Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Гаврилюк, А. А. Махнев, Графы Тервиллигера
с $\mu \leq 3$, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 1, 14–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3749>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 13:02:33

Графы Тервиллигера с $\mu \leq 3$

А. Л. Гаврилюк, А. А. Махнев

Графом Тервиллигера называется неполный граф, в котором пересечение окрестностей любых двух вершин, находящихся на расстоянии 2, является μ -кликой. В работе классифицированы связные графы Тервиллигера с $\mu = 3$ и выяснено строение графов Тервиллигера диаметра 2 с $\mu = 2$.

Библиография: 5 названий.

Введение. Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Подграф $[a] = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a* . Пусть $a^\perp$ – шар радиуса 1 с центром a . Для подграфа Σ графа Γ через $\Sigma^\perp$ обозначим $\bigcap_{a \in \Sigma} a^\perp$.

Через k_a обозначим *степень вершины a* , т.е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным степени k* , если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *бирегулярным*, если степени его вершин принимают точно два значения. Для ребра $\{a, c\}$ графа Γ через λ_{ac} обозначим число вершин в графе $[a] \cap [c]$. Граф Γ называется *реберно регулярным с параметрами (v, k, λ)* , если Γ – регулярный граф степени k на v вершинах, в котором $\lambda_{ac} = \lambda$ для любого ребра $\{a, c\}$. Подграф, индуцированный на $[a] \cap [b]$, назовем *μ -подграфом*, если вершины a, b находятся на расстоянии 2, а через μ_{ab} обозначим число вершин в этом подграфе. Скажем, что $\mu(\Gamma) = \mu$, если для любых вершин a, b с $d(a, b) = 2$ верно равенство $\mu_{ab} = \mu$. Реберно регулярный граф Γ с параметрами (v, k, λ) , в котором $\mu(\Gamma) = \mu$, называется *вполне регулярным* с параметрами (v, k, λ, μ) . Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным*. Далее, подграф из Γ будет означать индуцированный подграф.

Вершину a графа Γ назовем *редуцированной*, если $[a]^\perp = \{a\}$, и *нередуцированной* в противном случае. Через $\bar{\Gamma}$ обозначим факторграф по отношению эквивалентности $\equiv$, где $a \equiv b$, если $a^\perp = b^\perp$. *Сингулярной прямой* графа Γ называется такая клика L , что $L = (\{x, y\}^\perp)^\perp$ для любых двух вершин $x, y \in L$.

Через $K_{m_1, \dots, m_n}$ обозначим полный n -дольный граф с долями порядков $m_1, \dots, m_n$. Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n \times m}$. Граф $K_{1, m}$ называется *m -лапой*. Граф $K_{1, \dots, 1, 3}$ с n долями порядка 1 называется

n -*короной* (*короной*, если $n = 2$). *Кликовым расширением* графа Γ называется граф, полученный заменой каждой вершины a на клику (a) , причем различные клики попарно не пересекаются и вершина из (a) несмежна ни с одной вершиной из (b) , если a, b несмежны в Γ , и смежна с любой вершиной из (b) , если a, b смежны в Γ . Если число вершин в каждой клике равно α , то говорят, что граф является *кликовым α -расширением*.

Через $\mathcal{F}(s, r)$ обозначим класс сильно регулярных графов с $\mu = 1$, в которых окрестность любой вершины является объединением r изолированных клик порядка s . Через $\mathcal{G}(s, r)$ обозначим класс сильно регулярных графов с $\mu = 2$, в которых окрестность каждой вершины принадлежит $\mathcal{F}(s, r)$.

Последовательность натуральных чисел $\{F_n\}$, где $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ и $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ для $n \geq 3$, называется *последовательностью чисел Фибоначчи*.

Граф диаметра d называется *антиподальным*, если отношение: “совпадать или находиться на расстоянии d ” является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. Антиподальный граф диаметра 3 на 12 вершинах, в котором окрестность любой вершины – пятиугольник, называется *графом икосаэдра*. *Граф Тервиллигера* – это неполный граф Γ , в котором для любых двух вершин u, w с $d(u, w) = 2$ подграф $[u] \cap [w]$ является μ -кликой для некоторой константы μ .

В монографии [1; гл. 1] сформулирована следующая гипотеза о графах Тервиллигера.

ПРОБЛЕМА 1. Пусть Γ – связный регулярный граф Тервиллигера, содержащий вершину a с $|[a]^\perp| < \mu$. Верно ли, что для любой вершины x подграф $[x] - [x]^\perp$ является регулярным?

В [2] указанная проблема решена положительно в случае $\mu = 2$. В данной работе изучаются графы Тервиллигера с $\mu = 3$.

ТЕОРЕМА. Пусть Γ – связный граф Тервиллигера с $\mu = 3$. Тогда верно одно из следующих утверждений:

- (1) подграф Ψ на множестве вершин с некликовыми окрестностями является кликой или кликовым 3-расширением графа $\bar{\Psi}$ с $\mu(\bar{\Psi}) = 1$;
- (2) найдутся такие натуральные числа s, r , что Γ является локально $\mathcal{G}(s, r)$ графом;
- (3) Γ содержит нередуцированную вершину, диаметр Γ больше 2, найдутся такие натуральные числа s, r , что для любой нередуцированной вершины a подграф $[a] - [a]^\perp$ принадлежит $\mathcal{F}(s, r)$, а для любой редуцированной вершины u подграф $\Sigma = [u]$ является кликовым 2-расширением графа из $\mathcal{F}(s/2, r)$;
- (4) найдутся такие натуральные числа s, r , что для любой вершины u подграф $[u]$ является кликовым 2-расширением графа из $\mathcal{F}(s, r)$, где $s(s+1)$ делится на 3.

Заметим, что существование графов в утверждениях (2)–(4) неизвестно (фактически, существование графов в классе $\mathcal{F}(s, r)$ известно лишь для $s = 1$). В теореме 1 из [3] найдено описание графов Тервиллигера без корон. Из этого описания получается

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Γ – связный регулярный граф Тервиллигера без 4-корон. Тогда верно одно из следующих утверждений:

- (1) Γ не содержит 3-клик и является кликовым α -расширением пятиугольника;
- (2) Γ содержит 3-клик, но не содержит 3-лап, $d(\Gamma) > 2$ и Γ является кликовым α -расширением графа икосаэдра или графа с $\mu = 1$;
- (3) Γ содержит 3-лапу, не содержит корон и является графом с $\mu = 1$;
- (4) Γ содержит корону, не содержит 3-корон и является либо кликовым 2-расширением графа с $\mu = 1$, либо локально $\mathcal{F}(s, r)$ графом для некоторых натуральных чисел s, r ;
- (5) Γ содержит 3-корону и является графом с $\mu = 3$.

