0$ – регулярная точка оператора G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Линейный непрерывный оператор $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ называется *G -самосопряженным*, если $[Ax, y] = [x, Ay]$ для любого $x, y \in \mathcal{H}$.

Пусть E – гомоморфизм, отображающий кольцо $\mathfrak{A}$, порожденное некоторыми интервалами вещественной оси, и содержащее интервал $(-\infty, +\infty)$, в множество G -самосопряженных проекторов $E(\Delta): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, и при этом выполнены следующие требования:

- $E(\emptyset) = 0$, $E((-\infty, +\infty)) = I$;
- $E(\Delta \cap \Delta') = E(\Delta)E(\Delta')$;
- $E(\Delta \cup \Delta') = E(\Delta) + E(\Delta')$ при $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$, где $\Delta, \Delta' \in \mathfrak{A}$.

Носитель этого гомоморфизма обозначим символом $\sigma(E)$.

Обозначим символом $\mathfrak{P}^+$ (соответственно $\mathfrak{P}^-$) множество линеалов L таких, что для любого $x \in L$ выполнено: $[x, x] \geq 0$ (соответственно $[x, x] \leq 0$).

Точка $\lambda \in \sigma(E)$ называется *точкой дефинитного (положительного или отрицательного) типа*, если существует интервал $\Delta \in \mathfrak{A}$, содержащий λ и такой, что $E(\Delta)\mathcal{H} \in \mathfrak{P}^+$ или $E(\Delta)\mathcal{H} \in \mathfrak{P}^-$ соответственно. Множества точек положительного и отрицательного типа обозначим через $\sigma_+(E)$ и $\sigma_-(E)$ соответственно.

Пусть $s = \{a_j\}_{j=1}^n$ – конечное множество вещественных точек, а $\mathfrak{A}(s)$ – кольцо, порожденное интервалами, для которых точки из s не являются граничными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Гомоморфизм E , определенный на $\mathfrak{A}(s)$, называется *G -спектральной функцией* с множеством $s = s(E)$ критических точек, если при $\lambda_0, \mu_0 \notin s(E)$, $\mu_0 < \lambda_0$ и $\mu \downarrow \mu_0$ в сильной операторной топологии существует предел операторов $E((\mu, \lambda_0])$ и он совпадает с $E((\mu_0, \lambda_0])$, т.е.

$$s\text{-}\lim_{\mu \downarrow \mu_0} (E((\mu, \lambda_0])) = E((\mu_0, \lambda_0]).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00203-а).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Точка $a \in s(E)$ называется *регулярной критической точкой* G -спектральной функции E , если в сильной операторной топологии существуют пределы

$$s\text{-}\lim_{\lambda \uparrow a} E((-\infty, \lambda]) \quad \text{и} \quad s\text{-}\lim_{\lambda \downarrow a} E((\lambda, +\infty)).$$

В противном случае точку a называют *сингулярной критической точкой*.

Если $s(E)$ не содержит сингулярных критических точек, то E называется *регулярной G -спектральной функцией*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. G -спектральная функция E с множеством $s(E)$ критических точек называется *собственной спектральной функцией* G -самосопряженного оператора A , если

- $AE(\Delta) = E(\Delta)A$;
- $\sigma(A|E(\Delta)\mathcal{H}) \subset \overline{\Delta}$;
- при $\Delta \in \mathfrak{R}$ и $\Delta \cap s(E) = \emptyset$ имеем $AE(\Delta) = \int_{\Delta} t dE_t$, где интегралы сходятся по норме, если множество Δ ограничено, и сильно, если множество Δ неограничено.

Множество $s(E)$ называют *множеством критических точек* оператора A и обозначают $s(A)$, т.е. $s(E) = s(A)$.

Если линейный оператор $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ непрерывен и самосопряжен, то непосредственно проверяется, что линейный оператор AG будет G -самосопряженным в G -пространстве $\mathcal{H}$.

Для регулярного G -пространства исследование вопроса существования собственной G -спектральной функции для непрерывного G -самосопряженного неотрицательного оператора было проведено Лангером ([1], см. также [2; глава 4, § 1]). Поэтому ниже мы будем рассматривать только сингулярный случай, т.е. $0 \in \sigma_c(G)$.

В данной работе в случае сингулярного G -пространства доказывается существование собственной G -спектральной функции для G -самосопряженного оператора вида $T = AG$, где линейный непрерывный оператор $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ самосопряжен и неотрицателен: $A \geq 0$.

