Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Елагин, Об исключительных наборах на некоторых поверхностях дель Пеццо с одной лог-терминальной особенностью, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 1, 36–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3751>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:49:09

УДК 514.755

Об исключительных наборах на некоторых поверхностях дель Пеццо с одной лог-терминальной особенностью

А. Д. Елагин

В работе построены полные исключительные наборы когерентных пучков на некотором семействе лог-терминальных поверхностей дель Пеццо, рассматриваемых как гладкий стек. Эти поверхности не являются торическими, они могут быть заданы как гиперповерхности во взвешенном трехмерном проективном пространстве.

Библиография: 11 названий.

1. Введение

Пусть X – алгебраическое многообразие, $\mathrm{coh}(X)$ – категория когерентных пучков на X . Один из способов описания ограниченной производной категории $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ – построение в ней исключительного набора объектов.

Напомним, объект E триангулированной $\mathbb{C}$ -линейной категории называется *исключительным*, если $\mathrm{Hom}(E, E) = \mathbb{C}$ и $\mathrm{Hom}^i(E, E) = 0$ при $i \neq 0$; упорядоченный набор объектов $(E_1, \dots, E_n)$ называется *исключительным*, если все его объекты исключительны и $\mathrm{Hom}^i(E_k, E_l) = 0$ при $k > l$ и всех $i \in \mathbb{Z}$. Набор называется *полным*, если его объекты порождают всю триангулированную категорию.

Разумеется, полные исключительные наборы существуют далеко не во всех категориях. Однако для некоторых классов многообразий X известно, что в $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ имеется полный исключительный набор. Скажем о двух таких результатах. На гладких поверхностях дель Пеццо исключительные наборы были построены и детально исследованы Орловым и Кулешовым [1], [2]. Кавамата доказал существование полного исключительного набора на торических многообразиях с факторособенностями [3].

В этой работе мы построим полные исключительные наборы на некотором семействе гиперповерхностей во взвешенных проективных пространствах. А именно, мы рассматриваем гиперповерхности степени $4n - 2$ в $\mathbb{P}(1, 2, 2n - 1, 4n - 3)$. Это особые поверхности дель Пеццо с единственной особой точкой, они не являются торическими. Мы рассматриваем эти особые поверхности как гладкий стек. Структуру стека на проективном многообразии $X = \mathrm{Proj} S$, где S – конечно порожденная над полем $\mathbb{C} = S_0$ коммутативная градуированная алгебра, можно задать с помощью

Работа выполнена при поддержке CRDF (грант № RUM1-2661-MO-05).

© А. Д. Елагин, 2007

действия $\mathbb{C}^*$ на квазиаффинном многообразии $(\mathrm{Spec} S) \setminus \{0\}$, связанного с градуировкой на S . Пучки на таком стеке – это по определению $\mathbb{C}^*$ -эквивариантные пучки на $(\mathrm{Spec} S) \setminus \{0\}$ относительно указанного действия. Согласно [4; предложение 2.3] категория $\mathrm{coh}^{\mathbb{C}^*}((\mathrm{Spec} S) \setminus \{0\})$ эквивариантных пучков на $(\mathrm{Spec} S) \setminus \{0\}$ эквивалентна факторкатегории $\mathrm{qgr}(S) = \mathrm{gr}(S)/\mathrm{tors} S$ конечно порожденных градуированных S -модулей по подкатегории модулей кручения. По теореме Серра, если алгебра S порождена над полем своей однородной компонентой S_1 , то категория $\mathrm{qgr}(S)$ эквивалентна категории $\mathrm{coh}(X)$ когерентных пучков на $X = \mathrm{Proj} S$.

Поверхности, которые мы рассматриваем, вложены во взвешенное проективное пространство, поэтому они естественным образом представляются в виде $\mathrm{Proj} A$, где $A = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_3]/(f)$ – факторалгебра алгебры взвешенных многочленов. При этом компонента A_1 не порождает всей алгебры A и в действительности категории $\mathrm{coh}^{\mathbb{C}^*}(\mathrm{Spec} A \setminus \{0\}) \cong \mathrm{qgr}(A)$ и $\mathrm{coh}(\mathrm{Proj} A)$ неэквивалентны. Мы построим исключительные наборы в первой из этих категорий, причем будем работать в терминах модулей над алгеброй A .