Доказательство теоремы опирается на

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть Γ – связный граф Тервиллигера с $\mu = 2$. Если $\Gamma^\perp$ – пустой граф, то выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) подграф Ψ на множестве вершин с некликовыми окрестностями является кликой или кликовым 2-расширением графа $\bar{\Psi}$ с $\mu(\bar{\Psi}) = 1$;
- (2) найдутся такие натуральные числа s, r , что Γ является локально $\mathcal{F}(s, r)$ графом;
- (3) диаметр Γ больше 2, Γ является бирегулярным графом; если A (если B) – множество вершин меньшей (большей) степени, то окрестность вершины a из A содержится в B , окрестность каждой вершины b из B пересекает A и верно одно из утверждений:
  - (i) $[a]$ является графом Петерсена, а $[b]$ – граф, отвечающий полярности проективной плоскости порядка 3;
  - (ii) $[a]$ является графом Хофмана–Синглтона, а $[b]$ – граф, отвечающий полярности проективной плоскости порядка 7;
  - (iii) $[a]$ является графом Мура степени 57, а $[b]$ – граф на множестве точек и прямых аффинной плоскости порядка 56, в котором множество точек совпадает с $A \cap [b]$, точка и прямая смежны, если они инцидентны в плоскости, и две прямые смежны, если они параллельны;
  - (iv) $[a]$ является графом Мура степени 57, а $[b]$ – граф, полученный добавлением к подграфу из пункта (iii) клики из 57 вершин, отвечающих классам параллельных прямых аффинной плоскости, и каждая прямая смежна с классом параллельных прямых, содержащим эту прямую;
  - (v) $[a]$ является графом Мура степени 57, а $[b]$ – бирегулярный граф, в котором меньшая степень вершины равна 57, а большая – 66 или 82.

Кроме кликовых 2-расширений графов с $\mu = 1$ известны только три связных графа Тервиллигера с $\mu = 2$: граф икосаэдра и два локально Петерсеновских графа – граф Конвея–Смита диаметра 4 на 63 вершинах и граф Доро диаметра 3 на 65 вершинах.

1. Вспомогательные результаты. В этом пункте приведены некоторые вспомогательные результаты, используемые в дальнейшем, и доказано предложение.

ЛЕММА 1.1. Пусть Σ – сильно регулярный граф с $\mu = 1$. Тогда окрестность любой вершины a состоит из r изолированных s -клик, где $s + 1 < r$, и $s + 1$ делит $r(r - 1)^2$. Если $s = c^2 f$, где f свободно от квадратов, то $r - 1 = (t + c)tf$ и $2t + c$ делит многочлен $R(s)$, где $R(s) = cs(s - 4)(s^2 - 2s - 4)$, если s не делится на 4, $R(s) = cs(s - 4)(s^2 + 2s + 4)/16$, если s делится на 4, в частности, $s \neq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что число $(s + 1)$ -клик в Σ равно $r^2(r - 1)(s + 1) - r^2(2r - 3) + r(r - 1)^2/(s + 1)$. Поэтому $s + 1$ делит $r(r - 1)^2$. Далее, $s + 1 \leq r$, а остальные утверждения леммы 1.1 доказаны в теореме 4 из [4]. Покажем, что $s + 1 \neq r$. В противном случае, $t(t + c) = c^2$, но это уравнение не имеет целочисленных решений.

Пусть $s = 2$. Тогда $c = 1$ и $2t + 1$ делит $R(2) = 16$; противоречие.

ЛЕММА 1.2. Пусть Γ – связный граф диаметра 2 с $\mu = 1$. Тогда либо Γ является сильно регулярным графом, либо $\Gamma = a^\perp$ для подходящей вершины a , либо выполняются следующие утверждения:

- (1) Γ является бирегулярным графом, и если A (если B) – множество всех вершин степени α (степени β), $\alpha < \beta$, то A является кликой;
- (2) для $a \in A$ подграф $[a]$ является кликой; если b, c – смежные вершины из B , то $\lambda_{bc} = \beta - \alpha$;
- (3) $|\Gamma| = \alpha\beta + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – это теорема 1.17.1 из [1].

ЛЕММА 1.3. Пусть Γ – связный граф Тервиллигера с пустым графом $\Gamma^\perp$, содержащий вершину b с $|[b]^\perp| < \mu$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) для любой вершины $a \in [b]$ подграф $[a] \cap [b]$ не является кликой;
- (2) если для некоторой вершины a подграф $a^\perp$ инцидентен $b^\perp$, то $a^\perp = b^\perp$;
- (3) если $a \in [b] - [b]^\perp$, то $|[a]^\perp| + |[b]^\perp| \leq \mu$;
- (4) Γ не содержит вершин x с $|x]^\perp| \geq \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $a \in [b]$ и $L = [a] \cap [b]$ является кликой. По связности графа Γ подграф $[x]$ не содержится в L для некоторой вершины $x \in L$. Поэтому $|L| \geq \mu + 1$ и $[b]$ не содержится в L . Теперь для $c \in [b] - L$ подграф $[a] \cap [c]$ содержится в L , и $[u] \cap [c] = [a] \cap [c]$ для любой вершины $u \in L - [c]$.

Так как $|[b]^\perp| < \mu$, то некоторая вершина $z \in [a] \cap [c]$ несмежна с вершиной $e \in [b] - L$ и $[a] \cap [c] \neq [a] \cap [e]$. Покажем, что если $c, e \in [b] - L$ и $[a] \cap [c] \neq [a] \cap [e]$, то вершины c, e несмежны. Иначе, для $u \in [a] \cap [c] - [e]$ подграф $[u] \cap [e]$ содержит c и $[a] \cap [e]$. Теперь $[c] \cap [e] - L$ содержит вершину $d \in [b]$; противоречие с тем, что d смежна с c, e , но $[a] \cap [d]$ не совпадает с одним из графов $[a] \cap [c]$ или с $[a] \cap [e]$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $x^\perp \subset y^\perp$ и $c \in [y] - x^\perp$. Тогда

а) $[c] - y^\perp \subset \Gamma_3(x)$.

