Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Болотов, Об изометрическом погружении с плоской нормальной связностью пространства Лобачевского L^n в евклидово пространство E^{n+m} , *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 1, 11–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3748>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:51:49

УДК 514.132

Об изометрическом погружении с плоской нормальной связностью пространства Лобачевского L^n в евклидово пространство E^{n+m}

Д. В. Болотов

Доказывается невозможность изометрического погружения с плоской нормальной связностью пространства Лобачевского L^n в евклидово пространство E^{n+m} при условии, что модуль вектора средней кривизны является ограниченным.

Библиография: 11 названий.

Одним из фундаментальных вопросов геометрии, в целом, является вопрос о возможности изометрического погружения пространства Лобачевского L^n в евклидово пространство E^{n+m} большей размерности. Для некоторых натуральных чисел m и n ответ следует из классических теорем. Так, например, в случае $m = 1$ и $n = 2$, невозможность такого C^4 -погружения гарантирует известная теорема Гильберта [1], которая распространяется Милнором на C^2 -погружения [2]. Теорема Ефимова [3] делает невозможным погружение даже полуплоскости Лобачевского в евклидово пространство. Если $m < n - 1$, то невозможность погружения обеспечивает теорема Черна–Куйпера [4]. Если же $m = n - 1$, то можно показать, что нормальная связность является плоской, и на L^n в каждой точке существуют ровно n главных направлений. Аминов посвятил ряд работ этому интересному случаю [5]–[7]. Им было показано, что линии кривизны можно взять в качестве координатных линий в случае, когда нормальная связность является плоской. Кроме того, Аминов доказал невозможность изометрического погружения с плоской нормальной связностью L^n в E^{n+m} , когда кривые одного из семейств линий кривизны являются геодезическими. Николаевский в работе [8] доказал невозможность изометрического погружения с плоской нормальной связностью полного риманового многообразия постоянной отрицательной кривизны -1 с нетривиальной фундаментальной группой в евклидово пространство. Это обобщает результат работы Ксавье [9]. Наконец, отметим результат Масальцева [10], который гласит, что не существует даже локально минимального изометрического погружения с плоской нормальной связностью L^n в E^{n+m} .

В данной работе мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Для любых положительных натуральных чисел m и n , $n > 1$, не существует изометрического погружения с плоской нормальной связностью L^n в E^{n+m} с ограниченным модулем вектора средней кривизны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [5] показано, что на L^n можно ввести нормальные координаты такие, что координатные линии касаются главных направлений, а линейный элемент записывается в виде

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \sin^2 \sigma_i du_i^2.$$

При этом,

$$\sum_{i=1}^n \sin^2 \sigma_i \leq 1.$$

Если через L_{ij}^p обозначить коэффициенты второй фундаментальной формы, а через $\vec{n}_p$ – ортонормированный параллельный (в нормальной связности) базис нормалей, то векторы нормальных кривизн равны

$$\vec{k}_i = \sum_{p=1}^m k_p \vec{n}_p = \sum_{p=1}^m \frac{L_{ii}^p}{g_{ii}} \vec{n}_p.$$

Тогда σ_i определяется из выражения

$$\operatorname{ctg}^2 \sigma_i = |k_i|^2 = \sum_{p=1}^m \frac{(L_{ii}^p)^2}{g_{ii}^2}.$$

В [5] строится ортогональная по столбцам матрица

$$A = \begin{pmatrix} \sin \sigma_1 & \dots & \sin \sigma_n \\ \Phi_{11} & \dots & \Phi_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{1m} & \dots & \Phi_{nm} \end{pmatrix},$$

где $\Phi_{ip} = \cos \sigma_i \cos \varphi_{ip}$, $L_{ii}^p = \sin \sigma_i \Phi_{ip}$, а $\cos \varphi_{ip}$ – направляющие косинусы относительно базиса нормалей n_p . Отсюда немедленно следует, что скалярное произведение $\langle \vec{k}_i, \vec{k}_j \rangle = -1$, если $i \neq j$. Отметим также, что $\langle \vec{k}_i, \vec{k}_i \rangle = \operatorname{ctg}^2 \sigma_i$.