Для всякой гиперповерхности $X = \mathrm{Proj} S$ степени d в $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$, задаваемой алгеброй $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]/(f(x))$, в категории $\mathbf{D}^b(\mathrm{qgr}(S))$ есть исключительный набор $(S, S(1), \dots, S(-\kappa - 1))$, где $\kappa = d - \sum a_i$. В рассматриваемом случае это дает набор $(A, A(1), \dots, A(2n))$; он не является полным. Для построения полного набора мы определяем модули χ_j с носителем в особой точке $P \in X$. Они соответствуют структурному пучку особой точки, но несут разную структуру эквивариантного пучка. С их помощью можно образовать набор $(A, \dots, A(2n), \chi_{2n}, \chi_{2n-1}, \dots, \chi_4, \chi_3)$. Он порождает всю категорию, но не будет исключительным. Чтобы получить из него исключительный набор, нужно произвести некоторые перестройки с модулями χ_4 и χ_3 .

Напомним, что левая и правая перестройки $L_X(Y)$ и $R_Y(X)$ объектов X и Y друг относительно друга в триангулированной категории определяются с помощью выделенных треугольников

$$L_X(Y) \rightarrow \mathrm{Hom}^*(X, Y) \otimes X \rightarrow Y \quad \text{и} \quad X \rightarrow \mathrm{Hom}^*(X, Y)^* \otimes Y \rightarrow R_Y(X).$$

Левая перестройка объекта относительно исключительного набора определяется по индукции: $L_{\langle E_1 \rangle}(X) = L_{E_1}(X)$ и $L_{\langle E_1, \dots, E_r \rangle}(X) = L_{E_1}(L_{\langle E_2, \dots, E_r \rangle}(X))$; правая перестройка определяется аналогично. Подробнее о перестройках смотри в [5].

Один из возможных полных исключительных наборов в $\mathbf{D}^b(\mathrm{qgr}(A))$ выглядит так:

$$(A, A(1), \dots, A(2n-2), G_{2n-1}, A(2n-1), G_{2n}, A(2n), \chi_{2n}, \chi_{2n-1}, \dots, \chi_6, \chi_5).$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_{2n} &= L_{\langle A(2n), \chi_{2n}, \chi_{2n-2}, \dots, \chi_8, \chi_6 \rangle}(\chi_4)[n-2], \\ G_{2n-1} &= L_{\langle A(2n-1), \chi_{2n-1}, \chi_{2n-3}, \dots, \chi_7, \chi_5 \rangle}(\chi_3)[n-2] \end{aligned}$$

являются подкрученными идеалами в алгебре A . Доказательства находятся в разделе 3, теоремы 3.1 и 3.4.

С исключительным набором $(E_1, \dots, E_m)$ в триангулированной категории связана градуированная ассоциативная алгебра

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{1 \leq k \leq l \leq m} \text{Hom}^i(E_k, E_l),$$

где умножением служит композиция морфизмов. Если эта алгебра сосредоточена в степени 0, то по ней можно восстановить триангулированную категорию, порожденную объектами набора – она эквивалентна $\mathbf{D}^b(\text{mod } -\mathcal{A})$ (см. [5]). В общем случае алгебра $\mathcal{A}$ также несет много информации о порожденной набором категории. Мы вычисляем алгебру морфизмов для одного из полных исключительных наборов в $\mathbf{D}^b(\text{qgr}(A))$ в разделе 4.

2. Определение и свойства основных объектов

Фиксируем некоторое натуральное число n , $n \geq 2$.

Пусть B – градуированная алгебра многочленов $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$, где x_0, x_1, x_2, x_3 – однородные образующие степеней 1, 2, $2n-1$, $4n-3$ соответственно.