Допустим, что $[c] - y^\perp$ содержит вершину d из $\Gamma_2(x)$. Тогда $[d] \cap [y]$ содержит c и μ вершин из $[x] \cap [d]$; противоречие. Докажем

б) если $e \in [x] \cap [c]$, то $e^\perp \subseteq y^\perp$.

Для $f \in [e] - y^\perp$ имеем $[x] \cap [f] = [y] \cap [f]$. В этом случае ввиду утверждения а) подграф $[c] \cap [f]$ содержит μ вершин из $[x]$. Противоречие с тем, что $[c] \cap [x]$ содержит y и μ вершин из $[f]$. Докажем

в) если $d \in [c] - y^\perp$, то подграф $([x] \cap [c]) \cup ([y] \cap [d])$ является 2μ -кликой.

Ввиду утверждения а) подграф $[y] \cap [d]$ не пересекает $[x]$. Пусть $e \in [x] \cap [c]$. По утверждению б) имеем $[e] \subset y^\perp$, поэтому $[e] \cap [d] = [y] \cap [d]$. Докажем

г) если $c \in [y] - x^\perp$ и $[c]$ не содержится в $y^\perp$, то $[x]$ является кликой и $|[y]^\perp| = \mu$.

Пусть $d \in [c] - y^\perp$. Допустим, что вершина $f \in [x]$ несмежна с вершиной $e \in [x] \cap [c]$. Тогда $[c] \cap [f]$ содержит не более $\mu - 1$ вершин из $[x]$ и вершину g из $[y] - x^\perp$. Далее, $[g] \cap [x]$ содержит вершину f и не более $\mu - 1$ вершин из $[x] \cap [c]$. Если $[g] \cap [d]$ содержит вершину d' вне $y^\perp$, то по утверждению в) $[c] \cap [x] \subset [g]$; противоречие. Значит, $[g] \cap [d] = [y] \cap [d]$; противоречие с тем, что для $e' \in [x] \cap [c] - [g]$ подграф $[e'] \cap [g]$ содержит y и μ вершин из $[y] \cap [d]$. Итак, $[x] \cap [c] \subset f^\perp$ для любой вершины $f \in [x]$. Если f, f' — две несмежные вершины из $[x]$, то $[f] \cap [f']$ содержит x и μ вершин из $[x] \cap [c]$. Таким образом, $[x]$ является кликой и ввиду утверждения (1) имеем $|[y]^\perp| = \mu$.

Допустим, что $y = b$. Тогда из г) следует

д) если $c \in [b] - x^\perp$, то $[c] \subset b^\perp$.

По связности графа Γ подграф $[u]$ не содержится в $b^\perp$ для некоторой вершины $u \in [x]$. По утверждению б) имеем $u \notin [c]$. Противоречие с утверждением г) с вершиной c в роли x и с u в роли c .

Допустим теперь, что $x = b$. Тогда $[b]^\perp \subset [y]^\perp$ и $|[y]^\perp| < \mu$. Противоречие с уже доказанным с y в роли b . Утверждение (2) доказано.

Если $a \in [b] - [b]^\perp$ и $|[a]^\perp + [b]^\perp| > \mu$, то $L = [a] \cap [b]$ является кликой. В противном случае для двух несмежных вершин $c, d \in L$ подграф $[c] \cap [d]$ содержит по утверждению (2) более μ вершин из $[a]^\perp \cup [b]^\perp$. Противоречие с утверждением (1). Утверждение (3) доказано.

Ввиду утверждения (3) получим $|[a]^\perp| < \mu$ для любой вершины $a \in [b]$. Теперь по связности графа Γ имеем $|[x]^\perp| < \mu$ для любой вершины $x \in \Gamma$.

ЛЕММА 1.4. Пусть Γ — связный граф Тервиллигера с пустым графом $\Gamma^\perp$, Ψ — подграф, индуцированный Γ на множестве вершин с некликовыми окрестностями. Если подграф $\Gamma - \Psi$ не пуст, то Ψ — кликовое расширение графа $\bar{\Psi}$ с $\mu(\bar{\Psi}) = 1$ и диаметр Γ больше 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть подграф $\Gamma - \Psi$ не пуст. Тогда компоненты графа $\Gamma - \Psi$ являются кликами. Далее, для $a \in \Gamma - \Psi$ и $y \in \Psi \cap [a]$ ввиду леммы 1.3 получим $|[y]^\perp| = \mu$.

Допустим, что диаметр Γ равен 2. Для вершины $u \in \Psi \cap [a]$ и для любой вершины $w \in \Gamma_2(u)$ подграф $[a] \cap [w] = [u] \cap [w] \subset [a]$. Пусть $z \in [u] - a^\perp$. Тогда $z \in \Gamma_2(w)$. Если подграфы $[z] \cap [w]$ и $[u] \cap [w]$ пересекаются, то они совпадают (иначе $[a] \cap [z]$ содержит вершину y вне $[u]^\perp$ и $\{a, u, y, z\}$ — четырехугольник). Если $[z] \cap [w] = [u] \cap [w]$, то $[a] \cap [z]$ содержит вершину u и μ вершин из $[u]$, противоречие.

Покажем теперь, что $[z] \cap [w]$ содержится в $\Gamma_3(a)$. Если $y \in [z] \cap [w] \cap \Gamma_2(a)$, то вершина x из $[a] \cap [y]$ несмежна по крайней мере с одной из вершин w, z , скажем с z . Противоречие с тем, что $\{u, x, y, z\}$ — четырехугольник.

ЛЕММА 1.5. Пусть Γ — граф диаметра 2 с $\mu = 1$ и $\Gamma^\perp$ — пустой граф. Если u, w — смежные вершины из Γ , $\lambda_{uw} = \lambda$, $A = u^\perp \cap w^\perp$, $\Omega = \bigcup_{a \in A} ([a] - A)$, $U = \Omega \cap [u]$, $W = \Omega \cap [w]$, $\Delta = \Gamma - (A \cup \Omega)$, то выполняются следующие утверждения:

- (1) $|\Delta| = |U| \cdot |W|$;
- (2) если $\lambda = 0$, то $\Omega = U \cup W$;
- (3) если $\lambda > 0$, то $|U| = |W|$, каждая вершина $z \in \Omega$ смежна с $|U|$ вершинами из Δ и с единственной вершиной из A , для любой вершины $f \in \Delta$ подграф $[f] \cap \Omega$ является $(\lambda + 2)$ -кокликой и $|\Omega| = |U|(\lambda + 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda_{uw} = \lambda > 0$, то ввиду леммы 1.2 имеем $|U| = |W|$.

