Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Далалаян, Обобщенная жорданова матрица линейного оператора, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 1, 27–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3750>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 15:10:20

Обобщенная жорданова матрица линейного оператора

С. Г. Далалян

Для любого линейного оператора, определенного над произвольным полем $\mathbf{k}$, найдется базис, в котором его матрица будет обобщенной жордановой матрицей (второго рода) с элементами из поля $\mathbf{k}$. Такая матрица для линейного оператора определяется однозначно с точностью до перестановок диагональных блоков.

Библиография: 10 названий.

1. Теорема о жордановом нормальном виде линейного оператора (т.е. его матрицы) обычно доказывается либо для алгебраически замкнутого основного поля, либо в предположении, что характеристический многочлен оператора разлагается над основным полем в произведение линейных сомножителей. Исключение составляют книги Постникова [1; с. 171], где устанавливается нормальный вид вещественного оператора в случае, когда его комплексификация диагонализуема, и Мальцева [2; с. 176–178], где рассматривается обобщение формы Жордана и любой линейный оператор, определенный над подполем K поля комплексных чисел, приводится к обобщенному жорданову нормальному виду. (В подстрочной сноске отмечается, что аналогичным способом тот же результат можно получить в случае произвольного совершенного поля K , если в доказательстве поле комплексных чисел заменить алгебраическим замыканием поля K). В настоящей статье доказывается, что для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ над произвольным полем $\mathbf{k}$ найдется базис, в котором оператор $\mathcal{A}$ будет задаваться обобщенной жордановой матрицей (второго рода).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Обобщенной жордановой клеткой второго рода* называется матрица вида

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{F} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} & \mathbf{F} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{P} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{pmatrix},$$

где все блоки $\mathbf{P}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{0}$ – квадратные матрицы одинакового порядка, причем $\mathbf{P}$ – произвольная, $\mathbf{0}$ – нулевая матрицы, а $\mathbf{F}$ имеет 1 в левом нижнем углу и нули в остальных местах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Сопровождающей матрицей* многочлена

$$P(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_{m-2} t^{m-2} + p_{m-1} t^{m-1} + t^m$$

называется матрица

$$\mathbf{P} = [P(t)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-2} & -p_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Матрицы указанного вида называются *циклическими*, как и определяемые ими линейные преобразования. Очевидно, $P(t)$ совпадает с характеристическим многочленом своей сопровождающей матрицы:

$$P(t) = \det(t\mathbf{E} - \mathbf{P}).$$

(Через $\mathbf{E}$ обозначается единичная матрица.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Матрица $\mathbf{J}$ с элементами из поля $\mathbf{k}$ называется *обобщенно жордановой матрицей второго рода*, если является прямой суммой

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{J}_\tau$$

обобщенных жордановых клеток $\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_\tau$ второго рода, по главной диагонали которых стоят сопровождающие матрицы неприводимых над $\mathbf{k}$ многочленов $P_1(t), \dots, P_\tau(t)$. Таким образом, обобщенно жорданова матрица имеет блочно-диагональный вид с блоками $\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_\tau$ по главной диагонали. Характеристический многочлен матрицы $\mathbf{J}$ равен произведению $P_1^{\sigma_1}(t) \cdots P_\tau^{\sigma_\tau}(t)$, где произведение $\sigma_\iota \deg P_\iota(t)$ равно порядку блока $\mathbf{J}_\iota$, $\iota = 1, \dots, \tau$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbf{k}$ – произвольное поле, L – линейное пространство над полем $\mathbf{k}$ и $\mathcal{A}$ – линейный оператор пространства L . Тогда

- (i) найдется базис пространства L , в котором оператор $\mathcal{A}$ будет задаваться обобщенной жордановой матрицей второго рода;
- (ii) набор обобщенных жордановых клеток второго рода для оператора $\mathcal{A}$ определяется однозначно, т.е. обобщенная жорданова матрица линейного оператора единственна с точностью до расположения обобщенных жордановых клеток (второго рода) на главной диагонали.

