Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, О целочисленности степенных разложений, связанных с гипергеометрическими рядами, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 5, 662–676

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm375>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 10:41:50

УДК 511.21+517.588

О ЦЕЛОЧИСЛЕННОСТИ СТЕПЕННЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

В. В. Зудилин

В настоящей работе исследуются арифметические свойства степенных разложений, связанных с обобщенными гипергеометрическими дифференциальными уравнениями и рядами. Определяя ряды $f(z)$, $g(z)$ по степеням z таким образом, что $f(z)$ и $f(z) \log z + g(z)$ удовлетворяют гипергеометрическому уравнению при специальном выборе параметров, мы доказываем, что ряд $q(z) = ze^{g(Cz)/f(Cz)}$ по степеням z и его обращение $z(q)$ по степеням q имеют целочисленные коэффициенты (постоянная C зависит от параметров гипергеометрического уравнения). Целочисленность разложения $z(q)$ для дифференциальных уравнений второго и третьего порядка является классическим результатом; для порядка выше 3 частичные результаты были недавно установлены Лианом и Яу. В своем доказательстве, пользуясь p -адической техникой Дворка, мы обобщаем схему их рассуждений.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Зафиксируем произвольное целое число $N \geq 2$, и пусть $N = p_1^{s_1} \times p_2^{s_2} \cdots p_l^{s_l}$ – его разложение на простые множители, а целые $q_1, q_2, \dots, q_k$, $1 = q_1 < q_2 < \dots < q_k < N$, образуют полный набор остатков при делении на N , взаимно простых с самим числом N . Количество чисел k в этом наборе задается хорошо известной формулой

$$k = N \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_l}\right) \quad (1)$$

(см., например, [1, отд. 8, задача 25]). В заданных обозначениях справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Для целого $N \geq 2$ определим положительную постоянную

$$C_N := N^k \cdot \prod_{p|N} p^{k/(p-1)} = \left(\prod_{j=1}^l p_j^{s_j+1/(p_j-1)} \right)^k, \quad (2)$$

которая является целым числом, поскольку $(p-1) \mid k$ для любого $p \mid N$ согласно (1). Тогда для любого целого $m \geq 0$ число

$$A(m) = A_N(m) := C_N^m \cdot \frac{(q_1/N)_m (q_2/N)_m \cdots (q_k/N)_m}{m!^k} \quad (3)$$

Работа выполнена при частичной поддержке объединенного проекта фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № IR-97-1904, и Государственной научной стипендии Российской АН для молодых ученых.

является целым (положительным) числом. Здесь $(x)_m = x(x+1) \cdots (x+m-1)$ для $m \geq 1$ и $(x)_m = 1$ обозначает символ Похгаммера.

Мы доказываем это утверждение в п. 3, но для иллюстрации приведем два простых частных случая. Если $N = p^s$ является степенью простого и, значит, $k = p^s - p^{s-1}$, то выбор $C_N = p^{sp^s - (s-1)p^{s-1}}$ приводит к целым числам

$$A(m) = \frac{(p^s m)!}{(p^{s-1} m)! m! p^s - p^{s-1}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Если $N = p_1 p_2$, то $k = (p_1 - 1)(p_2 - 1)$ и выбор $C_N = p_1^{p_1(p_2-1)} p_2^{(p_1-1)p_2}$ дает целые числа

$$A(m) = \frac{(p_1 p_2 m)!}{(p_1 m)! (p_2 m)! m! p_1 p_2 - p_1 - p_2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Согласно лемме 1 обобщенный гипергеометрический ряд

$$f(z) = f_N(z) := {}_k F_{k-1} \left(\begin{matrix} q_1/N, q_2/N, \dots, q_{k-1}/N, q_k/N \\ 1, 1, \dots, 1 \end{matrix} \middle| C_N \cdot z \right) = \sum_{m=0}^{\infty} A(m) z^m \quad (4)$$

имеет целые коэффициенты в разложении по степеням z .

Полагая

$$\begin{aligned} D(x, m) &= \frac{d}{dx} \log(x)_m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{x+n-1}, \quad x \in (0, 1], \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ D(m) &= D_N(m) := \sum_{j=1}^k D\left(\frac{q_j}{N}, m\right) - k D(1, m), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

рассмотрим также степенной ряд

$$g(z) = g_N(z) := \sum_{m=0}^{\infty} A(m) D(m) z^m = \sum_{m=1}^{\infty} A(m) D(m) z^m, \quad (6)$$

коэффициенты которого, вообще говоря, уже не являются целыми числами. Оба ряда (5), (6) сходятся в окрестности точки $z = 0$ (более точно, при $|z| < 1/C_N$); кроме того, при $N > 2$ в этой окрестности функции $f(z)$ и $f(z) \log z + g(z)$ являются линейно независимыми решениями линейного однородного дифференциального уравнения

$$\left(\left(z \frac{d}{dz} \right)^k - C_N \cdot z \left(z \frac{d}{dz} + \frac{q_1}{N} \right) \left(z \frac{d}{dz} + \frac{q_2}{N} \right) \cdots \left(z \frac{d}{dz} + \frac{q_k}{N} \right) \right) y = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) является обобщенным гипергеометрическим уравнением, решения которого обладают максимальной унипотентной монодромией в смысле Моррисона (см. [2, § 1], [3, § 4.2]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть для заданного целого $N \geq 2$ степенные ряды $f(z) = f_N(z)$, $g(z) = g_N(z)$ определяются формулами (3)–(6). Тогда коэффициенты степенного разложения

$$q(z) := \exp\left(\frac{f(z) \log z + g(z)}{f(z)}\right) = z \cdot \exp\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

являются целыми числами.