Пусть $x \in U$, $y \in W$. Тогда $[x] \cap [w] = \{u\}$ и вершины x, y несмежны. Далее, вершина из $[x] \cap [y]$ принадлежит Δ и $|\Delta| = |U| \cdot |W|$. Утверждение (1) доказано.

Если $z \in \Omega - U$, то подграф $[u] \cap [z]$ содержит вершину из $A - \{u\}$. Поэтому в случае $\lambda = 0$ получим $\Omega = U \cup W$. Утверждение (2) доказано.

Для $z \in \Omega - (U \cup W)$ подграф $[x] \cap [z]$ содержит единственную вершину из Δ (смежную с вершиной из W), поэтому $|[z] \cap \Delta| = |U|$. Заметим, что каждая вершина из Δ несмежна с вершинами из A . Пусть $f \in \Delta$ и $g \in A$. Тогда $[f] \cap [g]$ содержит вершину из Ω , $|[f] \cap \Omega| = \lambda + 2$, g смежна с $|U|$ вершинами из Ω и $|\Omega| = |U|\lambda$. Покажем, что $[f] \cap \Omega$ является кокликой. В противном случае для смежных вершин $y, z \in [f] \cap \Omega$ найдутся вершины $a, b \in A$ такие, что $y \in [f] \cap [a]$, $z \in [f] \cap [b]$. Противоречие с тем, что подграф $\{a, z; b, y\}$ является четырехугольником. Лемма доказана.

В леммах 1.6–1.8 предполагается, что Γ – связный граф Тервиллигера с $\mu = 2$ и пустым графом $\Gamma^\perp$, не являющийся 2-расширением графа $\bar{\Gamma}$ и содержащий вершину u с бирегулярной окрестностью. Ввиду леммы 1.3 каждая вершина графа Γ является редуцированной. Пусть $[u]$ содержит вершины b меньшей степени α и w степени β . Положим $l = \beta - \alpha + 2$. По лемме 1.2 вершину w можно выбрать так, что $[u] \cap [w]$ содержит изолированную вершину b и изолированную $(l + 1)$ -клику C .

ЛЕММА 1.6. *Степени вершин b и w в графе Γ равны $\alpha^2 + 1$ и $\alpha\beta + 1$ соответственно, окрестность любой вершины степени $\alpha^2 + 1$ является графом Мура, состоящим из вершин степени $\alpha\beta + 1$, и диаметр графа Γ больше 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $c \in C$ пусть $\Sigma = [c]$, $U = \Sigma(u) - w^\perp$ и $W = \Sigma(w) - u^\perp$. По лемме 1.5 имеем $|U| = |W|$.

Пусть $\Delta = [b]$, $U' = \Delta(u) - w^\perp$, $W' = \Delta(w) - u^\perp$. Покажем, что $|U| = |U'|$. Для любой вершины x из U подграф $[b] \cap [x]$ содержит u и единственную вершину x' из U' , причем $[x'] \cap [c] = \{u, x\}$. Таким образом, получаем биекцию U на U' . Симметрично, $|W| = |W'|$. Ввиду леммы 1.2 подграф $[b]$ является сильно регулярным графом без треугольников степени α и $|U| = \alpha - 1$. Значит, $k_b = \alpha^2 + 1$, $k_u = k_c = \alpha\beta + 1$ (при этом подграф $[c]$ может быть регулярным или бирегулярным).

Пусть диаметр графа Γ равен 2. Заметим, что $|[b] - (u^\perp \cup w^\perp)| = (\alpha - 1)^2$ и $|[c] - (u^\perp \cup w^\perp)| = (\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)(l - 2)$. Далее, для любой вершины f из $[c] - (u^\perp \cup w^\perp)$ подграф $[b] \cap [f]$ содержит две вершины из $[b] - (u^\perp \cup w^\perp)$. Симметрично, для любой вершины g из $[b] - (u^\perp \cup w^\perp)$ подграф $[c] \cap [g]$ содержит две вершины из $[c] - (u^\perp \cup w^\perp)$. Противоречие с тем, что $|[b] - (u^\perp \cup w^\perp)| \neq |[c] - (u^\perp \cup w^\perp)|$. Лемма доказана.

Вершину x назовем *хорошей* (плохой), если ее степень равна $\alpha^2 + 1$ (равна $\alpha\beta + 1$). Тогда окрестность любой хорошей вершины является графом Мура, состоящим из плохих вершин.

ЛЕММА 1.7. Подграф $[c]$ является одним из следующих графов:

- (1) граф, отвечающий полярности проективной плоскости порядка α , $l = 3$ и $\alpha = 3$ или 7 ;
- (2) граф на множестве точек и прямых аффинной плоскости порядка $n = \alpha - 1$, $|[c]| = 2n^2 + n$, в котором множество точек совпадает с множеством хороших вершин, точка и прямая смежны, если они инцидентны в плоскости, и две прямые смежны, если они параллельны, $l = n = 56$;
- (3) граф на $2n^2 + 2n + 1$ вершинах, полученный добавлением к подграфу из пункта (2) клики из $n + 1$ вершин, отвечающих классам параллельных прямых аффинной плоскости, причем каждая прямая смежна с классом параллельных прямых, содержащим эту прямую, $n = \alpha - 1$, $l = n + 1$ и $n = 56$;
- (4) граф с $\alpha = 57$ и $l = 11$ или 26 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $[b]$ является графом Мура степени α . Пусть $c \in C$. В обозначениях из леммы 1.5 для подграфа $[c]$ в роли Γ получим $U = \{u_1, \dots, u_{\alpha-1}\}$, $W = \{w_1, \dots, w_{\alpha-1}\}$, $\Delta = \{f_{ij}\}$, где $f_{ij} \in [u_i] \cap [w_j]$.

Если $l = 3$, то по предложению 1.17.2 из [1] граф $[c]$ отвечает полярности проективной плоскости порядка α , $\alpha = 3, 7$ или 57 . Если проективная плоскость порядка n существует и n сравнимо с 1 или 2 по модулю 4 , то по теореме Брука–Райзера–Човла n должно быть суммой квадратов двух целых чисел. Так как 57 не является суммой квадратов двух целых чисел, то проективная плоскость порядка 57 не существует. Значит, в случае $l = 3$ выполняется утверждение (1).