Если все неприводимые (над $\mathbf{k}$) делители характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$ линейны (в частности, если поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто), эта теорема сводится к классической теореме Жордана. Мы покажем, что обратно, вышеприведенная теорема выводится из классической теоремы Жордана. При этом ключевую роль играет теорема 2 п. 5, задающая необходимое и достаточное условие того, чтобы (обычная) жорданова нормальная матрица J , определенная над полем K , являлась матрицей оператора, определенного над подполем $\mathbf{k}$ поля K . (Заметим, что теорему 1 можно получить также в рамках теории модулей над кольцами главных идеалов, рассматривая L как модуль над кольцом $\mathbf{k}[\mathcal{A}]$ и выбирая соответствующий базис.) В заключительном п. 10 даются два применения полученных результатов.

Кроме жордановой нормальной формы для линейных операторов известна, так называемая, *рациональная каноническая форма* (см., например, [3; предложение 2,

гл. VII, § 5], [4; с. 142], [5; с. 479], [6; с. 67]), а именно, матрица, являющаяся прямой суммой циклических матриц $\bigoplus_{i=1}^s [d^{(i)}]$, для которых выполняется условие $d^{(s)} \mid d^{(s-1)} \mid \dots \mid d^{(1)}$. Циклические блоки этого разложения, вообще говоря, не являются неразложимыми, зато само разложение *вполне* единственно. Обобщенная жорданова матрица (второго рода) является недостающим звеном между рациональным каноническим видом и классическим жордановым нормальным видом линейного оператора.

В статье [7] доказывается теорема о существовании и единственности обобщенной жордановой матрицы первого рода для любого линейного оператора с сепарабельным характеристическим многочленом. Обобщенная жорданова матрица первого рода отличается от обобщенной жордановой матрицы второго рода только тем, что вместо блоков $\mathbf{F}$ используются единичные матрицы $\mathbf{E}$. Здесь ограничение на характеристический многочлен существенно, как показывает пример циклического оператора $[t^4 + u^2]$ над полем $\mathbb{Z}_2(u)$, который не может быть приведен к обобщенному жорданову виду первого рода.

2. Общая постановка задачи. Пусть $\mathcal{L}_{\mathbf{k}}$ – категория конечномерных линейных пространств над полем $\mathbf{k}$ и их линейных отображений. Пусть

$$\text{End}_{\mathbf{k}} L = \mathcal{L}_{\mathbf{k}}(L, L)$$

– множество линейных преобразований $\mathbf{k}$ -линейного пространства L . В каждом базисе линейного пространства L оператору $\mathcal{A} \in \text{End}_{\mathbf{k}} L$ соответствует матрица $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{k})$, $n = \dim_{\mathbf{k}} L$. Переходу к новому базису соответствует переход к подобной матрице $Q^{-1}AQ$, $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$. Таким образом, если рассмотреть действие $\mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ на $\mathbf{M}_n(\mathbf{k})$ подобием (сопряжением):

$$\tau_{\mathbf{k}}: \mathbf{GL}_n(\mathbf{k}) \times \mathbf{M}_n(\mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbf{k}) \mid (Q, A) \mapsto Q^{-1}AQ,$$

то $\text{End}_{\mathbf{k}} L$ биективно фактормножеству $\mathbf{M}_n(\mathbf{k})/\tau_{\mathbf{k}}$.

Основная задача заключается в том, чтобы в каждом классе фактормножества $\mathbf{M}_n(\mathbf{k})/\tau_{\mathbf{k}}$ найти подходящие канонические представители и с их помощью координатизировать (см. [8]) или, иначе говоря, параметризовать это фактормножество. В п. 1 было отмечено, что хорошо известны два типа таких представителей: рациональная каноническая форма матрицы (при любом поле $\mathbf{k}$) и жорданова нормальная форма матрицы (при алгебраически замкнутом поле $\mathbf{k}$). С помощью функтора расширения поля скаляров понятие жордановой нормальной формы обобщается на случай произвольного поля $\mathbf{k}$.