Вектор средней кривизны есть, по определению, сумма

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{k}_i.$$

Поэтому,

$$n^2 \langle H, H \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \vec{k}_i, \sum_{i=1}^n \vec{k}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n |\vec{k}_i|^2 - n(n-1).$$

Следовательно, если предположить ограниченность модуля вектора средней кривизны, то векторы нормальных кривизн должны быть ограничены по длине. Это означает, что $\operatorname{ctg}^2 \sigma_i$, $i = 1, \dots, n$, – ограниченные сверху функции; следовательно, функции $\sin^2 \sigma_i$, $i = 1, \dots, n$, отделены от нуля одной положительной константой c^2 .

Рассмотрим на L^n метрику $d\rho^2 = ds^2 + \bar{d}s^2$, где $\bar{d}s^2$ – метрика грассманового образа пространства L^n . В [5] показано, что $d\rho^2 = \sum_{i=1}^n du_i^2$, т.е. является евклидовой метрикой. Учитывая вышесказанное, имеем

$$c^2 d\rho^2 \leq ds^2 \leq d\rho^2. \quad (*)$$

Напомним, что метрические пространства (X, ρ_1) и (Y, ρ_2) – квазиизометричны, если существует отображение $f: (X, \rho_1) \rightarrow (Y, \rho_2)$ и константы $C \geq 0$, $C_1, C_2 > 0$ такие, что для любых $x, y \in X$ выполнено

$$C_1 \rho_1(x, y) - C \leq \rho_2(f(x), f(y)) \leq C_2 \rho_1(x, y) + C.$$

Зафиксируем две произвольные точки $x, y \in L^n$. Предположим, что γ_1 – кратчайшая от x к y в (L^n, ds^2) , а γ_2 – кратчайшая от x к y в $(L^n, d\rho^2)$. Учитывая (*), имеем

$$c \int_{\gamma_2} d\rho \leq c \int_{\gamma_1} d\rho \leq \int_{\gamma_1} ds \leq \int_{\gamma_2} ds \leq \int_{\gamma_2} d\rho.$$

Это означает, что пространство Лобачевского (L^n, ds^2) квазиизометрично евклидову пространству $E^n \stackrel{\text{iso}}{=} (L^n, d\rho^2)$, где квазиизометрия есть тождественное отображение $\text{id}: (L^n, ds^2) \rightarrow (L^n, d\rho^2)$. Но этого не может быть хотя бы потому, что квазиизометричные пространства должны иметь одинаковый рост объемов шаров, однако евклидово пространство имеет полиномиальный рост, в отличие от экспоненциального роста пространства Лобачевского (см. [11]). Тем самым, теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Hilbert, “Über Flächen von konstanter Gausscher Krümmung”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **2**:1 (1901), 87–99.
- [2] T. K. Milnor, “Efimov’s theorem about complete immersed surfaces of negative curvature”, *Adv. Math.*, **8**:3 (1972), 474–543.
- [3] Н. В. Ефимов, “Непогружаемость полуплоскости Лобачевского”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **30**:2 (1975), 83–86.
- [4] S. Chern, N. H. Kuiper, “Some theorems on isometric imbedding of compact Riemann manifold in Euclidean space”, *Ann. of Math. (2)*, **56** (1952), 422–430.
- [5] Ю. А. Аминов, “Изометрические погружения с плоской нормальной связностью областей n -мерного пространства Лобачевского в евклидово пространство. Модели теории поля”, *Матем. сб.*, **137**:3 (1988), 275–299.
- [6] Ю. А. Аминов, “Проблемы вложения: геометрические и топологические аспекты”, *Итоги науки и техники. Проблемы геометрии*, **13**, ВИНТИ, М., 1982, 119–156.
- [7] Ю. А. Аминов, “Изометрические погружения области в 3-мерном пространстве Лобачевского L^3 в евклидово пространство E^5 и движение твердого тела”, *Матем. сб.*, **122**:1 (1983), 12–30.
- [8] Y. A. Nikolajevky, “A non-immersion theorem for a class of hyperbolic manifolds”, *Differential Geom. Appl.*, **9**:3 (1998), 239–242.
- [9] F. Xavier, “A non-immersion theorem for hyperbolic manifolds”, *Comment. Math. Helv.*, **60** (1985), 280–283.
- [10] Л. А. Масальцев, “О минимальных подмногообразиях постоянной кривизны в евклидовом пространстве”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, **9** (1998), 64–65.
- [11] Д. Ю. Бурого, Ю. Д. Бурого, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*, Ин-т компьютер. исслед., М.-Ижевск, 2004.

Д. В. Болотов

Институт низких температур им. Б. Е. Веркина, Украина

E-mail: bolotov@univer.kharkov.ua

Поступило

10.03.2006

Исправленный вариант

05.12.2006