Если $\alpha \leq 2(l - 1)$, то по теореме 1.17.4 из [1] имеем $\alpha \in \{2, l, l + 2\}$ и $[c]$ – один из графов в примерах b), c) или d) из [1; гл. 1, § 17]. В случае $\alpha = 2$ граф $[c]$ содержит плохую вершину ∞ , окрестность которой состоит из l хороших вершин, и l -клику, каждая вершина которой смежна с единственной хорошей вершиной. Теперь для любой вершины $x \in [b]$ найдется единственная вершина $y \in [u] \cap [x]$, смежная со всеми хорошими вершинами из $[x]$. Противоречие с тем, что $|[b]| = 5$.

Пусть $\alpha = 7$. Тогда $l = 6$ или 7 и в случаях d) и c) из [1; гл. 1, § 17] имеем $n = 6$. Противоречие с тем, что аффинная плоскость порядка 6 не существует.

Пусть $\alpha = 57$. Тогда $l = 56$ или 57 и в случаях d) и c) из [1; гл. 1, § 17] имеем $n = 56$. Итак, если $\alpha \leq 2(l - 1)$, то выполняется одно из утверждений (2) или (3).

Пусть $D = \alpha - 1 + (l - 1)^2/4$. Если D не является квадратом целого числа, то по теореме 1.17.5 из [1] имеем $\alpha \leq 2(l - 1)$ или $l = 3$.

В случае $\alpha = 7 > 2(l - 1) > 4$ получим $l = 4$ и $D = 6 + 9/4$; противоречие.

В случае $\alpha = 57$ получим $l = 11$ или 27 и $D = 81$ или 225 соответственно.

ЛЕММА 1.8. Каждая вершина графа Γ является плохой или хорошей и окрестность любой плохой вершины содержит хорошую вершину.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что граф Γ содержит вершину e , не являющуюся хорошей и несмежную с хорошими вершинами. По связности графа можно выбрать e так, что $[e]$ содержит вершину u , смежную с хорошей вершиной. Тогда $\lambda_{ue} = l - 1$ и ввиду леммы 1.2 подграф $[e]$ принадлежит $\mathcal{F}(s, r)$ с $rs = \alpha + l - 2$. По лемме 1.7 имеем $l \in \{3, 11, 26, 56, 57\}$ и $l = s + 1$. Так как $l - 1 = s$ делит $\alpha - 1$, то $l = 3$ или 57 .

Пусть $l = 3$. Тогда $\alpha = 3$ или 7 и $rs = 4$ или 8 ; противоречие. Пусть $l = 57$. Тогда $\alpha = 57$ и $rs = 112$, поэтому $r = 2$; противоречие.

Итак, каждая вершина графа Γ , не являющаяся хорошей, смежна с хорошими вершинами и является плохой. Лемма доказана.

Завершим доказательство предложения. Пусть Γ – связный граф Тервиллигера с пустым графом $\Gamma^\perp$, содержащий вершину a с $|[a]^\perp| = 1$. Если окрестность некоторой вершины графа Γ является бирегулярным графом, то предложение следует из лемм 1.6–1.8. Пусть окрестность каждой вершины графа Γ является сильно регулярным графом.

Пусть u, w – смежные вершины графа Γ и $[u] \in \mathcal{F}(s, r)$. Тогда окрестность вершины w в графе $[u]$ является объединением r изолированных s -клик. Но в этом случае окрестность вершины u в графе $[w]$ также является объединением r изолированных s -клик и $[w] \in \mathcal{F}(s, r)$. По связности граф Γ является локально $\mathcal{F}(s, r)$ графом. Предложение доказано.

2. Сильно регулярные графы Тервиллигера с $\mu = 2$. В этом пункте предполагается, что Γ – граф Тервиллигера диаметра 2, являющийся локально $\mathcal{F}(s, r)$ графом для некоторых чисел r, s .

ЛЕММА 2.1. *Граф Γ сильно регулярен с $\lambda = rs$, $k = 1 + rs + r(r-1)s^2$, и $v = 1 + k + ks^2r(r-1)/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\lambda = rs$ по определению графа $\mathcal{F}(s, r)$. Из прямоугольного соотношения $k(k - \lambda - 1) = (v - k - 1)\mu$ для окрестности вершины следует, что $k = 1 + rs + r(r-1)s^2$. Из прямоугольного соотношения для графа Γ следует, что $v = 1 + k + ks^2r(r-1)/2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. *Для параметров графа Γ верны равенства $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = s^2(5r^2 - 4r)$ для некоторого числа n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Γ удовлетворяет половинному случаю, то $\lambda = 1$ и $k = 4$. Но тогда Γ является (3×3) -решеткой и Λ состоит из двух изолированных клик; противоречие. Значит, $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$. Подставляя значения $\mu = 2$, $\lambda = rs$ и $k = 1 + rs + rs^2(r-1)$, получим второе равенство.

ЛЕММА 2.3. *Пусть $5r^2 - 4r$ является квадратом для некоторого натурального числа r . Тогда найдутся неотрицательные целые числа u, w разной четности такие, что либо $r = 4q^2$, $5q^2 - 1 = (5x \pm 2)^2$, где $q = u^2 + w^2$, $2x \pm 1 = u^2 - w^2$ и $x = 2uw$, либо r нечетно, $r = q^2$, $5q^2 - 4 = (10x \pm 1)^2$, где $q = u^2 + w^2$, $2x \pm 1 = u^2 - w^2$ и $2x = uw$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим сначала, что r четно. Тогда r делится на 4. В противном случае $r = 4p + 2$ и $20p^2 + 16p - 1$ должно быть квадратом. Пусть $r = 2^m p$, где p нечетно. Тогда $5 \cdot 2^{2m} p^2 - 2^{2m+2} p$ является квадратом. Если m нечетно, то $5 \cdot 2^{m-1} p^2 - 2p$ должно быть квадратом. Но это число не сравнимо с 1 по модулю 4. Значит, m четно и $5 \cdot 2^{m-2} p^2 - p$ является квадратом. Поэтому p и $5 \cdot 2^{m-2} p - 1$ должны быть квадратами. Если $m > 2$, то последнее число сравнимо с -1 по модулю 4. Итак, если r четно, то $r = 4q^2$, $5r^2 - 4r = 16q^2(5q^2 - 1)$ и $5q^2 - 1$ является квадратом. В этом случае $5q^2 - 1 = (5x \pm 2)^2$ и $q^2 = x^2 + (2x \pm 1)^2$. Так как q нечетно, найдутся неотрицательные целые числа u, w разной четности такие, что $q = u^2 + w^2$, $2x \pm 1 = u^2 - w^2$ и $x = 2uw$.

