Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Тышкевич, О чебышевских полиномах на дугах окружности, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 6, 952–954

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3746>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 03:47:30

О чебышевских полиномах на дугах окружности

С. В. Тышкевич

Задачи о нахождении полинома степени n с заданным старшим коэффициентом, наименее уклоняющегося от нуля в метриках $C([-1, 1])$ и $L_1([-1, 1])$, были решены Чебышевым [1], [2]. В метрике $C([-1, 1])$ наименее уклоняющимися от нуля многочленами являются *многочлены Чебышева первого рода*

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x,$$

в метрике $L_1([-1, 1])$ – *многочлены Чебышева второго рода*

$$U_n(x) = \left(x - \cos \frac{\pi}{n+1}\right) \cdots \left(x - \cos \frac{\pi n}{n+1}\right).$$

В 2004 г. Лукашов [3] решил задачу о рациональной тригонометрической функции с фиксированным знаменателем, наименее уклоняющейся от нуля на нескольких отрезках на периоде.

Известно, что полиномы Чебышева, нули которых расположены на фиксированном компакте комплексной плоскости, применяются, например, при изучении свойств его трансфинитного диаметра, для оценки оптимальной ошибки экстраполяции с конечного множества целых функций из класса Винера [4]. Цель настоящей работы – найти многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на дугах единичной окружности, с нулями на этих дугах.

На множестве

$$\Gamma_E = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\varphi}, \varphi \in E\},$$

где $E = [\varphi_1, \varphi_2] \cup \cdots \cup [\varphi_{2l-1}, \varphi_{2l}]$, $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_{2l} < 2\pi$, $l \geq 2$, будем рассматривать многочлены

$$P_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j), \quad z_j \in \Gamma_E, \quad j = \overline{1, n}.$$

Множество таких многочленов обозначим $\mathcal{P}_n(E)$.

Напомним, что функция $\omega(z, G, \mathbb{C} \setminus \Gamma_E)$ называется *гармонической мерой* множества $G \subset \Gamma_E$ в точке $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_E$ относительно области $\mathbb{C} \setminus \Gamma_E$, если

- 1) $\omega(z, G, \mathbb{C} \setminus \Gamma_E)$ гармоническая и ограниченная в $\mathbb{C} \setminus \Gamma_E$;
- 2) $\omega(z, G, \mathbb{C} \setminus \Gamma_E) = 1$ при $z \in G$ и $\omega(z, G, \mathbb{C} \setminus \Gamma_E) = 0$ при $z \in \Gamma_E \setminus G$.

Обозначив через $g_E(\xi, z)$ функцию Грина области $\mathbb{C} \setminus \Gamma_E$, через n – внешнюю нормаль в точке ξ , $\Gamma_{E_k} = \{\xi : \xi = e^{i\varphi}, \varphi \in E_k = [\varphi_{2k-1}, \varphi_{2k}]\}$, для гармонической меры $\omega_k(z) := \omega(z, \Gamma_{E_k}, \mathbb{C} \setminus \Gamma_{E_k})$ можем записать соотношение

$$\frac{1}{\pi} \int_{\varphi_{2k-1}}^{\varphi_{2k}} \frac{\partial}{\partial n} g_E(\xi, z) |d\xi| + \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_{2k-1}}^{\varphi_{2k}} \frac{\partial}{\partial n} g_E(\xi, \bar{z}) |d\xi| = \omega_k(z) + \omega_k(\bar{z}).$$

ТЕОРЕМА. Если гармонические меры дуг Γ_{E_k} , $k = \overline{1, l}$, – рациональные числа, $\bar{\omega}(z, x)$ – плотность гармонической меры, определяемая равенством

$$\bar{\omega}(z, x) = \frac{\partial}{\partial x} \omega(z, \Gamma_E \cap \{e^{i\varphi} : 0 \leq \varphi \leq x\}, \mathbb{C} \setminus \Gamma_E),$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00060).