3. Пусть K – произвольное расширение поля $\mathbf{k}$. Функтор расширения поля скаляров

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_K^{\mathbf{k}} = K \otimes_{\mathbf{k}}: \mathcal{L}_{\mathbf{k}} \rightarrow \mathcal{L}_K$$

сопоставляет линейному пространству L , определенному над $\mathbf{k}$, тензорное произведение $L_K = K \otimes_{\mathbf{k}} L$, снабженное структурой линейного пространства над полем K . Умножение на элементы поля K определяется по правилу

$$\lambda(\alpha \otimes x) = (\lambda\alpha) \otimes x, \quad \lambda, \alpha \in K, \quad x \in L.$$

При этом $\mathbf{k}$ -линейному отображению $f: L \rightarrow L'$ соответствует K -линейное отображение

$$f_K: L_K \rightarrow L'_K \mid \alpha \otimes x \mapsto \alpha \otimes f(x).$$

В частности, линейному оператору $\mathcal{A}$ пространства L соответствует линейный оператор $\mathcal{A}_K$ пространства L_K ; тем самым, имеем отображение

$$\mathcal{E}: \text{End } L \rightarrow \text{End } L_K \mid \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}_K. \quad (1)$$

Пусть ζ – произвольный ненулевой элемент поля K . Тогда если $e = (e_1, \dots, e_n)$ – базис пространства $L \in \mathcal{L}_{\mathbf{k}}$, то $\zeta \otimes e = (\zeta \otimes e_1, \dots, \zeta \otimes e_n)$ будет базисом пространства L_K и для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ соответствующий оператор $\mathcal{A}_K$ в базисе $\zeta \otimes e$ будет иметь ту же матрицу A , что и оператор $\mathcal{A}$ в базисе e . Поэтому отображение (1) индуцирует корректно определенное отображение

$$\mathbf{E}: \mathbf{M}_n(\mathbf{k})/\tau_{\mathbf{k}} \rightarrow \mathbf{M}_n(K)/\tau_K \mid A(\text{mod } \tau_{\mathbf{k}}) \mapsto A(\text{mod } \tau_K).$$

Ввиду [3; следствие 3, гл. VII, § 5] это отображение будет инъективным. Очевидно, $A(\text{mod } \tau_K)$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$, принадлежит образу отображения $\mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда содержит матрицу из $\mathbf{M}_n(\mathbf{k})$. В теореме 2 п. 5 задаются необходимые и достаточные условия на обычную жорданову матрицу J с элементами из поля K , при выполнении которых в факторклассе $J(\text{mod } \tau_K)$ содержится матрица над $\mathbf{k}$.

4. Напомним некоторые простые факты из теории Галуа. *Поле разложения* многочлена $F(t) \in \mathbf{k}[t]$ (см., например, [9; с. 198–199]) называется поле K , однозначно (с точностью до изоморфизма) определяемое следующими двумя условиями:

- (i) $\mathbf{k}$ вкладывается в K так, что $F(t)$ над K разлагается на линейные множители;
- (ii) это расширение поля $\mathbf{k}$ минимально; более точно, любое вложение $\mathbf{k}$ в поле K' , над которым $F(t)$ разлагается на линейные множители, можно единственным образом продолжить до вложения K в K' .

Таким образом, в поле K многочлен $F(t)$ разлагается в произведение линейных сомножителей, т.е. имеет $\deg F(t)$ корней (с учетом кратности).

Различные неприводимые над $\mathbf{k}$ многочлены (в частности, различные неприводимые над $\mathbf{k}$ сомножители многочлена $F(t)$) имеют в K различные корни (иначе эти многочлены не были бы взаимно простыми).

Неприводимый многочлен называется *сепарабельным*, если в поле разложения этого многочлена все его корни *простые* (т.е. имеют кратность 1). Неприводимые несепарабельные многочлены существуют только над полями $\mathbf{k}$ конечной (= ненулевой) характеристики p и имеют вид $P(t) = \bar{P}(t^p)$, где $\bar{P}(t) \in \mathbf{k}[t]$, $\nu = p^n$ – *степень несепарабельности* многочлена $P(t)$ (ср. [9; с. 204–205] и [10; с. 142]). Любой корень несепарабельного неприводимого многочлена в поле разложения этого многочлена имеет кратность p^n .