Проективный спектр $\text{Proj } B$ является взвешенным проективным пространством $\mathbb{P}(1, 2, 2n-1, 4n-3)$. Это особое многообразие, оно имеет три особые точки – три циклические факторособенности типов

$$\frac{1}{2}(1, 1, 1), \quad \frac{1}{2n-1}(1, 2, -1), \quad \frac{1}{4n-3}(1, 2, 2n-1).$$

2.1. Определение поверхности X , ее геометрические свойства. Рассмотрим гиперповерхность X в $\mathbb{P}(1, 2, 2n-1, 4n-3)$, заданную общим однородным многочленом степени $d = 4n-2$. Нетрудно проверить, что все такие поверхности переводятся друг в друга автоморфизмами проективного пространства. Точнее говоря, имеет место следующая

ЛЕММА 2.1. Пусть коэффициенты при мономах x_0x_3 , x_2^2 и x_1^{2n-1} в однородном многочлене $f(x) \in B$ степени $4n-2$ отличны от нуля. Тогда однородной заменой координат во взвешенном проективном пространстве над полем $\mathbb{C}$ многочлен $f(x)$ можно привести к виду $f(x) = x'_0x'_3 + (x'_1)^{2n-1} + (x'_2)^2$.

В дальнейшем будем считать, что

$$f(x) = x_0x_3 + x_1^{2n-1} + x_2^2. \quad (1)$$

Изучим поверхность X с геометрической точки зрения.

Рис. 1

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Выполнены следующие пункты.

- (а) Поверхность X рациональна.
- (б) X имеет единственную особенность в точке $P = (0 : 0 : 0 : 1)$.

(с) Точка P – циклическая факторособенность типа

$$\frac{1}{4n-3}(1, 4);$$

конфигурация исключительных кривых на ее минимальном разрешении имеет вид, изображенный на рис. 1.

(d) X – поверхность дель Пеццо, $\text{Pic } X = \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты (а), (b), (с) проверяются несложными вычислениями в координатах. Конфигурация исключительных кривых на минимальном разрешении особенности определяется согласно [6; раздел 2.6] разложением $(4n-3)/4$ в цепную дробь:

$$\frac{4n-3}{4} = n - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}$$

(d) Вырежем из X сечение гиперповерхностью $x_0 = 0$. Оно неприводимо, так как задается в $\mathbb{P}(2, 2n-1, 4n-3)$ неприводимым уравнением $x_1^{2n-1} + x_2^2 = 0$. После вырезания получим пересечение $X \cap U_0$. Оно изоморфно аффинной плоскости, поэтому $\text{Cl}(X \cap U_0) = 0$. Отсюда получаем (см., например, [7; предложение II.6.5]), что $\text{Cl } X$ порождена “типиплоским” сечением X . Следовательно, $\text{Pic } X = \mathbb{Z}$.

По формуле присоединения для $\mathbb{P}^3(1, 2, 2n-1, 4n-3)$ и X получаем, что антиканонический дивизор $-K_X$ на X эффе́ктивен, так как $(-1 - 2 - (2n-1) - (4n-3)) + (4n-2) < 0$. А значит, и обиле́н, так как $\text{Cl } X = \mathbb{Z}$.

Опишем последовательность бирациональных преобразований, переводящую поверхность X в неособую минимальную рациональную поверхность.

Пусть $\mathbf{F}_n$ – поверхность Хирцебруха, $\mathbf{F}_n = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n))$. Раздувая три точки как показано на рис. 2, получим поверхность $\tilde{X}$.

Рис. 2

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Поверхность $\tilde{X}$ является минимальным разрешением особенностей X . Исключительный дивизор при этом состоит из собственных прообразов кривых E_0, E_1, E_2, E_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из классификации поверхностей дель Пеццо над полем $\mathbb{C}$ с одномерной группой Пикара и единственной циклической факторособенностью, данной в [8; теорема 4.1]. Подробности мы опускаем.

2.2. Определение основных модулей, их свойства. Через A обозначим градуированную $\mathbb{C}$ -алгебру

$$A = B/(f) = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_0x_3 + x_1^{2n-1} + x_2^2),$$

отвечающую поверхности X . Если M – градуированный A -модуль, то $M(k)$ будет обозначать модуль M с градуировкой, сдвинутой на k : $M(k)_i = M_{k+i}$. Ниже мы определим A -модули, которые понадобятся для построения исключительных наборов.

Рассмотрим A -модули

$$\chi = \chi_0 = A/(x_0, x_1, x_2) \cong \mathbb{C}[x_3] \quad \text{и} \quad \chi_j = \chi(j).$$

Их носитель – единственная особая точка поверхности X . Однородные компоненты $(\chi_j)_k$ модуля χ_j одномерные при $k \geq -j$ и $k \equiv -j \pmod{4n-3}$, нулевые в остальных случаях.