В случае простого N данная теорема была доказана Лианом и Яу [4, теорема 5.5] с помощью p -адической техники Дворка [5]. В настоящей работе мы упрощаем метод работы [4] и доказываем более общие результаты. Однако, по-настоящему общее утверждение, мотивированное результатами работы [5] и численными экспериментами, может быть сформулировано в следующем виде.

ГИПОТЕЗА. Пусть $N_1, N_2, \dots, N_r$ – целые числа, $N_j \geq 2$ для всех $j = 1, \dots, r$; числовыми последовательностям

$$A(m) = A_{N_1}(m) A_{N_2}(m) \cdots A_{N_r}(m), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$D(m) = D_{N_1}(m) + D_{N_2}(m) + \cdots + D_{N_r}(m), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

отвечают степенные ряды

$$f(z) := \sum_{m=0}^{\infty} A(m) z^m, \quad g(z) := \sum_{m=1}^{\infty} A(m) D(m) z^m. \quad (10)$$

Тогда коэффициенты степенного разложения

$$q(z) := z \cdot \exp\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

являются целыми числами.

СЛЕДСТВИЕ. Для произвольного $N \geq 2$ определим степенные ряды

$$f(z) := {}_{N-1}F_{N-2}\left(\begin{matrix} 1/N, 2/N, \dots, (N-2)/N, (N-1)/N \\ 1, 1, \dots, 1 \end{matrix} \middle| N^N \cdot z\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(Nm)!}{m!^N} z^m, \quad (11)$$

$$g(z) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(Nm)!}{m!^N} \left(\sum_{j=1}^{N-1} D\left(\frac{j}{N}, m\right) - (N-1)D(1, m) \right) z^m.$$

Тогда коэффициенты степенного разложения

$$q(z) := z \cdot \exp\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

являются целыми числами.

Для вывода следствия достаточно в качестве набора целых чисел $\{N_j\}_{j=1, \dots, r}$ в условиях гипотезы выбрать

$$\{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_l^{\alpha_l} : 0 \leq \alpha_j \leq s_j, j = 1, \dots, l, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l > 0\},$$

где $N = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_l^{s_l}$ – разложение числа N на простые множители.

Наш вклад в частичное решение гипотезы может быть сформулирован следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $N_1, N_2, \dots, N_r$ — целые числа, $N_j \geq 2$, при этом любое простое p , делящее произведение $N_1 N_2 \cdots N_r$, делит каждое N_j , $j = 1, \dots, r$ (например, $N_1 = N_2 = \cdots = N_r$). Определим степенные ряды $f(z), g(z)$ в соответствии с формулами (8)–(10). Тогда коэффициенты степенного разложения

$$q(z) := z \cdot \exp\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

являются целыми числами.

Из теоремы 2 мы получаем справедливость следствия из гипотезы для любого целого, являющегося степенью простого: $N = p^s$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $r \geq 1$ целое и $N = p^s$ для простого p и целого $s \geq 1$, степенные ряды $f(z)$ и $g(z)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} f(z) &:= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(Nm)!}{m!^N} \right)^r z^m, \\ g(z) &:= r \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(Nm)!}{m!^N} \right)^r \left(\sum_{j=1}^{N-1} D\left(\frac{j}{N}, m\right) - (N-1)D(1, m) \right) z^m. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда коэффициенты степенного разложения

$$q(z) := z \cdot \exp\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

являются целыми числами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбирая r копий множества $\{p^\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq s}$ в качестве набора $\{N_j\}$ в теореме 2, получаем требуемое утверждение.

Гипергеометрические ряды $f(z)$ из (4), (10)–(12) и линейные дифференциальные уравнения, которым они удовлетворяют, естественным образом появляются в геометрии многообразий Калаби–Яу. Так, например, периоды семейства $(N-2)$ -мерных гиперповерхностей

$$\mathcal{Q}_\psi := \{x_1^N + \cdots + x_N^N - N\psi x_1 \cdots x_N = 0\} \subset \mathbb{P}^{N-1}$$

как функции от $z = (N\psi)^{-N}$ удовлетворяют тому же дифференциальному уравнению, что и ряд (11) (см., например, [6, следствие (2.3.8.1)], [7, § 8.3]). Обращение $z(q)$ ряда $q(z) = ze^{g(z)/f(z)}$, представляющее аналитическую функцию в некоторой окрестности $q = 0$, называется *зеркальным отображением* для соответствующего семейства гиперповерхностей.

ЛЕММА 2. Если степенной ряд $q(z) = z + O(z^2)$ имеет целочисленные коэффициенты, то его обращение $z(q) = q + O(q^2)$ обладает тем же свойством.