то минимум в экстремальной задаче

$$\max_{z \in \Gamma_E} |P_n(z)| = \min_{P_n(z) \in \mathcal{P}_n(E)} \max_{z \in \Gamma_E} |P_n(z)| \quad (1)$$

доставляют многочлены

$$P_n^*(z) = A_n \varepsilon \cos \left(\frac{\pi n}{2} \int_{E \cap [0, \varphi]} (\bar{\omega}(\infty, \xi) + \bar{\omega}(0, \xi)) d\xi, \right.$$

где $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $A_n = \text{const.}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тригонометрический полином $T_m(\varphi)$ порядка m может быть записан через свои корни следующим образом:

$$\begin{aligned} T_m(\varphi) &= c \prod_{j=1}^{2m} \sin \frac{\varphi - \varphi_j}{2} = c \prod_{j=1}^{2m} e^{-i(\varphi + \varphi_j)/2} \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{i\varphi_j}) = \hat{c} z^{-m} \prod_{j=1}^{2m} (z - z_j), \\ \hat{c} &= \frac{c}{4^m} \prod_{j=1}^{2m} e^{-i(\pi + \varphi_j)/2}, \end{aligned}$$

где $c = \text{const.}$ Следовательно, алгебраический многочлен степени n представим в виде

$$P_n(z) = \frac{1}{\hat{c}} e^{i[n/2]\varphi} T_{[n/2]}(\varphi),$$

где $T_{[n/2]}(\varphi)$ – тригонометрический полином полуцелого порядка, причем каждому корню φ_j полинома $T_{[n/2]}(\varphi)$ соответствует корень $z_j = e^{i\varphi_j}$ той же кратности многочлена $P_n(z)$ и наоборот.

Таким образом,

$$\min_{P_n \in \mathcal{P}_n(E)} \max_{z \in \Gamma_E} |P_n(z)| = \frac{2^n}{c} \min_{\varphi_j \in E} \max_{\varphi \in E} |T_{[n/2]}(\varphi)|.$$

В работе [3] приводится решение задачи

$$\begin{aligned} \min_{a_i, b_i \in \mathbb{R}} \max_{\varphi \in E} & \left| A \cos N\varphi + B \sin N\varphi + a_1 \cos(N-1)\varphi \right. \\ & + b_1 \sin(N-1)\varphi + \dots + a_{[N]} \cos \left(N - 2 \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right) \varphi \\ & \left. + b_{[N]} \sin \left(N - 2 \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right) \varphi \right|, \end{aligned} \quad (2)$$

где N – полуцелое, $N \in \mathbb{N}/2$, $A, B \in \mathbb{R}$, $A^2 + B^2 \neq 0$, – фиксированные числа.

Анализируя доказательство теоремы 2 [3], можно заметить, что нули тригонометрического полинома $T_{[n/2]}(\varphi)$, решающего задачу (2), лежат в множестве E , а значит, нули алгебраического многочлена $P_n^*(z)$, решающего задачу (1), лежат в множестве Γ_E . Поэтому будем иметь

$$P_n^*(z) = A_n \varepsilon \cos \left(\frac{\pi n}{2} \int_{E \cap [0, \varphi]} (\bar{\omega}(\infty, \xi) + \bar{\omega}(0, \xi)) d\xi, \right)$$

где

$$\bar{\omega}(z, x) = \frac{\partial}{\partial x} \omega(z, \Gamma_E \cap \{e^{i\varphi} : 0 \leq \varphi \leq x\}, \mathbb{C} \setminus \Gamma_E),$$

$\varepsilon \in \{-1, 1\}$, константа A_n выражается в терминах автоморфных функций. Теорема доказана.

В заключение автор выражает признательность А. Л. Лукашову за внимание и помощь в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. Л. Чебышев, *Полное собрание сочинений*, т. 2, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1947, 23–51. [2] П. Л. Чебышев, *Полное собрание сочинений*, т. 2, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1947, 244–313. [3] А. Л. Лукашов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:3 (2004), 115–138. [4] Л. С. Маергойз, *Комплексный анализ и его приложения*, Тезисы докладов Международной школы-конференции, посвященной памяти профессора И. П. Митюка, Краснодар, 2005, 75–76.

С. В. Тышкевич

Саратовский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: s_tyshkevich@yahoo.com

Поступило

08.11.2006