5. Так как операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_K$ в соответствующих базисах имеют одну и ту же матрицу, их характеристические многочлены совпадают. Рассмотрим разложение этого многочлена $F(t)$ на неприводимые сомножители над полем $\mathbf{k}$:

$$F(t) = P_1(t)^{l_1} \cdots P_m(t)^{l_m}.$$

Все многочлены $P_i(t)$ будем считать унитарными (т.е. со старшим коэффициентом 1).

Пусть K – поле разложения многочлена $F(t)$. Таким образом, над полем K многочлены $P_i(t)$ разлагаются на линейные множители

$$P_i(t) = (t - \lambda_{i1})^{\nu_i} \cdots (t - \lambda_{i\delta_i})^{\nu_i}.$$

Здесь надо различать два случая.

Если $P_i(t)$ – несепарабельный многочлен, то $P_i(t) = \overline{P}_i(t^{\nu_i})$, где $\nu_i = p^{n_i}$ – степень несепарабельности многочлена $P_i(t)$, $p = \text{char } \mathbf{k}$, $\overline{P}_i(t)$ – неприводимый многочлен степени δ_i , так что $\deg P_i(t) = d_i = \delta_i \nu_i$. Если $P_i(t)$ – сепарабельный многочлен, то $\nu_i = 1$, $\delta_i = d_i = \deg P_i(t)$. Отметим, что в обоих случаях

$$\lambda_{ij} = \lambda_{i'j'} \Leftrightarrow i = i', j = j'.$$

Согласно классической теореме Жордана существует такой базис f пространства L_K , в котором матрица A_K линейного оператора $\mathcal{A}_K$ является прямой суммой жордановых клеток J_{ijk} с элементами λ_{ij} на главной диагонали, причем набор этих жордановых клеток один и тот же для различных таких базисов f . Количество жордановых клеток с λ_{ij} по главной диагонали обозначим через κ_{ij} , так что $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, \delta_i$, $k = 1, \dots, \kappa_{ij}$. Пусть s_{ijk} – порядок жордановой клетки J_{ijk} . Тогда

$$s_{ij1} + s_{ij2} + \cdots + s_{ij\kappa_{ij}} = l_i.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}$, определенный над полем $\mathbf{k}$, однозначно (с точностью до порядка слагаемых) представляется в виде прямой суммы неразложимых операторов (жордановых клеток), определенных над полем разложения K его характеристического многочлена $F(t)$. Задача в том, как получить подобное разложение в прямую сумму операторов, определенных и неразложимых над полем $\mathbf{k}$. Ключевую роль в решении этой задачи играет

ТЕОРЕМА 2. Пусть K – расширение поля $\mathbf{k}$. Обычная жорданова нормальная матрица J с элементами из поля K (и, следовательно, любая матрица над K , приводимая над K к жорданову нормальному виду J) будет матрицей некоторого оператора $\mathcal{A}_K$, где $\mathcal{A}$ – оператор над $\mathbf{k}$, если и только если выполняются следующие условия:

- (i) характеристический многочлен $F_J(t)$ матрицы J принадлежит $\mathbf{k}[t]$;
- (ii) число h_{ijs} жордановых клеток J_{ijk} матрицы J , имеющих порядок s , и диагональные элементы λ_{ij} , являющиеся корнями неприводимого над $\mathbf{k}$ многочлена $P_i(t)$, не зависят от j ;
- (iii) порядок s_{ijk} жордановой клетки J_{ijk} матрицы J кратен степени несепарабельности ν_i многочлена $P_i(t)$ над $\mathbf{k}$.