Из теорем 1, 2 и леммы 2 вытекает целочисленность степенных разложений для большого класса зеркальных отображений. Так, полагая $N = 8$ и $N = 10$ в теореме 1, мы

получаем целочисленность зеркальных отображений, отвечающих семействам гиперповерхностей

$$\mathcal{Q}_{\psi}^{(8)} := \{x_1^2 + x_2^8 + x_3^8 + x_4^8 + x_5^8 - 8\psi x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = 0\} \subset \mathbb{P}^4[4, 1, 1, 1, 1],$$

$$\mathcal{Q}_{\psi}^{(10)} := \{x_1^2 + x_2^5 + x_3^{10} + x_4^{10} + x_5^{10} - 10\psi x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = 0\} \subset \mathbb{P}^4[5, 2, 1, 1, 1]$$

соответственно в весовых проективных пространствах (подробную информацию об этих семействах можно найти, например, в [2, § 4]). Отметим также, что для малых значений N в теореме 1 или $N_1 N_2 \cdots N_r$ в теореме 2 (а именно, когда соответствующее дифференциальное уравнение имеет порядок 2 или 3) целочисленность ряда $z(q)$ объясняется тем, что представляемая рядом функция является модулярной как функция от $\tau = \frac{1}{\pi i} \log q$ (см. [8, § 1]).

Настоящая работа устроена следующим образом. В следующем пункте мы редуцируем доказательство теорем 1, 2 к арифметической проблеме p -адического анализа. В п. 3 мы приводим доказательство лемм 1, 2 и необходимые для дальнейшего сведения из p -адической техники Дворка [5]. Наконец, в п. 4 мы доказываем основные результаты этой работы.

Тематика настоящей статьи легла в основу серии специальных семинаров по диофантовым приближениям и трансцендентным числам, организованных на механико-математическом факультете МГУ. Автор благодарит всех участников этих семинаров за ряд ценных замечаний и упрощений, появившихся в результате подробного обсуждения доказательства теорем 1, 2.

2. p -адическая редукция теорем 1, 2. Пусть p – простое число. Обозначим через $\text{ord}_p \xi$ p -адический порядок числа $\xi \in \mathbb{Q}$ (степень вхождения p в несократимую дробь для ξ); величина $\text{ord}_p \xi$ может принимать любое целочисленное значение, для $\xi = 0$ полагаем $\text{ord}_p \xi = +\infty$. Замыкание поля $\mathbb{Q}$ относительно неархимедовой нормы $|\xi|_p = p^{-\text{ord}_p \xi}$ обозначается через $\mathbb{Q}_p$; все элементы ζ поля $\mathbb{Q}_p$ (и, в частности, все элементы исходного поля $\mathbb{Q}$) обладают однозначным разложением

$$\zeta = p^r (c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \cdots + c_n p^n + \cdots), \quad (13)$$

где $r = \text{ord}_p \zeta \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq c_n < p$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ и сходимость в (13) понимается в смысле нормы $|\cdot|_p$ (см., например, [9, гл. I, § 4]). Разложение (13) называется p -адической записью числа ζ . Множество элементов $\zeta \in \mathbb{Q}_p$, удовлетворяющих условию $\text{ord}_p \zeta \geq 0$, образует кольцо $\mathbb{Z}_p$. Класс чисел $\zeta \in \mathbb{Q}_p$, для которых $r \geq s$ в записи (13), обозначим через $O(p^s)$.

ЛЕММА 3. Пусть рациональное число ξ является элементом $\mathbb{Z}_p$ для любого простого p . Тогда ξ – целое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно привести доказательство для $\xi \neq 0$. Разложения числителя и знаменателя несократимой дроби для ξ на простые множители индуцируют разложение на простые самого числа: $\xi = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_l^{s_l}$. При этом $\text{ord}_{p_j} \xi = s_j \geq 0$ для $j = 1, \dots, l$, поскольку $\xi \in \mathbb{Z}_p$ по условию. Тем самым, число ξ является произведением простых чисел в целых неотрицательных степенях, т.е. $\xi \in \mathbb{Z}$, что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ. Для доказательства теорем 1, 2 достаточно показать, что

$$q(z) = z \cdot \exp\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right) \in \mathbb{Z}_p[[z]]$$

для любого простого p . (Здесь $\mathbb{Z}_p[[z]]$ обозначает кольцо формальных степенных рядов относительно z с коэффициентами из $\mathbb{Z}_p$.)

3. Предварительные сведения. Прежде всего, докажем вспомогательные утверждения из п. 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Для заданных степенных рядов

$$q(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m, \quad a_1 = 1, \quad a_m \in \mathbb{Z}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad z(q) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$$

по условию выполнено тождество $q = q(z(q))$, откуда

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n + a_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n \right)^2 + a_3 \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n \right)^3 + \dots \quad (14)$$

Сравнивая первые коэффициенты при степенях q в (14), получаем $b_1 = 1, b_2 + a_2 = 0, b_3 + 2a_2b_2 + a_3 = 0$, т.е. b_1, b_2, b_3 — целые числа. Дальнейшее доказательство проводим по индукции. Предположим теперь, что целочисленность $b_1, \dots, b_{n-1}$ для $n \geq 3$ уже доказана, и рассмотрим коэффициент при q^n в (14). Он равен

$$b_n + \sum_{i=2}^{n-1} a_i M_i + a_n = 0, \quad (15)$$

где M_i — коэффициент при q^n многочлена $(b_1q + b_2q^2 + \dots + b_{n-1}q^{n-1})^i, i = 2, \dots, n-1$. Согласно индукционному предположению числа M_i являются целыми, так что соотношение (15) влечет целочисленность b_n . Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть целое число $q, 0 < q < N$, взаимно просто с N . Тогда в разложении на простые знаменатели чисел

$$N^m \cdot \frac{(q/N)_m}{m!} = \frac{q(q+N)(q+2N) \cdots (q+(m-1)N)}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