Имеется инъективный гомоморфизм $\chi_k \rightarrow \chi_{k+4n-3}$, задающийся умножением на x_3 . Коядро этого гомоморфизма есть модуль кручения; следовательно, в категории $\text{qgr}(A)$ он будет изоморфизмом. Таким образом, в категории $\text{qgr}(A)$ существует $4n-3$ объекта χ_j с точностью до изоморфизма.

Более общо, определим модули $Q_{j+2r,j}$ равенством

$$Q_{j+2r,j} = (A/(x_0, x_1^{r+1}, x_2))(j+2r) \cong (\mathbb{C}[x_1, x_3]/(x_1^{r+1}))(j+2r)$$

для целых j и r таких, что $0 \leq r < 2n-1$. Их носитель также является особой точкой поверхности. Однородные компоненты модуля $Q_{j+2r,j}$ степени k одномерны при $k \geq -(j+2r)$ и $k \equiv -(j+2r), \dots, -(j+2), -j \pmod{4n-3}$ и нулевые в противном случае. Из определения получаем, что имеется изоморфизм $\chi_j \cong Q_{j,j}$.

Имеются следующие точные последовательности (для $r \geq 0, s > 0, r+s < 2n-1$):

$$0 \rightarrow Q_{j+2r,j} \rightarrow Q_{j+2r+2s,j} \rightarrow Q_{j+2r+2s,j+2r+2} \rightarrow 0. \quad (2)$$

Здесь первое отображение индуцировано умножением на x_1^s , а второе – дофакторизация. Как частные случаи (2) получаем точные последовательности

$$0 \rightarrow Q_{j+2r-2,j} \rightarrow Q_{j+2r,j} \rightarrow \chi_{j+2r} \rightarrow 0, \quad (3)$$

$$0 \rightarrow \chi_j \rightarrow Q_{j+2r,j} \rightarrow Q_{j+2r,j+2} \rightarrow 0. \quad (4)$$

В качестве следствия заметим, что у модуля $Q_{j+2k,j}$ есть фильтрация

$$0 \subset Q_{j,j} \subset Q_{j+2,j} \subset Q_{j+4,j} \subset \dots \subset Q_{j+2k-2,j} \subset Q_{j+2k,j}, \quad (5)$$

факторы которой изоморфны $\chi_j, \chi_{j+2}, \chi_{j+4}, \dots, \chi_{j+2k-2}, \chi_{j+2k}$ соответственно.

Так как $A/(x_0, x_1) \cong \mathbb{C}[x_2, x_3]/(x_2^2)$, имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow \chi_j \xrightarrow{x_2} (A/(x_0, x_1))(j+2n-1) \rightarrow \chi_{j+2n-1} \rightarrow 0. \quad (6)$$

Здесь первое отображение индуцировано умножением на x_2 , а второе – дофакторизация.

ЛЕММА 2.4. *Существуют точные последовательности*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow A(-3) \rightarrow A(-1) \oplus A(-2) \rightarrow A \rightarrow A/(x_0, x_1) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow A(-2n) \rightarrow A(-1) \oplus A(-2n+1) \rightarrow A \rightarrow Q_{0, -4n+4} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти точные последовательности получаются из комплекса Кошуля для последовательностей x_0, x_1 и x_0, x_2 . Нетрудно проверить, что эти последовательности регулярны; также нужно заметить, что

$$A/(x_0, x_2) = A/(x_0, x_1^{2n-1}, x_2) = Q_{0, -4n+4},$$

так как $x_1^{2n-1} \in (x_0, x_2)$ по определению алгебры A .

2.3. Вычисление пространств Ext между основными модулями. Цель этого раздела – вычисление пространств Ext'ов между модулями $A(i)$ и χ_j в факторкатегории $\text{qgr}(A)$.

Напомним, что $\text{qgr}(A)$ обозначает факторкатегорию категории $\text{gr}(A)$ конечно порожденных градуированных A -модулей по подкатегории модулей кручения. Также полезно рассматривать категорию $\text{Gr}(A)$, образованную всеми градуированными A -модулями, и ее факторкатегорию $\text{QGr}(A)$. В $\text{QGr}(A)$ имеется достаточно много инъективных объектов, поэтому можно определить функторы Ext как производные от Hom по второму аргументу. Тем самым определены функторы Ext и на категории $\text{qgr}(A)$; подробности смотри в работе [9].