Основной результат работы – следующие ниже теоремы 1 и 2. При доказательстве теоремы 1 мы следуем методу Богнара [3] (см. также [2; глава 4, § 1]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть линейные операторы $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ непрерывны и самосопряжены, причем A – неотрицательный оператор и $0 \notin \sigma_p(G)$. Тогда каждому вещественному числу $\lambda \neq 0$ можно поставить в соответствие один и только один такой G -самосопряженный проектор E_λ , что функция $\lambda \rightarrow E_\lambda$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) если $\lambda \leq \mu$, то $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$;
- 2) если $\lambda < \mu < 0$, то $[E_\lambda x, x] \geq [E_\mu x, x]$, а если $\mu > \lambda > 0$, то $[E_\mu x, x] \geq [E_\lambda x, x]$ для любого $x \in \mathcal{H}$;
- 3) если $\lambda < -\|A\| \|G\|$, то $E_\lambda = 0$, а если $\lambda > \|A\| \|G\|$, то $E_\lambda = I$;
- 4) если $\lambda \neq 0$, то существует сильный предел $s\text{-}\lim_{\mu \downarrow \lambda} E_\mu = E_\lambda + 0$ и он совпадает с E_λ ;
- 5) если T – ограниченный оператор, коммутирующий с оператором AG , то $TE_\lambda = E_\lambda T$;
- 6) спектр $\sigma(AG|E_\lambda \mathcal{H}) \subset (-\infty, \lambda]$, а $\sigma(AG|(I - E_\lambda)\mathcal{H}) \subset [\lambda, +\infty)$.

Более того, $\int_{-\|A\| \|G\|}^{\|A\| \|G\|} \nu dE_\nu$ сходится в сильной операторной топологии как несобственный интеграл с сингулярной точкой $\lambda = 0$.

Покажем, как можно ввести функцию $\lambda \rightarrow E_\lambda$, и опустим техническую часть доказательства того, что E_λ удовлетворяет условиям 1)–6).

Рассмотрим полярное представление оператора G , $G = |G|J$. Так как G – самосопряженный оператор и $0 \in \sigma_c(G)$, то J – унитарный и самосопряженный одновременно. Введем оператор $B := JAJ$. Он неотрицательный, так как оператор A неотрицателен, следовательно, существует оператор $B^{1/2}$. Определим самосопряженный оператор C следующим образом: $C := B^{1/2}GB^{1/2}$. Пусть $\{F_\lambda\}_{-\infty}^{+\infty}$ – непрерывная справа спектральная функция оператора C . Положим $C_\lambda = C|F_\lambda\mathcal{H}$ при $\lambda < 0$ и $C_\lambda = C|(I - F_\lambda)\mathcal{H}$ при $\lambda > 0$. Функцию E_λ зададим следующим образом:

$$E_\lambda = \begin{cases} JB^{1/2}C_\lambda^{-1}F_\lambda B^{1/2}|G| & \text{при } \lambda < 0; \\ I - JB^{1/2}C_\lambda^{-1}(I - F_\lambda)B^{1/2}|G| & \text{при } \lambda > 0. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. Оператор $AG: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, где $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ и $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – непрерывные самосопряженные операторы, причем A – неотрицательный и $0 \notin \sigma_p(G)$, обладает собственной G -спектральной функцией E с единственной критической точкой $\lambda = 0$. При этом $\sigma(E) \setminus \{0\} = \sigma_+(E) \cup \sigma_-(E)$, а $\sigma_+(E) = (0, +\infty) \cap \sigma(E)$, $\sigma_-(E) = (-\infty, 0) \cap \sigma(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве $E(\Delta)$ при $\Delta = (\alpha, \beta]$ (или $[\alpha, \beta)$, (α, β) , $[\alpha, \beta]$) и $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ положим $E_\beta - E_\alpha$; это действительно определяет G -спектральную функцию оператора AG с единственной критической точкой $\lambda = 0$, поскольку

- по свойству 2) теоремы 1 любая точка $\lambda \neq 0$ является точкой дефинитного типа, следовательно, $\lambda = 0$ единственная критическая точка; из свойств 2), 3) теоремы 1 вытекают и соотношения $\sigma(E) \setminus \{0\} = \sigma_+(E) \cup \sigma_-(E)$, а $\sigma_+(E) = (0, +\infty) \cap \sigma(E)$, $\sigma_-(E) = (-\infty, 0) \cap \sigma(E)$;
- коммутативность операторов AG и $E(\Delta)$ следует непосредственно из свойства 5) теоремы 1;
- так как $AGE(\Delta) = AGE_\beta(I - E_\alpha) = AG(I - E_\alpha)E_\beta$, то по свойству 6) теоремы 1 получаем, что, с одной стороны,

$$\sigma(AG|E_\beta\mathcal{H}) \subset (-\infty, \beta],$$

а с другой стороны,

$$\sigma(AG|(I - E_\alpha)\mathcal{H}) \subset [\alpha, +\infty);$$

таким образом, $\sigma(AG|E(\Delta)\mathcal{H}) \subset (-\infty, \beta] \cap [\alpha, +\infty) = \overline{\Delta}$.