содержат только простые делители числа N (см., например, [10, гл. I, приложение]). Числители чисел (16) взаимно просты с N , а степень вхождения простого $p \mid N$ в $m!$ равна

$$\text{ord}_p m! = \left[\frac{m}{p} \right] + \left[\frac{m}{p^2} \right] + \left[\frac{m}{p^3} \right] + \dots < \frac{m}{p-1} \quad (17)$$

(здесь $[\cdot]$ — целая часть числа). Поэтому постоянная (2) действительно сокращает знаменатели чисел

$$\frac{(q_1/N)_m (q_2/N)_m \cdots (q_k/N)_m}{m!^k}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Для элементов последовательности (3) справедливо следующее “факториальное” представление:

$$A(m) = \frac{(a_1 m)! (a_2 m)! \cdots (a_\mu m)!}{(b_1 m)! (b_2 m)! \cdots (b_\eta m)!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

где

$$\{a_j\}_{j=1, \dots, \mu} = \left\{ N, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2}}, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3} p_{j_4}}, \dots \right\}_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots \leq l},$$

$$\{b_i\}_{i=1, \dots, \eta} = \left\{ 1, \dots, 1, \frac{N}{p_{j_1}}, \frac{N}{p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3}}, \dots \right\}_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots \leq l}$$

– целочисленные наборы, отвечающие данному $N = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_l^{s_l}$, и, кроме того,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_\mu = b_1 + b_2 + \dots + b_\eta. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя модификацию принципа формальной логики (см. [1, отд. 8, задачи 21–25]), для целого $n \geq 0$ получаем

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{1 \leq q \leq N \\ (q, N)=1}} \left(\frac{q}{N} + n \right) &= \prod_{1 \leq q \leq N} \left(\frac{q}{N} + n \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq j \leq l} \prod_{\substack{1 \leq q \leq N \\ p_j | q}} \left(\frac{q}{N} + n \right) \right)^{-1} \\ &\times \left(\prod_{1 \leq j_1 < j_2 \leq l} \prod_{\substack{1 \leq q \leq N \\ p_{j_1} p_{j_2} | q}} \left(\frac{q}{N} + n \right) \right) \\ &\times \left(\prod_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq l} \prod_{\substack{1 \leq q \leq N \\ p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3} | q}} \left(\frac{q}{N} + n \right) \right)^{-1} \cdots \\ &= \prod_{1 \leq q \leq N} \left(\frac{q}{N} + n \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq j \leq l} \prod_{1 \leq q \leq N/p_j} \left(\frac{q}{N/p_j} + n \right) \right)^{-1} \\ &\times \left(\prod_{1 \leq j_1 < j_2 \leq l} \prod_{1 \leq q \leq N/(p_{j_1} p_{j_2})} \left(\frac{q}{N/(p_{j_1} p_{j_2})} + n \right) \right) \\ &\times \left(\prod_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq l} \prod_{1 \leq q \leq N/(p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3})} \left(\frac{q}{N/(p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3})} + n \right) \right)^{-1} \cdots. \end{aligned}$$

Домножим найденное выражение на

$$\begin{aligned} N^{-N} \cdot \left(\prod_{1 \leq j \leq l} \left(\frac{N}{p_j} \right)^{N/p_j} \right)^{-1} \cdot \left(\prod_{1 \leq j_1 < j_2 \leq l} \left(\frac{N}{p_{j_1} p_{j_2}} \right)^{N/(p_{j_1} p_{j_2})} \right) \\ \times \left(\prod_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq l} \left(\frac{N}{p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3}} \right)^{N/(p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3})} \right)^{-1} \cdots = C_N, \end{aligned}$$

возьмем произведение по всем $n = 0, 1, \dots, m-1$ и разделим на $m!^k$. Тогда с учетом (3) получим требуемое тождество (18). Лемма доказана.

До конца этого пункта мы фиксируем произвольное простое число p .

ЛЕММА ДВОРКА [9, гл. VI, § 2, лемма 3], [11, гл. 14, § 2]. Пусть $F(z) \in 1 + z\mathbb{Q}[[z]]$. Тогда $F(z) \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$ в том и только том случае, когда

$$\frac{F(z^p)}{F(z)^p} \in 1 + p\mathbb{Z}_p[[z]].$$

Несмотря на то, что доказательство следующего утверждения содержится (с опечаткой) в [4], мы приводим его в данной работе для полноты изложения.

ЛЕММА 5 [4, следствие 6.7]. Пусть $f(z) \in z\mathbb{Q}[[z]]$. Тогда $e^{f(z)} \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$ в том и только том случае, когда

$$f(z^p) - pf(z) \in p\mathbb{Z}_p[[z]].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $F(z) = e^{f(z)} \in 1 + z\mathbb{Q}[[z]]$.