Мы будем пользоваться следующим хорошо известным (см., например, [10]) результатом о группах Ext на взвешенных проективных пространствах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Для градуированной алгебры $B = \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_m]$, порожденной однородными образующими x_i степеней a_i соответственно, в категории $\text{qgr}(B)$ имеют место следующие равенства:*

$$\begin{aligned} \text{Hom}(B, B(k)) &= B_k \text{ при } k \geq 0, \text{ Hom}(B, B(k)) = 0 \text{ иначе;} \\ \text{Ext}^i(B, B(k)) &= 0 \text{ при } 1 \leq i \leq m-1 \text{ и при любых } k; \\ \text{Ext}^m(B, B(k)) &= B_{-s-k}^* \text{ при } k \leq -s, \text{ где } s = \sum a_i, \text{ Ext}^m(B, B(k)) = 0 \text{ иначе;} \\ \text{а также естественные по } N \text{ изоморфизмы для } i = 0, \dots, m: \\ \text{Ext}^i(B, N) &\cong \text{Ext}^{m-i}(N, B(-s))^*, \text{ где } s = \sum a_i. \end{aligned}$$

В следующем предложении содержится основной результат этого раздела.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Пусть A – алгебра, описанная в разделе 2.2. Тогда в категории $\text{qgr}(A)$ имеют место следующие равенства:*

- (a) $\text{Hom}(A(k), A(l)) = A_{l-k}$ при $k \leq l$,
 $\text{Ext}^2(A(k), A(l)) = A_{k-l-(2n+1)}^*$ при $k - l \geq 2n + 1$,
 $\text{Ext}^i(A(k), A(l)) = 0$ в остальных случаях;
- (b) $\text{Hom}(A(k), \chi_j) = \mathbb{C}$ при $k \equiv j \pmod{4n-3}$,
 $\text{Ext}^i(A(k), \chi_j) = 0$ в остальных случаях;
- (c) $\text{Ext}^2(\chi_k, A(j)) = \mathbb{C}$ при $j \equiv k - (2n+1) \pmod{4n-3}$,
 $\text{Ext}^i(\chi_k, A(j)) = 0$ в остальных случаях;

- (d) $\text{Hom}(\chi_k, \chi_j) = \mathbb{C}$ при $k \equiv j \pmod{4n-3}$,
 $\text{Ext}^1(\chi_k, \chi_j) = \mathbb{C}$ при $j \equiv k-2 \pmod{4n-3}$ или $j \equiv k-(2n-1) \pmod{4n-3}$,
 $\text{Ext}^2(\chi_k, \chi_j) = \mathbb{C}$ при $j \equiv k-(2n+1) \pmod{4n-3}$,
 $\text{Ext}^i(\chi_k, \chi_j) = 0$ в остальных случаях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $k = 0$, так как

$$\text{Ext}^i(M, N) \cong \text{Ext}^i(M(k), N(k)).$$

Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2.7. Пусть $B = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_m]$ – градуированная алгебра многочленов, порожденная однородными переменными x_i степеней a_i соответственно, $f = f(x_i)$ – однородный многочлен степени d , $A = B/(f)$ – факторалгебра. Тогда имеется естественный изоморфизм $\text{Ext}_{\text{QGr}(A)}^i(A, M) \cong \text{Ext}_{\text{QGr}(B)}^i(B, M)$ для любого A -модуля M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функторы $\sigma'^*: \text{Gr}(B) \rightarrow \text{Gr}(A)$, $\sigma'^*(N) = N \otimes_B A$, и $\sigma'_*: \text{Gr}(A) \rightarrow \text{Gr}(B)$, $\sigma'_*(M) = M$. Функтор σ'^* является левым сопряженным к функтору σ'_* . Можно продолжить их до сопряженных функторов σ^* и σ_* , определенных на категориях $\text{QGr}(B)$ и $\text{QGr}(A)$. Далее, в категории $\text{QGr}(B)$ достаточно много σ^* -ациклических объектов (для любого модуля $M \in \text{QGr}(B)$ существует накрытие $\bigoplus_{\alpha} B(k_{\alpha}) \rightarrow M$), поэтому существует производный функтор $L\sigma^*$, а так как σ_* точен, то существует производный функтор $R\sigma_* = L\sigma_*$. Согласно [11; лемма 15.6], функторы $L\sigma^*$ и $R\sigma_*$ сопряжены: для любых объектов $X \in \mathbf{D}^+(\text{QGr}(A))$, $Y \in \mathbf{D}^-(\text{QGr}(B))$ имеем