Пусть r нечетно. Тогда r и $5r - 4$ взаимно просты, поэтому $r = q^2$ и $5q^2 - 4 = (10x \pm 1)^2$. В этом случае $q^2 = (4x)^2 + (2x \pm 1)^2$. Так как q нечетно, найдутся неотрицательные целые числа u, w разной четности такие, что $q = u^2 + w^2$, $2x \pm 1 = u^2 - w^2$ и $2x = uw$.

ЛЕММА 2.4. *Параметр r нечетен, $n = sq(5uw \pm 1)$, $m - 1 = sq(5uw \pm 1 - q)/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 2.2, 2.3 следует, что $n = 8^\delta sq(5uw \pm 1)$, где $\delta = (1 + (-1)^r)/2$. Если r четно, то по условию целочисленности $2d$ делит $(m - 1)k(k + m)$, где $m - 1 = (d - \lambda)/2$. Значит, 16 делит $2q(10uw \pm 2 - q)k(k + m)$, причем k нечетно. Итак, 8 делит $k + m = 1 + rs + rs^2(r - 1) + 1 + 2sq(10uw \pm 2 - q)$ и s нечетно.

С другой стороны, $r - 1 = t(t + c)f$ нечетно, поэтому t, f нечетны, а c четно. Противоречие с тем, что $s = c^2 f$. Таким образом, r нечетно, что влечет остальные утверждения леммы.

ЛЕММА 2.5. *Пусть $\{F_n\}$ – последовательность чисел Фибоначчи. Тогда $r = F_{2n+1}^2$, $u = F_{n+1}$, $w = F_n$ и $5uw \pm 1 = 5F_n F_{n+1} + (-1)^{n+1}$ для подходящего n , не сравнимого с 1 по модулю 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $w^2 \pm 1 = u(u - w)$ можно переписать в виде $u^2 \mp 1 = (u + w)w = u'(u' - u)$, поэтому числа w, u лежат в последовательности чисел $\{U_n\}$, в которой каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Найдем начальные значения в этой последовательности чисел. Пусть $w = U_1$, $u = U_2$. Тогда $u - w = w$ и $w^2 \pm 1 = 2w^2$. Поэтому $w = 1$ и реализуется знак “плюс”. Таким образом, $\{U_n\}$ – последовательность чисел Фибоначчи.

Пусть $u = F_{n+1}$, $w = F_n$. Тогда $q = u^2 + w^2 = F_{2n+1}^2$ (см. [5]). Из того, что u, w – числа разной четности, получим условие: $n - 1$ не делится на 3. Наконец, $5uw \pm 1 = 5F_n F_{n+1} + (-1)^{n+1}$, так как знаки чередуются и первый знак “плюс”.

ПРОБЛЕМА 2. Является ли пустым множество пар (s, r) натуральных чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

- (1) $s + 1 < r$ и $s + 1$ делит $r(r - 1)^2$;
- (2) если $s = c^2 f$, где f свободно от квадратов, то $r - 1 = t(t + c)f$ для некоторого t и $2t + c$ делит $R(s)$, где $R(s) = cs(s - 4)(s^2 - 2s - 4)$, если 4 не делит s ; $R(s) = cs(s - 4)(s^2 + 2s + 4)/16$, если 4 делит s ;
- (3) $r = F_{2n+1}^2$ нечетно, 3 не делит $n - 1$ и $5F_{n+1}F_n + (-1)^{n+1}$ делит $(4s^2 - 20s - 25) \times (2s^2 - 5s - 25)$;
- (4) $s + 2$ делит $r(r - 1)^2(4r^2 - 2r + 1)(4r^2 - 6r + 1)$?

ЛЕММА 2.6. *Верно неравенство $r \geq 28657^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $r - 1 > s = c^2 f$, где f свободно от квадратов и $r - 1 = t(t + c)f$ для некоторого t .

Достаточно рассмотреть случаи $r = 5^2, 13^2, 89^2, 233^2, 1597^2$ и 4181^2 . Проиллюстрируем рассуждения для $r = 13^2$. Тогда $r - 1 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ и $s + 1$ делит $13^2 2^6 3^2 7^2$. Если $f = 2 \cdot 3 \cdot 7$, то $t(t + c) = 4$; противоречие. Если $f = 3 \cdot 7$, то $t(t + c) = 8$, $t = 2$, $c = 2$, $s = 84$. Противоречие с тем, что $s + 1 = 85$ не делит $r(r - 1)^2$. Если $f = 2 \cdot 7$, то $t(t + c) = 12$ и $t = 3$, $c = 1$, $s = 14$. Противоречие с тем, что $s + 1 = 15$ не

делит $r(r-1)^2$. Если $f = 2 \cdot 3$, то $t(t+c) = 28$ и $t = 4$, $c = 3$, $s = 54$. Противоречие с тем, что $s+1 = 55$ не делит $r(r-1)^2$.

Если $f = 7$, то $t(t+c) = 24$ и $t = 4$, $c = 2$, $s = 28$. Противоречие с тем, что $s+1$ не делит $r(r-1)^2$. Если $f = 3$, то $t(t+c) = 56$ и $t = 7$, $c = 1$, $s = 3$. Противоречие с тем, что $2t+1 = 15$ не делит $R(3) = 3$. Если $f = 2$, то $t(t+c) = 84$ и либо $t = 7$, $c = 5$, $s = 50$, либо $t = 6$, $c = 8$, $s = 128$. Противоречие с тем, что в любом случае $s+1$ не делит $r(r-1)^2$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Для $F_{17} = 1597$ и $F_{19} = 4181$ вычисления произведены с помощью компьютера. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы. В этом пункте предполагается, что граф Γ является связным графом Тервиллигера с $\mu = 3$. Пусть $\gamma = |\Gamma^\perp|$, $\Phi = \Gamma - \Gamma^\perp$. Если $\gamma = 3$, то Φ является объединением изолированных клик. Если $\gamma = 2$, то Φ является графом диаметра 2 с $\mu(\Phi) = 1$. Если $\gamma = 1$, то Φ является кликовым 2-расширением графа $\bar{\Phi}$ диаметра 2 с $\mu(\bar{\Phi}) = 1$ или сильно регулярным локально $\mathcal{F}(s, r)$ графом.