Необходимость. Пусть $F(z) \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$. Тогда согласно лемме Дворка

$$e^{f(z^p) - pf(z)} = \frac{F(z^p)}{F(z)^p} = 1 - pG(z)$$

для некоторого степенного ряда $G(z) \in z\mathbb{Z}_p[[z]]$. Следовательно,

$$f(z^p) - pf(z) = \log(1 - pG(z)) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^m G(z)^m}{m} \in p\mathbb{Z}_p[[z]],$$

где мы воспользовались тем, что $p^m/m \in p\mathbb{Z}_p$ для всех целых $m \geq 1$.

Достаточность. Пусть теперь $f(z^p) - pf(z) = pH(z)$ для некоторого $H(z) \in z\mathbb{Z}_p[[z]]$. Поскольку для целого $m \geq 1$ степень вхождения простого p в $m!$ всегда меньше m (см. (17)), мы вправе заключить, что

$$\frac{F(z^p)}{F(z)^p} = e^{pH(z)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^m}{m!} H(z)^m \in 1 + p\mathbb{Z}_p[[z]].$$

Применение леммы Дворка дает требуемое включение $e^{f(z)} = F(z) \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть коэффициенты степенного ряда

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A(m)z^m \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]], \quad A(m) \neq 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

для любых целых неотрицательных u, v, n, s таких, что $0 \leq u < p^s$ и $0 \leq v < p$, удовлетворяют условию

$$\frac{A(v + up + np^{s+1})}{A(v + up)} - \frac{A(u + np^s)}{A(u)} \in p^{s+1}\mathbb{Z}_p. \quad (21)$$

Положим

$$f_{\nu}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A(m)z^m, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Тогда для любого целого положительного ν справедливо сравнение

$$\frac{f_{\nu}(z^p)}{f(z^p)} \equiv \frac{f_{\nu p}(z)}{f(z)} \pmod{\nu p\mathbb{Z}_p[[z]]}. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольное целое положительное ν и положим $s = \text{ord}_p \nu$. Тогда $\nu = np^s$ для некоторого целого положительного n и $\nu p \mathbb{Z}_p[[z]] = p^{s+1} \mathbb{Z}_p[[z]]$.

Полагая в теореме 1.1 из [5]

$$A^{(r)}(m) = A(m), \quad g_r(m) = 1, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

согласно условию (21) получаем сравнение

$$f(z) \sum_{m=kp^s}^{(k+1)p^s-1} A(m)z^{mp} \equiv f(z^p) \sum_{m=kp^{s+1}}^{(k+1)p^{s+1}-1} A(m)z^m \pmod{p^{s+1} \mathbb{Z}_p[[z]]}, \quad (24)$$

справедливое при всех целых положительных k . Суммируя сравнения (24) по всем $k = n, n+1, n+2, \dots$, заключаем, что

$$f(z)f_\nu(z^p) \equiv f(z^p)f_{\nu p}(z) \pmod{p^{s+1} \mathbb{Z}_p[[z]]}. \quad (25)$$

Наконец, поскольку $f(z) \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$, а значит и $f(z^p) \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$, мы можем умножить обе части сравнения (25) на степенной ряд $(f(z)f(z^p))^{-1} \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$, и это в точности отвечает требуемому сравнению (23). Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть коэффициенты степенного ряда (20) для любых целых неотрицательных u, v, n, s таких, что $0 \leq u < p^s$ и $0 \leq v < p$, удовлетворяют условию (21), а ряд $g(z)$ определяется разложением

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} A(m)D(1, m)z^m = \sum_{m=1}^{\infty} A(m) \left(\sum_{\nu=1}^m \frac{1}{\nu} \right) z^m. \quad (26)$$

Тогда $e^{g(z)/f(z)} \in \mathbb{Z}_p[[z]]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Меняя суммирование в (26), приходим к разложению

$$g(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} f_\nu(z),$$

где ряды $f_\nu(z)$ определяются формулами (22). Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{g(z^p)}{f(z^p)} - p \frac{g(z)}{f(z)} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{f_\nu(z^p)}{f(z^p)} - p \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{f_\nu(z)}{f(z)} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \left(\frac{f_\nu(z^p)}{f(z^p)} - \frac{f_{\nu p}(z)}{f(z)} \right) - p \sum_{\substack{\nu=1 \\ p \nmid \nu}}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{f_\nu(z)}{f(z)} \in p z \mathbb{Z}_p[[z]], \end{aligned} \quad (27)$$

где каждое слагаемое первой суммы в (27) лежит в $p\mathbb{Z}_p[[z]]$ по лемме 6, а каждое слагаемое второй – в $\mathbb{Z}_p[[z]]$, так как $f_\nu(z) \in z\mathbb{Z}_p[[z]]$, $f(z) \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$ и $1/\nu \in \mathbb{Z}_p$ для любого целого ν , взаимно простого с p . Полученное включение (27) согласно лемме 5 означает, что $e^{g(z)/f(z)} \in \mathbb{Z}_p[[z]]$. Предложение доказано.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства p -адической гамма-функции

$$\Gamma_p(n) = (-1)^n \gamma_p(n), \quad \text{где } \gamma_p(n) = \prod_{\substack{k=1 \\ (k,p)=1}}^{n-1} k. \quad (28)$$

ЛЕММА 7. Для любого целого $n \geq 0$ имеет место тождество

$$\frac{(np)!}{n!} = p^n \gamma_p(1 + np).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (28) получаем

$$\gamma_p(1 + np) = \frac{(np)!}{p \cdot 2p \cdot 3p \cdots np} = \frac{(np)!}{n! p^n},$$

откуда следует требуемое тождество.