6. Разобьем доказательство этой теоремы на несколько этапов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть A – квадратная матрица и $P(t)$ – неприводимый многочлен, определенные над одним и тем же полем $\mathbf{k}$. Тогда для любых корней λ и λ' многочлена $P(t)$ и для всякого целого числа s

$$\text{rk}(\lambda E - A)^s = \text{rk}(\lambda' E - A)^s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует автоморфизм поля разложения K поля $\mathbf{k}$, который элементы из $\mathbf{k}$ оставляет неподвижными, а λ переводит в λ' (см. [9; с. 204]). Этот автоморфизм переводит $(\lambda E - A)^s$ в $(\lambda' E - A)^s$ и каждый минор первой матрицы – в соответствующий минор второй. Следовательно, минор одной из этих матриц является базисным тогда и только тогда, когда базисным является соответствующий минор другой. Значит, ранги этих матриц равны.

Пусть теперь A – матрица линейного оператора $\mathcal{A}$, определенного над полем $\mathbf{k}$, в некотором фиксированном базисе пространства L . В обозначениях п. 5 пусть r_{ijs} – ранг матрицы $(\lambda_{ij}E - A)^s$, где s – неотрицательное целое число, причем, как обычно, нулевую степень любой матрицы будем считать равной единичной матрице E . Число r_{ijs} не зависит от выбора базиса в пространстве L оператора $\mathcal{A}$, будучи инвариантным относительно преобразования подобия матриц. Число h_{ijs} жордановых клеток порядка s с λ_{ij} на главной диагонали равно $r_{ij(s-1)} - 2r_{ijs} + r_{ij(s+1)}$. Это непосредственно следует из того, что число жордановых клеток порядка $\geq s$ с λ_{ij} на главной диагонали равно $r_{ij(s-1)} - r_{ijs}$. В частности, общее число жордановых клеток с λ_{ij} на главной диагонали равно корангу матрицы $(\lambda_{ij}E - A)$.

СЛЕДСТВИЕ. *Выполнено следующее: h_{ijs} , а следовательно, и κ_{ij} не зависят от j . Более того, индексы k можно выбрать так, что s_{ijk} также не будет зависеть от j .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно вышедоказанному предложению при фиксированных i и k значение r_{ijs} одно и то же для всех j . Поэтому h_{ijs} и, следовательно, $\kappa_{ij} = \sum_s h_{ijs}$ не зависят от j . Если индексы k для жордановых клеток J_{ijk} при фиксированных i, j выбрать так, чтобы порядки жордановых клеток не возрастали при возрастании k , то s_{ijk} также не будет зависеть от j .

7. Докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *В обозначениях п. 5, если неприводимый многочлен $P_i(t)$ несепарабельный, то при любых j и k порядок s_{ijk} жордановой клетки J_{ijk} делится на степень несепарабельности $\nu_i = p^{n_i}$ этого многочлена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Семейство $\mathcal{A}$ -инвариантных подпространств L' пространства L таких, что $L'_K = K \otimes_{\mathbf{k}} L'$ содержит область определения L_{ijk} оператора J_{ijk} , не пусто и замкнуто относительно пересечений. Пересечение всех подпространств этого семейства обозначим $\langle L_{ijk} \rangle_{\mathbf{k}}$, а ограничение оператора $\mathcal{A}$ на это подпространство – через $\mathcal{A}_{ijk}$.

Согласно теореме Гамильтона–Кели $F(\mathcal{A}_K) = P_1(\mathcal{A}_K)^{l_1} \cdots P_m(\mathcal{A}_K)^{l_m} = 0$. Из этого нетрудно вывести, что $L_{ijk} \subset \text{Ker } P_i(\mathcal{A}_K)^{l_i}$. Воспользовавшись тем, что в соответствующих базисах матрицы операторов $P_i(\mathcal{A}_K)^l$ и $P_i(\mathcal{A})^l$ совпадают, заключаем, что

$$\text{Ker } P_i(\mathcal{A}_K)^l = K \otimes_{\mathbf{k}} \text{Ker } P_i(\mathcal{A})^l.$$