В дальнейшем будем предполагать, что $\Gamma^\perp$ — пустой граф и Γ содержит вершину b с $|[b]^\perp| < 3$. По лемме 1.3 Γ не содержит вершин a с $|[a]^\perp| = 3$.

ЛЕММА 3.1. Пусть Γ содержит нередуцированную вершину a и $\Delta = [a] - [a]^\perp$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) $\Delta \in \mathcal{F}(s, r)$, $s(s+1)$ делится на 3;
- (2) если $u \in \Delta$, то $\Sigma = [u]$ является кликовым 2-расширением графа $\bar{\Sigma}$ и $\bar{\Sigma}(\bar{a})$ является объединением r клик порядка $s/2$, в частности, s четно;
- (3) $\bar{\Sigma} \in \mathcal{F}(s/2, r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.3 подграф Δ состоит из редуцированных вершин, а по лемме 1.4 подграф Δ принадлежит $\mathcal{F}(s, r)$, причем $s(s+1)$ делится на 3. Утверждение (1) доказано.

Так как $\Sigma(a)^\perp = \{u\} \cup [a]^\perp$, то по предположению Σ является кликовым 2-расширением графа $\bar{\Sigma}$. Далее, $\Sigma(a) - [a]^\perp$ — объединение r изолированных s -клик, поэтому $\bar{\Sigma}(\bar{a})$ является объединением r клик порядка $s/2$ и s четно. Утверждение (2) доказано.

Допустим, что Σ содержит максимальную клику $L = \{w, w', z, z'\}$, где $\bar{w} = \bar{w}'$. Тогда $\{u, w, w'\}$ и $\{u, z, z'\}$ являются сингулярными прямыми в Γ . Действительно, $\Lambda = [w]$ является кликовым 2-расширением графа $\bar{\Lambda}$, $\Lambda(u)^\perp = \{u, w, w'\}$ и $[a]^\perp \cup (L - \{w\})$ является максимальной кликой из Λ , поэтому $\Lambda(z)^\perp = \{z, w, z'\}$. Значит, каждая вершина из $\{u\} \cup L$ принадлежит двум сингулярным прямым, лежащим в $\{u\} \cup L$, и число сингулярных прямых в $\{u\} \cup L$ равно $2 \cdot 5/3$; противоречие.

Теперь ввиду леммы 1.2 граф $\bar{\Sigma}$ сильно регулярен и попадает в $\mathcal{F}(s/2, r)$. Лемма доказана.

С помощью леммы 1.1 легко показать, что одновременное существование графов из $\mathcal{F}(s, r)$ и из $\mathcal{F}(s/2, r)$ для небольших s невозможно. В связи с этим возникает

ПРОБЛЕМА 3. Верно ли, что если класс графов $\mathcal{F}(s, r)$ не является пустым, то $\mathcal{F}(2s, r)$ пуст?

ЛЕММА 3.2. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) *если u – редуцированная вершина и $\Sigma = [u]$ является кликовым 2-расширением графа $\bar{\Sigma}$, то $\bar{\Sigma} \in \mathcal{F}(s, r)$, $s(s+1)$ делится на 3;*
- (2) *если Γ содержит нередуцированную вершину, то диаметр графа Γ больше 2;*
- (3) *для любой вершины x подграф $[x] - [x]^\perp$ регулярен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – максимальная клика из $\{u\} \cup \Sigma$. Если A не содержит нередуцированных вершин, то A содержит $|A|(|A| - 1)/6$ сингулярных прямых графа Γ . Отсюда $|A| \neq 5$ и граф $\bar{\Sigma}$ не содержит максимальных 2-клик. По лемме 1.2 имеем $\bar{\Sigma} \in \mathcal{F}(s, r)$, $|A| = 2s + 3$ и $s(s+1)$ делится на 3.

Если же A содержит нередуцированную вершину a , то по лемме 3.1 граф $\bar{\Sigma}$ принадлежит $\mathcal{F}(s, r)$, $|A| = 2s + 3$ и $A - [a]^\perp$ содержит $(|A| - 2)(|A| - 3)/6$ сингулярных прямых графа Γ . Снова $s(s+1)$ делится на 3. Утверждение (1) доказано.

Пусть Γ содержит нередуцированную вершину a , $u \in [a]$ и w – редуцированная вершина из $[u] - a^\perp$. Тогда $[a] - [a]^\perp \in \mathcal{F}(s, r)$, $[w]$ является кликовым 2-расширением графа из $\mathcal{F}(s/2, r)$, $k_a = 2 + rs + r(r-1)s^2$ и $k_w = 2 + rs + r(r-1)s^2/2$. Положим $[a] \cap [w] = \{u_1, u_2, u_3\}$, $A = \{a, u_1, u_2, u_3\}^\perp$ и $W = \{w, u_1, u_2, u_3\}^\perp$. Тогда $A = \{a, u_i, u_j\}^\perp$ для любых двух индексов $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Если $x \in \{w, u_i, u_j\}^\perp - W$, то $[a] \cap [x]$ содержит u_i, u_j и единственную вершину y из $\{a, u_i, u_j\}^\perp$. Противоречие с тем, что $[w] \cap [y] = \{u_1, u_2, u_3\}$. Значит, $W = \{w, u_i, u_j\}^\perp$ для любых двух индексов $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Если $x \in \{w, u_1\}^\perp - W$, то $[a] \cap [x]$ содержит u_1 и две вершины из $\{a, u_1\}^\perp - A$. Симметрично, для $y \in \{a, u_1\}^\perp - A$ подграф $[w] \cap [y]$ содержит u_1 и две вершины из $\{w, u_1\}^\perp - W$, поэтому $|\{a, u_1\}^\perp - A| = |\{w, u_1\}^\perp - W|$. Если диаметр графа Γ равен 2, то каждая вершина из $[w] - \bigcup_i \{w, u_i\}^\perp$ смежна с тремя вершинами из $[a] - \bigcup_i \{a, u_i\}^\perp$ и каждая вершина из $[a] - \bigcup_i \{a, u_i\}^\perp$ смежна с тремя вершинами из $[w] - \bigcup_i \{w, u_i\}^\perp$. Противоречие с тем, что $|[w] - \bigcup_i \{w, u_i\}^\perp| \neq |[a] - \bigcup_i \{a, u_i\}^\perp|$. Утверждение (2) доказано.