ЛЕММА 8 [11, лемма 1.1]. Для всех целых положительных k, n, s выполнено

$$\Gamma_p(k + np^s) \equiv \Gamma_p(k) \pmod{p^s}.$$

ЛЕММА 9. Пусть последовательность целых $A(m) = A_N(m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, определяется формулой (3). Тогда для любого целого неотрицательного m

$$\frac{A(mp)}{A(m)} = 1 + O(p)$$

и, в частности, $\text{ord}_p A(mp) = \text{ord}_p A(m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно леммам 7, 8 для любого целого положительного a получаем

$$\begin{aligned} \frac{(amp)!}{(am)!} &= p^{am} \gamma_p(1 + amp) = p^{am} (-1)^{1+amp} \Gamma_p(1 + amp) \\ &= p^{am} (-1)^{1+amp} \Gamma_p(1) (1 + O(p)) = p^{am} (-1)^{amp} (1 + O(p)), \end{aligned}$$

откуда, пользуясь леммой 4, находим требуемое:

$$\frac{A(mp)}{A(m)} = p^{(a_1 + \dots + a_\mu - b_1 - \dots - b_\eta)m} (-1)^{(a_1 + \dots + a_\mu - b_1 - \dots - b_\eta)mp} (1 + O(p)) = 1 + O(p).$$

Лемма доказана.

4. Доказательство теорем 1, 2. Для простого p определим на множестве

$$\mathcal{C}_p := \{\xi \in \mathbb{Q} : \xi > 0, \text{ord}_p \xi \geq 0\}$$

отображение

$$': \mathcal{C}_p \rightarrow \mathcal{C}_p, \quad \xi \mapsto \xi', \tag{29}$$

по следующему правилу: число $p\xi' - \xi$ является минимальным представителем класса вычетов $-\xi \pmod{p}$ (иными словами, ξ' — минимальный элемент $\mathcal{C}_p$ такой, что $p\xi' - \xi \in \mathbb{Z}$).

Пусть $N \geq 2$ целое; числа $q_1, q_2, \dots, q_k$ образуют полный набор остатков при делении на N , взаимно простых с N .

ЛЕММА 10. Если простое p не делит N , то отображение (29) является биекцией множества $\{q_j/N\}_{j=1,\dots,k}$ на себя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через q'_j/N образ элемента q_j/N , $j = 1, \dots, k$, при отображении (29). Согласно определению выполнено

$$pq'_j \equiv q_j \pmod{N}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Поскольку p взаимно просто с N , существует p' такое, что $pp' \equiv 1 \pmod{N}$. Следовательно,

$$\{q'_j\}_{j=1,\dots,k} \equiv \{p'q_j\}_{j=1,\dots,k} \equiv \{q_j\}_{j=1,\dots,k} \pmod{N},$$

откуда ввиду минимальности $q'_j > 0$ получаем требуемое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть простое p не является делителем N в условиях теоремы 1 или делителем $N_1 N_2 \cdots N_r$ в условиях теоремы 2. Тогда для степенного ряда $q(z)$ из формулировки соответствующей теоремы справедливо включение $q(z) \in \mathbb{Z}_p[[z]]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество параметров $\{q_j/N\}_{j=1,\dots,k}$ обобщенного гипергеометрического ряда

$$\widehat{f}(z) := {}_kF_{k-1} \left(\begin{matrix} q_1/N, q_2/N, \dots, q_{k-1}/N, q_k/N \\ 1, 1, \dots, 1 \end{matrix} \middle| z \right) \quad (30)$$

инвариантно относительно преобразования (29) по лемме 10. Полагая

$$\widehat{g}(z) := \sum_{m=1}^{\infty} D_N(m) \frac{(q_1/N)_m (q_2/N)_m \cdots (q_k/N)_m}{m!^k} z^m, \quad (31)$$

согласно [5, теорема 4.1] получаем сравнение

$$\frac{\widehat{g}(z^p)}{\widehat{f}(z^p)} \equiv p \frac{\widehat{g}(z)}{\widehat{f}(z)} \pmod{p\mathbb{Z}_p[[z]]},$$

откуда, применяя лемму 5, заключаем, что $e^{\widehat{g}(z)/\widehat{f}(z)} \in \mathbb{Z}_p[[z]]$. Следовательно,

$$q(z) = z \cdot \exp \left(\frac{g(z)}{f(z)} \right) = z \cdot \exp \left(\frac{\widehat{g}(C_N z)}{\widehat{f}(C_N z)} \right) \in z\mathbb{Z}_p[[C_N z]] = z\mathbb{Z}_p[[z]]$$

в теореме 1, где мы воспользовались взаимной простотой постоянной C_N из (2) и числа p .

Все рассуждения с необходимой модификацией степенных разложений (30), (31) и заменой C_N на $C_{N_1} C_{N_2} \cdots C_{N_r}$ остаются в силе и для ряда $q(z)$ в теореме 2. Тем самым, требуемое предложение доказано полностью.

Таким образом, нам остается доказать редуцированные версии теорем 1, 2 только для простых p , делящих N или $N_1 N_2 \cdots N_r$ соответственно.