- из сходимости интеграла $\int_{-\|A\|}^{\|A\|} \int_{-\|G\|}^{\|G\|} \nu dE_\nu$ в сильной операторной топологии как несобственного с сингулярной точкой $\lambda = 0$ (см. теорему 1) при $\Delta \in \mathfrak{R}$ и $\Delta \cap s(E) = \emptyset$ получим $AGE(\Delta) = \int_\Delta t dE_t$, причем интеграл справа сходится в равномерной операторной топологии.

Заметим, что в общем случае, когда $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – непрерывный G -самосопряженный и G -неотрицательный оператор, но его нельзя представить в виде $T = AG$, где A и G удовлетворяют условиям теоремы 1, он не обладает G -спектральной функцией. Ниже приводится иллюстрирующий это пример.

ПРИМЕР. Пусть $T: \text{Dom}(T) \rightarrow \mathcal{H}$ – симметрический, равномерно положительный оператор, $\overline{\text{Dom}(T)} = \mathcal{H}$ и его индексы дефекта равны $(1, 1)$.

Обозначим $G := |T|^{-1}$. Оператор G существует, непрерывен и самосопряжен, причем $0 \in \sigma_c(|T|^{-1})$. Действительно, пользуясь равномерной положительностью оператора T , получим

$$\begin{aligned} (Tx, x) \geq \gamma(x, x) &\Rightarrow \|Tx\| \geq \gamma\|x\| \Rightarrow \|Tx\|^2 \geq \gamma^2\|x\|^2 \\ &\Rightarrow (Tx, Tx) \geq \gamma^2(x, x) \Rightarrow (T^*Tx, x) \geq \gamma^2(x, x) \Rightarrow (|T|x, x) \geq \gamma^2(x, x). \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и самосопряженности оператора $|T|$ следует, что оператор $|T|^{-1}$ непрерывно обратим и самосопряжен. Заметим, что

$$\text{Ran}(|T|^{-1}) = \text{Dom}(T) \neq \mathcal{H} \quad \text{и} \quad \overline{\text{Dom}(T)} = \mathcal{H},$$

поэтому $0 \in \sigma_c(|T|^{-1})$.

Поскольку индексы дефекта симметрического оператора T равны, он допускает равномерно положительное самосопряженное расширение $\tilde{T}$. Обозначим $A := \tilde{T}$. Оператор AG является непрерывным, G -самосопряженным и G -неотрицательным. Действительно, непрерывность следует из того, что $AG = \tilde{T}|T|^{-1}$, где $\tilde{T}$ – замкнутый, а $|T|^{-1}$ – непрерывный операторы, и при этом $\text{Ran}(|T|^{-1}) = \text{Dom}(T) \subset \text{Dom}(\tilde{T})$, а G -самосопряженность и G -неотрицательность следуют из самосопряженности и неотрицательности оператора GAG .

Покажем, что $\sigma(AG) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}$. Поскольку

$$AG = \tilde{T}|T|^{-1} \quad \text{и} \quad \text{Ran}(|T|^{-1}) = \text{Dom}(T) \subset \text{Dom}(\tilde{T}),$$

то, учитывая тот факт, что $\tilde{T}|\text{Dom}(T) = T$, получим $AG = \tilde{T}|T|^{-1} = T|T|^{-1}$.

Рассмотрим полярное представление оператора T : $T = V|T|$, откуда $V = T|T|^{-1} = AG$. Так как T – симметрический, то V – полуунитарный оператор, поэтому спектр

$$\sigma(AG) = \sigma(V) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}$$

(см., например, [4; глава 7, § 6]).

Предположим противное: пусть у оператора AG существует собственная спектральная функция E . Тогда $\sigma(AG) = \sigma(AG|E((-\infty, +\infty))\mathcal{H}) \subset \mathbb{R}$, но это неверно в силу того, что $\sigma(AG) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}$. Получили противоречие.

Данная работа написана под руководством Т. Я. Азизова. Автор пользуется случаем выразить ему свою искреннюю благодарность.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Langer, *Math. Nachr.*, **33**:1–2 (1967), 107–120. [2] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, Наука, М., 1986. [3] J. Bognár, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **45**:1–4 (1983), 75–80. [4] А. И. Плеснер, *Спектральная теория линейных операторов*, Наука, М., 1965.

М. С. Денисов

Воронежский государственный университет

E-mail: Den_i_sov@rambler.ru

Поступило

21.11.2006