Для любой вершины x подграф $[x] - [x]^\perp$ является либо сильно регулярным графом, либо кликовым 2-расширением регулярного графа. В любом случае подграф $[x] - [x]^\perp$ регулярен. Лемма доказана.

Из леммы 3.2 следует, что в классе графов Тервиллигера с $\mu = 3$ проблема 1 решается положительно даже без предположения о регулярности графа. Завершим доказательство теоремы.

Если Γ содержит нередуцированную вершину, то ввиду лемм 3.1, 3.2 выполняется утверждение (3) из заключения теоремы. Пусть все вершины графа редуцированы. Если окрестность некоторой вершины u является кликовым 2-расширением некоторого графа, то по лемме 3.2 указанный граф принадлежит $\mathcal{F}(s, r)$. Тогда для любой вершины $w \in [u]$ подграф $[w]$ является кликовым 2-расширением графа из $\mathcal{F}(s, r)$. В этом случае выполняется утверждение (4) из заключения теоремы.

Если же окрестность каждой вершины является сильно регулярным графом, то для любых смежных вершин u, w получим $[u] \cap [w] \in \mathcal{F}(s, r)$, поэтому $\lambda_{uw} = \lambda = 1 + sr + s^2r(r-1)$, $k_u = k_w = 1 + \lambda + \lambda(\lambda - sr - 1)/2$. По связности граф Γ принадлежит $\mathcal{G}(s, r)$. Теорема доказана.

4. Доказательство следствия. В этом пункте предполагается, что граф Γ является связным графом Тервиллигера без 4-корон.

ЛЕММА 4.1. Пусть Γ – связный граф Тервиллигера без корон. Тогда Γ является одним из следующих графов:

- (1) кликовое расширение 2-пути, 3-пути, пятиугольника или пятиугольной пирамиды;
- (2) кликовое расширение графа Δ , где Δ является объединением δ -клики и δ или $\delta - 1$ вершин степени 1, смежных с различными вершинами этой клики;
- (3) кликовое расширение графа икосаэдра или графа с $\mu = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть граф Γ удовлетворяет условиям леммы. Если $\mu > 2$, то по теореме 1 из [3] Γ является графом из заключения леммы.

Если $\mu = 1$, то выполняется утверждение (3) с кликовым 1-расширением. Пусть $\mu = 2$. По теореме из [2] граф Γ является либо кликовым 2-расширением графа с $\mu = 1$, либо локально $\mathcal{F}(s, r)$ графом, причем в последнем случае по лемме 6 из [2] граф Γ реберно регулярен. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Если граф Γ регулярен и не содержит 3-корон, то Γ – граф из заключения следствия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим сначала, что Γ не содержит корон. Тогда Γ – регулярный граф из заключения леммы 4.1.

Пусть Γ является кликовым расширением 2-пути $uvwz$, вершины u, z заменяются α -кликами и w заменяется β -кликой. По регулярности графа имеем $\alpha - 1 + \beta = 2\alpha + \beta - 1$; противоречие. Аналогичное противоречие имеем в случае расширения 3-пути или пятиугольной пирамиды. Значит, в случае (1) Γ является кликовым α -расширением пятиугольника. Случай (2) не возникает, а в случае (3) Γ является кликовым α -расширением графа икосаэдра или графа с $\mu = 1$ (в последнем случае $\alpha = \mu$). В любом случае Γ – граф из заключения следствия.

Пусть Γ содержит корону Δ . Так как Γ не содержит 3-корон, то $\Delta^\perp$ содержит ровно две вершины a, b , попадающие в Δ . Зафиксируем вершину a и положим $\Sigma = [a]$. Тогда Σ является графом Тервиллигера без корон диаметра 2. По лемме 4.1 Σ содержит 3-лапу и является графом с $\mu(\Sigma) = 1$. Отсюда $\mu = 2$ и ввиду [2] Γ является кликовым 2-расширением регулярного графа с $\mu = 1$ или реберно регулярным локально $\mathcal{F}(s, r)$ графом для подходящих s, r .

Пусть Γ является кликовым расширением графа Δ , где Δ является объединением δ -клики и δ или $\delta - 1$ вершин степени 1, смежных с различными вершинами этой клики. Пусть вершина u степени 1 заменяется α -кликой и смежная с ней вершина w заменяется β -кликой. Тогда степень вершины из (u) равна $\alpha - 1 + \beta$, а степень вершины из (w) не меньше $\alpha + \beta - 1 + \delta - 1$. Противоречие с регулярностью графа.

В случае графа икосаэдра или графа без 3-лап с $\mu = 1$ граф является кликовым α -расширением.

ЛЕММА 4.3. Если граф Γ регулярен и содержит 3-корону, то $\mu = 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ содержит 3-корону Δ . Так как Γ не содержит 4-корон, то $\Delta^\perp$ содержит ровно три вершины a, b, c , попадающие в Δ . Зафиксируем

вершину a и положим $\Sigma = [a]$. Тогда Σ является графом Тервиллигера без 3-корон диаметра 2.

Так как Σ содержит корону, то по лемме 4.2 Σ является либо кликовым 2-расширением графа с $\mu = 1$, либо локально $\mathcal{F}(s, r)$ графом для некоторых натуральных чисел s, r . В любом случае $\mu(\Sigma) = 2$ и $\mu = 3$. Лемма доказана.

Из лемм 4.1–4.3 получаем утверждение следствия.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), **18**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1989.
- [2] А. А. Махнев, “О регулярных графах Тервиллигера с $\mu = 2$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **37**:5 (1996), 1132–1134.
- [3] В. В. Кабанов, А. А. Махнев, Д. В. Падучих, “О графах без корон с регулярными μ -подграфами, II”, *Матем. заметки*, **74**:3 (2003), 396–406.
- [4] R. C. Bose, T. A. Dowling, “A generalization of Moore graphs of diameter two”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **11**:3 (1971), 213–226.
- [5] Н. Н. Воробьев, *Числа Фибоначчи*, Популярные лекции по математике, **6**, Наука, М., 1978.

А. Л. Гаврилюк

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург

Поступило

22.05.2006

А. А. Махнев

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург

E-mail: makhnev@imm.uran.ru