ЛЕММА 11. Пусть p – простой делитель числа N , последовательность целых $A(m) = A_N(m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, определяется формулой (3). Тогда для любых целых неотрицательных u, n, s , $0 \leq u < p^s$, выполнено

$$\text{ord}_p \frac{A(u + np^s)}{A(u)} \geq 0. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $p \mid N$, для всех целых неотрицательных v, m , $0 \leq v < p$, согласно (3) имеем

$$\begin{aligned} \frac{A(v + mp)}{A(mp)} &= D_N^v \prod_{i=1}^v \frac{(q_1 + (i-1)N + mNp) \cdots (q_k + (i-1)N + mNp)}{i + mp} \\ &= D_N^v \frac{(q_1 \cdots q_k)^v}{v!} (1 + O(p)), \end{aligned}$$

где

$$D_N = N^{-k} \cdot C_N = \prod_{p \mid N} p^{k/(p-1)}. \quad (33)$$

Следовательно,

$$\text{ord}_p \frac{A(v + mp)}{A(mp)} = \text{ord}_p D_N^v = \frac{kv}{p-1}. \quad (34)$$

Воспользуемся для доказательства леммы методом математической индукции. При $s = 0$ имеем $u = 0$, так что оценка (32) принимает вид $\text{ord}_p A(n) \geq 0$, а последнее неравенство следует из леммы 1.

Докажем теперь оценку (32) для $s \geq 1$, считая ее доказанной для меньших значений s . Представим число u в виде $u = v + u_1p$, где $0 \leq v < p$ и $0 \leq u_1 < p^{s-1}$. Тогда, применяя (34) и лемму 9, получаем

$$\begin{aligned} \text{ord}_p \frac{A(u + np^s)}{A(u)} &= \text{ord}_p A(v + u_1p + np^s) - \text{ord}_p A(v + u_1p) \\ &= \left(\text{ord}_p A(u_1p + np^s) - \frac{kv}{p-1} \right) - \left(\text{ord}_p A(u_1p) - \frac{kv}{p-1} \right) \\ &= \text{ord}_p A(u_1 + np^{s-1}) - \text{ord}_p A(u_1) = \text{ord}_p \frac{A(u_1 + np^{s-1})}{A(u_1)} \geq 0, \end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из индукционного предположения. Тем самым, оценка (32) доказана для любых целых неотрицательных u, n, s , $0 \leq u < p^s$.

ЛЕММА 12. Пусть простое p делит N . Тогда элементы последовательности (3) для любых целых неотрицательных u, v, n, s таких, что $0 \leq u < p^s$ и $0 \leq v < p$, удовлетворяют условию (21).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}
 & \frac{A(v + up + np^{s+1})}{A(up + np^{s+1})} \\
 &= \prod_{i=1}^v \frac{C_N(q_1/N + i - 1 + up + np^{s+1}) \cdots (q_k/N + i - 1 + up + np^{s+1})}{i + up + np^{s+1}} \\
 &= D_N^v \prod_{i=1}^v \frac{(q_1 + (i - 1)N + uNp + nNp^{s+1}) \cdots (q_k + (i - 1)N + uNp + nNp^{s+1})}{i + up + np^{s+1}} \\
 &= D_N^v \prod_{i=1}^v \frac{(q_1 + (i - 1)N + uNp) \cdots (q_k + (i - 1)N + uNp)}{i + up} (1 + O(p^{s+1})) \\
 &= \frac{A(v + up)}{A(up)} (1 + O(p^{s+1})), \tag{35}
 \end{aligned}$$

где постоянная D_N определена в (33).

Теперь мы воспользуемся факториальным представлением (18) и свойствами p -адической гамма-функции. Согласно лемме 7 для любого целого положительного a выполнено

$$\frac{(aup)!}{(au)!} = p^{au} \gamma_p(1 + aup)$$

и

$$\begin{aligned}
 & \frac{(a(up + np^{s+1}))!}{(a(u + np^s))!} = p^{a(u + np^s)} \gamma_p(1 + aup + anp^{s+1}) \\
 &= p^{a(u + np^s)} (-1)^{1 + aup + anp^{s+1}} \Gamma_p(1 + aup + anp^{s+1}) \\
 &= p^{au + anp^s} (-1)^{1 + aup + anp^{s+1}} \Gamma_p(1 + aup) (1 + O(p^{s+1})) \\
 &= (-p)^{anp^s} \frac{(aup)!}{(au)!} (1 + O(p^{s+1})), \tag{36}
 \end{aligned}$$

где мы также применили лемму 8. Пользуясь теперь леммой 4 и соотношениями (36) для $a \in \{a_1, \dots, a_\mu, b_1, \dots, b_\eta\}$, находим

$$\begin{aligned}
 & \frac{A(up + np^{s+1})}{A(u + np^s)} = \frac{A(up)}{A(u)} (1 + O(p^{s+1})) \prod_{j=1}^\mu (-p)^{a_j np^s} \prod_{i=1}^\mu (-p)^{-b_i np^s} \\
 &= \frac{A(up)}{A(u)} (1 + O(p^{s+1})) \tag{37}
 \end{aligned}$$

согласно (19).