Поэтому $\langle L_{ijk} \rangle_{\mathbf{k}}$ лежит в $\text{Ker } P_i(\mathcal{A})^{l_i}$, т.е. $P_i(\mathcal{A}_{ijk})^{l_i} = 0$. Отсюда в силу неприводимости многочлена $P_i(t)$ над $\mathbf{k}$ получаем, что характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}_{ijk}$ равен $P_i(t)^{\sigma_{ijk}}$, $\sigma_{ijk} \leq l_i$. Над полем K оператор $\mathcal{A}_{ijk}$ разлагается в прямую сумму жордановых клеток $J_{ij'k}$, $j' = 1, \dots, \delta_i$, которые на основании следствия п. 6 имеют одинаковый порядок s_{ijk} . Значит $s_{ijk}\delta_i$ равен порядку матрицы оператора

$\mathcal{A}_{ijk}$, т.е. степени $\sigma_{ijk} \deg P_i(t)$ его характеристического многочлена. Здесь δ_i – число различных корней несепарабельного многочлена $P_i(t)$ степени несепарабельности ν_i , так что $\deg P_i(t) = \delta_i \nu_i$. Итак, $s_{ijk} = \sigma_{ijk} \nu_i$. Предложение доказано.

8. Из результатов, доказанных в пп. 5, 6 и 7, следует необходимость условий (i), (ii), (iii) теоремы 2 п. 5. Докажем достаточность этих условий.

Пусть (обычная) жорданова нормальная матрица J , определенная над полем K , удовлетворяет условиям (i), (ii), (iii) теоремы 2 п. 5. Рассмотрим прямую сумму $C = \bigoplus_{ik} C_{ik}$ всех циклических матриц $C_{ik} = [P_i(t)^{\sigma_{ik}}]$, где $\sigma_{ik} = s_{ijk} : \nu_i$ – натуральное число, не зависящее от j (в силу условий (ii) и (iii)). Матрица C определена над полем $\mathbf{k}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\mathbf{P}$ – сопровождающая матрица многочлена $P(t)$, который над полем K разлагается на линейные множители

$$P(t) = \det(tE - \mathbf{P}) = (t - \lambda_1)^{l_1} \cdots (t - \lambda_m)^{l_m},$$

то жорданов нормальный вид матрицы $\mathbf{P}$ над K является прямой суммой жордановых клеток $J_{l_i}(\lambda_i)$ порядка l_i с λ_i по главной диагонали, $i = 1, \dots, m$.

В частности, если $P(t)$ является l -й степенью неприводимого над полем $\mathbf{k}$ многочлена степени d , то жорданов нормальный вид матрицы $\mathbf{P}$ над полем разложения K многочлена $P(t)$ есть прямая сумма δ жордановых клеток одинакового порядка $l\nu$, где ν – степень несепарабельности неприводимого полинома и $\delta = d : \nu$.

Здесь многочлен $P(t)$ может быть как сепарабельным ($\nu = 1$), так и несепарабельным ($\nu \neq 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система из всех строк матрицы $(\lambda_i E - \mathbf{P})$ кроме последней, очевидно, линейно независима, а определитель этой матрицы равен 0. Поэтому ее коранг равен 1 и, следовательно, имеется всего одна жорданова клетка с λ_i на главной диагонали.

Согласно этому предложению каждое прямое слагаемое C_{ik} над K имеет жорданов нормальный вид $\bigoplus_j J_{ij k}$. Следовательно, C над K имеет жорданов нормальный вид J . Теорема 2 п. 5 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Всякая матрица $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{k})$ с характеристическим многочленом $F(t)$ подобна над $\mathbf{k}$ прямой сумме $C = \bigoplus C_{ik}$ циклических матриц $C_{ik} = [P_i(t)^{\sigma_{ik}}]$, где $F(t) = P_1(t)^{l_1} \cdots P_m(t)^{l_m}$ – разложение в произведение неприводимых над $\mathbf{k}$ многочленов, $\Sigma_k(\sigma_{ik} \nu_i) = l_i$, ν_i – степень несепарабельности $P_i(t)$, $i = 1, \dots, m$. В частности, любой оператор $\mathcal{A}$ n -мерного линейного пространства L над полем $\mathbf{k}$ в некотором базисе может быть представлен полициклической матрицей C указанного вида. При этом набор циклических матриц C_{ik} определяется однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица A над полем K разложения поля $\mathbf{k}$ приводится к жордановой нормальной форме J , удовлетворяющей условиям (i)–(iii) теоремы п. 5. Следовательно, согласно вышедоказанному J , а значит и A , подобна над полем K полициклической матрице C указанного вида. Тогда согласно [3; следствие 3, гл. 7, § 5, с. 75] A будет подобна C и над $\mathbf{k}$. Однозначность набора циклических матриц C_{ik} следует из единственности (обычной) жордановой нормальной формы оператора.