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}(\text{QGr}(A))}(L\sigma^*(Y), X) \cong \text{Hom}_{\mathbf{D}(\text{QGr}(B))}(Y, R\sigma_*(X)). \quad (7)$$

Применив эту формулу к $(-j)$ -комплексам $X = M[j]$ и 0-комплексу $Y = B[0]$, получим доказываемое утверждение.

Докажем теперь предложение 2.6.

(a) Согласно лемме, имеем $\text{Ext}_{\text{QGr}(A)}^i(A, A(l)) = \text{Ext}_{\text{QGr}(B)}^i(B, A(l))$. Вычислим группы $\text{Ext}_{\text{QGr}(B)}^i(B, A(l))$, применяя к точной последовательности B -модулей

$$0 \rightarrow B(l - (4n - 2)) \xrightarrow{\cdot f(x)} B(l) \rightarrow A(l) \rightarrow 0$$

функтор $\text{Hom}(B, \cdot)$. Члены $\text{Ext}^i(B, B(j))$ в полученной длинной точной последовательности известны из предложения 2.5, и простые вычисления приводят к нужному результату.

(b), (d) Для нахождения $\text{Ext}^i(\cdot, \chi_j)$ мы перейдем к вычислениям над окрестностью особой точки P . Пусть $D_{x_3} = \{x_3 \neq 0\}$ – окрестность точки P в X , $s: D_{x_3} \rightarrow X$ – ее вложение в X . Вложению s соответствует гомоморфизм локализации $A \rightarrow A[x_3^{-1}]$.

Рассмотрим два функтора между категориями $\text{QGr}(A)$ и $\text{Gr}(A[x_3^{-1}])$, связанные с вложением s . Это прямой образ $s_*: \text{Gr}(A[x_3^{-1}]) \rightarrow \text{QGr}(A)$, $s_*(M) = M$, и локализация $s^*: \text{QGr}(A) \rightarrow \text{Gr}(A[x_3^{-1}])$. Для корректного определения последней необходимо заметить, что модули кручения над A при локализации становятся нулевыми.

Так как функторы s_* и s^* точны и s_* является левым сопряженным к s^* , имеем естественные изоморфизмы

$$R^i \operatorname{Hom}_{\operatorname{QGr}(A)}(M, s_*(N)) \cong R^i \operatorname{Hom}_{A[x_3^{-1}]}(s^*(M), N) \quad (8)$$

для любых A -модуля M и $A[x_3^{-1}]$ -модуля N .

Рассмотрим модуль $X = A[x_3^{-1}]/(x_1, x_2) = \mathbb{C}[x_3, x_3^{-1}]$ над кольцом $A[x_3^{-1}]$. Подмодуль модуля $s_*(X)$, порожденный компонентами неотрицательной степени, изоморфен модулю χ . При этом фактормодуль $s_*(X)/\chi$ – модуль кручения, поэтому χ и $s_*(X)$ изоморфны в категории $\operatorname{QGr}(A)$. Подкручивая, получаем, что $\chi(j) \cong s_*(X(j))$.

(b) Применим формулу (8) к модулям $M = A$ и $N = X(j)$. Так как $s^*(A) = A[x_3^{-1}]$, получим, что $\operatorname{Ext}_{\operatorname{QGr}(A)}^i(A, \chi_j) \cong \operatorname{Ext}_{\operatorname{Gr}(A[x_3^{-1}])}^i(A[x_3^{-1}], X(j))$. Но в категории градуированных $A[x_3^{-1}]$ -модулей функтор $\operatorname{Hom}(A[x_3^{-1}], \cdot)$ точен:

$$\operatorname{Hom}(A[x_3^{-1}], N) = N_0,$$

откуда легко получаем требуемое.