После перемножения соотношений (35) и (37) получаем

$$\frac{A(v + up + np^{s+1})}{A(u + np^s)} = \frac{A(v + up)}{A(u)} (1 + O(p^{s+1})),$$

откуда

$$\frac{A(v + up + np^{s+1})}{A(v + up)} = \frac{A(u + np^s)}{A(u)} (1 + O(p^{s+1})). \tag{38}$$

Согласно лемме 11 правая часть (38) лежит в $\mathbb{Z}_p$, откуда и следует включение (21). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть простое p делит каждое из чисел $N_1, N_2, \dots, N_r$. Тогда элементы последовательности (8) для любых целых неотрицательных u, v, n, s таких, что $0 \leq u < p^s$ и $0 \leq v < p$, удовлетворяют условию (21).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения (38) и (32) справедливы для любой из последовательностей $A(m) = A_{N_j}(m)$, $j = 1, \dots, r$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда мы получаем включение (21) для элементов последовательности (8).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть простое p является делителем N в условиях теоремы 1 или делителем $N_1 N_2 \dots N_r$ в условиях теоремы 2. Тогда для степенного ряда $q(z)$ из формулировки соответствующей теоремы справедливо включение $q(z) \in \mathbb{Z}_p[[z]]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты мы ограничимся доказательством предложения при выполнении условий теоремы 1. Схема рассуждений остается неизменной и в общем случае, когда простое p делит каждое N_j , $j = 1, \dots, r$.

Представим функцию (6) в виде суммы $g(z) = g_1(z) + g_2(z)$, где

$$g_1(z) = \sum_{m=1}^{\infty} A(m) \sum_{j=1}^k D\left(\frac{q_j}{N}, m\right) z^m, \quad g_2(z) = -k \sum_{m=1}^{\infty} A(m) D(1, m) z^m,$$

и докажем, что $e^{g_i(z)/f(z)} \in \mathbb{Z}_p[[z]]$, $i = 1, 2$.

Отметим, что

$$D\left(\frac{q_j}{N}, m\right) = N \sum_{n=1}^m \frac{1}{q_j + (n-1)N} \in p\mathbb{Z}_p, \quad j = 1, \dots, k, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (39)$$

поскольку N делится на p , а знаменатель каждого слагаемого в (39) взаимно прост с N (и, значит, с p). Кроме того, все элементы последовательности (3) лежат в $\mathbb{Z}_p$, $f(z) \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$. Следовательно, $g_1(z) \in pz\mathbb{Z}_p[[z]]$ и $g_1(z)/f(z) \in pz\mathbb{Z}_p[[z]]$, так что для ряда $g_1(z)/f(z)$ условия леммы 5 выполнены. В силу леммы 5 мы получаем включение $e^{g_1(z)/f(z)} \in \mathbb{Z}_p[[z]]$.

Согласно лемме 12 элементы последовательности (3) после домножения на целое число $-k$ удовлетворяют условию (21). Поэтому из предложения 1 следует включение $e^{g_2(z)/f(z)} \in \mathbb{Z}_p[[z]]$.

Окончательно,

$$q(z) = ze^{g(z)/f(z)} = ze^{g_1(z)/f(z)} \cdot ze^{g_2(z)/f(z)} \in z\mathbb{Z}_p[[z]],$$

что и требовалось.

Согласно следствию из леммы 3 применение предложений 2, 3 доказывает теоремы 1 и 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Поляа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. II. 3-е изд. М.: Наука, 1978.
- [2] Morrison D. R. Picard–Fuchs equations and mirror maps for hypersurfaces // Essays on Mirror Manifolds / ed. S.-T. Yau. Hong Kong: International Press, 1992. P. 241–264; — // Mirror Symmetry I / ed. S.-T. Yau. AMS/IP Stud. Adv. Math. V. 9. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1998. P. 185–199.
- [3] Batyrev V. V., van Straten D. Generalized hypergeometric functions and rational curves on Calabi–Yau complete intersections in toric varieties // Comm. Math. Phys. 1995. V. 168. № 3. P. 493–533.
- [4] Lian B. H., Yau S.-T. Mirror maps, modular relations and hypergeometric series I // E-print <http://arXiv.org/abs/hep-th/9507151>; Integrality of certain exponential series // Lectures in Algebra and Geometry / ed. M.-C. Kang. Proceedings of the International Conference on Algebra and Geometry, National Taiwan University (Taipei, Taiwan, December 26–30, 1995). Cambridge, MA: International Press, 1998. P. 215–227.
- [5] Dwork B. On p -adic differential equations IV. Generalized hypergeometric functions as p -adic analytic functions in one variable // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1973. V. 6. № 3. P. 295–315.
- [6] Katz N. M. Algebraic solutions of differential equations (p -curvature and the Hodge fibration) // Invent. Math. 1972. V. 18. № 1/2. P. 1–118.
- [7] Morrison D. R. Mathematical aspects of mirror symmetry // Complex Algebraic Geometry / ed. J. Kollár. Lectures of a Summer Program (Park City, UT, 1993), IAS/Park City Math. Ser. V. 3. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. P. 267–340.
- [8] Zudilin W. Number theory casting a look at the mirror // Preprint, 2000 (submitted for publication); E-print <http://arXiv.org/abs/math/0008237>.
- [9] Коблиц Н. p -адические числа, p -адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982.
- [10] André Y. G -Functions and Geometry. Aspects Math. (A Publication of the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn). V. E13. Braunschweig: Vieweg, 1989.
- [11] Lang S. Cyclotomic Fields. I, II (Combined 2nd edition). Graduate Texts in Math. V. 121. New York: Springer-Verlag, 1990.