9. Перейдем к доказательству теоремы 1 п. 1. Рассмотрим (обычную) жорданову нормальную матрицу J оператора $\mathcal{A}$ над полем разложения K его характеристического многочлена, как в п. 5. Она будет удовлетворять условиям (i), (ii), (iii) теоремы 2.

Пусть C – соответствующая J полициклическая матрица над $\mathbf{k}$, построенная в п. 8. Заменим каждое прямое слагаемое $C_{ik} = [P_i(t)^{\sigma_{ik}}]$ матрицы C обобщенной жордановой клеткой $\mathbf{J}_{ik}$ второго рода, имеющей порядок $d_i \sigma_{ik}$ и сопровождающую матрицу $[P_i(t)]$ по главной диагонали, $d_i = \deg P_i(t)$. Положим $\mathbf{J} = \bigoplus_{i,k} \mathbf{J}_{ik}$. Матрицы C_{ik} и $\mathbf{J}_{ik}$ имеют одинаковый характеристический многочлен $P_i(t)^{\sigma_{ik}}$ и для любого его корня λ_{ij} матрицы $\lambda_{ij}E - C_{ik}$ и $\lambda_{ij}E - \mathbf{J}_{ik}$ имеют одинаковый коранг 1 (потому что определители этих матриц равны нулю и все их строки, кроме последней, линейно независимы). Поэтому над полем K эти матрицы имеют одинаковую (обычную) жорданову нормальную форму. Значит C_{ik} и $\mathbf{J}_{ik}$ подобны над K . Поскольку они определены над $\mathbf{k}$, то будут подобны и над $\mathbf{k}$. Но тогда над $\mathbf{k}$ подобны также матрицы $C = \bigoplus_{i,k} C_{ik}$ и $\mathbf{J} = \bigoplus_{i,k} \mathbf{J}_{ik}$. Первая половина теоремы 1 доказана.

Из следствия к предложению п. 6 и доказательства существования обобщенной жордановой нормальной формы оператора $\mathcal{A}$ следует, что число ее обобщенных жордановых клеток, по главной диагонали которых стоят s сопровождающих матриц полинома $P_i(t)$, есть (не зависящее от j) число $h_{ijs} = r_{ij(s-1)} - 2r_{ijs} + r_{ij(s+1)}$, где $r_{ijs} = \text{rk}(\lambda_{ij}E - A_e)^s$. Это одновременно доказывает вторую часть теоремы 1 и дает способ построения обобщенной жордановой нормальной формы. Отметим, что из единственности разложения линейного оператора в прямую сумму матриц какого-либо типа (в частности, обобщенных жордановых нормальных матриц второго рода) следует неразложимость матриц этого типа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенное доказательство без каких-либо изменений применимо к модификации теоремы 1, где блоки $[P_i(t)]$, являющиеся сопровождающими матрицами неприводимых многочленов, заменяются произвольными матрицами D_i , у которых

- (i) одинаковый с этим блоком характеристический многочлен: $|tE - D_i| = P_i(t)$;
- (ii) дополнительный минор матрицы $tE - D_i$ к первому элементу последней строки взаимно прост с $P_i(t)$.

10. Приведем два приложения полученных результатов.

Во-первых, получим рациональную каноническую форму оператора $\mathcal{A}$. Возьмем представление $\mathcal{A}$ в виде прямой суммы обобщенных жордановых клеток второго рода $\mathbf{J}_{ik}$, где i нумерует неприводимые делители $P_i(t)$ характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$ над полем $\mathbf{k}$, а k нумерует жордановы клетки $\mathbf{J}_{ik}$ с характеристическим многочленом, являющимся степенью $P_i(t)$. Для каждого i возьмем жорданову клетку $\mathbf{J}_{ik}$ максимального порядка и обозначим через $d^{(1)}$ произведение их характеристических многочленов. Исключим из рассмотрения выбранные клетки и, исходя из оставшихся клеток, аналогичным образом получим многочлен $d^{(2)}$. Будем продолжать так до тех пор, пока полностью не исчерпаем все жордановы клетки $\mathbf{J}_{ik}$. Нетрудно проверить, что оператор $\mathcal{A}$ представим матрицей $\bigoplus_i [d^{(i)}]$, где $d^{(i+1)} \mid d^{(i)}$, и такое представление единственно.

Во-вторых, построим специфическую каноническую форму для вещественных линейных операторов. Над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, кроме линейных, неприводимыми являются еще только квадратичные многочлены $P(t) = t^2 + ut + v$ с отрицательным дискриминантом $D = u^2 - 4v$ и комплексными корнями $a \pm bi$, где $2a = -u$, $a^2 + b^2 = v$. Сопровождающая матрица $[P(t)]$ и матрица

$$[a + bi] = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

являющаяся матричной интерпретацией комплексного числа $a + bi$ при $b \neq 0$, имеют один и тот же характеристический многочлен. Поэтому обобщенная жорданова матрица над $\mathbb{R}$ (а следовательно, и любая вещественная матрица) будет подобна матрице, являющейся прямой суммой блоков двух типов. Один тип – это классические жордановы клетки с вещественными числами по главной диагонали. Другой тип – специфические обобщенные жордановы клетки, у которых на главной диагонали стоят блоки вида $[a + bi]$, непосредственно выше (и левее) их – блоки $\mathbf{F}$ второго порядка, а все остальные элементы – нули. Поскольку над полем характеристики 0 (в частности, над $\mathbb{C}$) все многочлены сепарабельны, блоки $\mathbf{F}$ можно заменить единичными матрицами $\mathbf{E}$ второго порядка. Итак, каждый вещественный оператор может быть представлен матрицей указанного вида. Частным (“диагонализуемым”) случаем этого результата является теорема 1 [1; с. 171]. В связи с этим возникает естественный вопрос: существует ли аналогичный канонический вид в случае произвольного поля $\mathbf{k}$?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. М. Постников, *Линейная алгебра и дифференциальная геометрия*, Лекции по геометрии; Семестр 2, Наука, М., 1979.
- [2] А. И. Мальцев, *Основы линейной алгебры*, Наука, М., 1975.
- [3] Н. Бурбаки, *Алгебра. Модули, кольца, формы*, Наука, М., 1966.
- [4] S. Al Fakir, *Algèbre et théorie des nombres: cryptographie, primalité*, Ellipses, Paris, 2003.
- [5] M. Artin, *Algebra*, Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [6] А. И. Кострикин, Ю. И. Манин, *Линейная алгебра и геометрия*, Наука, М., 1986.
- [7] С. Г. Далалян, “Обобщенный жорданов нормальный вид матрицы с сепарабельными неприводимыми делителями характеристического многочлена”, *Вестник РА(С)ГУ, Физ.-мат. и естест. науки*, **1** (2005), 7–14.
- [8] И. Р. Шафаревич, *Основные понятия алгебры*, РХД, М., 1999.
- [9] С. Ленг, *Алгебра*, Мир, М., 1968.
- [10] Н. Бурбаки, *Алгебра, Многочлены и поля. Упорядоченные группы*, Наука, М., 1965.

С. Г. Далалян

Ереванский государственный университет
E-mail: dalalian@freenet.am

Поступило

06.10.2006