(d) Теперь вычислим пространства $\operatorname{Ext}(\chi, \chi_j)$. Применяя формулу (8) к модулям $M = s_*(X)$, $N = X(j)$, с учетом изоморфизма $s^*s_* \cong \operatorname{Id}$ получаем, что интересующие нас пространства $\operatorname{Ext}_{\operatorname{QGr}(A)}(\chi, \chi_j)$ изоморфны $\operatorname{Ext}_{\operatorname{Gr}(A[x_3^{-1}])}(X, X(j))$.

Нетрудно проверить, что кольцо $A[x_3^{-1}]$ изоморфно $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_3^{-1}]$ и у модуля $X = A[x_3^{-1}]/(x_1, x_2)$ есть свободная $A[x_3^{-1}]$ -резольвента – комплекс Кошуля:

$$0 \rightarrow A[x_3^{-1}](-2n-1) \rightarrow A[x_3^{-1}](-2n+1) \oplus A[x_3^{-1}](-2) \rightarrow A[x_3^{-1}] \rightarrow X \rightarrow 0.$$

Вычисляя $\operatorname{Ext}(X, X(j))$ с помощью этой резольвенты и результата пункта (b), получаем

$$\operatorname{Hom}(X, X) = \mathbb{C},$$

$$\operatorname{Ext}^1(X, X(-2)) = \mathbb{C}, \quad \operatorname{Ext}^1(X, X(-2n+1)) = \mathbb{C}, \quad \operatorname{Ext}^2(X, X(-2n-1)) = \mathbb{C};$$

прочие группы Ext нулевые. Что и требовалось.

(c) Следует из пункта (b) с помощью двойственности из следующей леммы.

ЛЕММА 2.8. Пусть $B = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_m]$ – алгебра многочленов с градуировкой $\deg(x_i) = a_i$, $f = f(x_i)$ – однородный многочлен степени d , $A = B/(f)$ – факторалгебра. Тогда имеется естественный изоморфизм

$$\operatorname{Ext}_{\operatorname{QGr}(A)}^i(A, M) \cong \operatorname{Ext}_{\operatorname{QGr}(A)}^{m-1-i}(M, A(d-s))^*$$

для любого A -модуля M , где $s = \sum a_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство основано на переходе к категории B -модулей и использовании двойственности для взвешенного проективного пространства. Имеем

$$\operatorname{Ext}_{\operatorname{QGr}(A)}^i(A, N) = \operatorname{Ext}_{\operatorname{QGr}(B)}^i(B, N) = \operatorname{Ext}_{\operatorname{QGr}(B)}^{m-i}(N, B(-s))^*. \quad (9)$$

Здесь первое равенство следует из леммы 2.7, а второе – из предложения 2.5.

Определим функтор $\sigma^!: \text{Gr}(B) \rightarrow \text{Gr}(A)$ с помощью равенства

$$\sigma^!(N) = \underline{\text{Hom}}_B(A, N) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\text{Gr}(B)}(A, N(k))[-k].$$

Он является правым сопряженным к функтору прямого образа $\sigma'_*: \text{Gr}(A) \rightarrow \text{Gr}(B)$. Функторы σ'_* и $\sigma^!$ можно продолжить до сопряженных функторов σ_* и $\sigma^!$, определенных на категориях $\text{QGr}(A)$ и $\text{QGr}(B)$. Далее, в категории $\text{QGr}(B)$ достаточно много инъективных объектов, поэтому определен производный функтор

$$R\sigma^!: \mathbf{D}^+(\text{QGr}(B)) \rightarrow \mathbf{D}^+(\text{QGr}(A)).$$

Согласно [11; лемма 15.6], производные функторы $L\sigma_*$ и $R\sigma^!$ также будут сопряженными:

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}(\text{QGr}(A))}(X, R\sigma^!(Y)) = \text{Hom}_{\mathbf{D}(\text{QGr}(B))}(L\sigma_*(X), Y) \quad (10)$$

для любых объектов $X \in \mathbf{D}^-(\text{QGr}(A))$ и $Y \in \mathbf{D}^+(\text{QGr}(B))$.

Применяя формулу (10) к $X = N[0]$ и $Y = B(-s)[j]$, получим

$$\text{Ext}_{\text{QGr}(B)}^j(N, B(-s)) \cong \text{Hom}_{\mathbf{D}(\text{QGr}(A))}(N[0], R\sigma^!(B(-s)[j])). \quad (11)$$

Для вычисления правой части посчитаем $R^i\sigma^!(B(-s)[j]) = R^{i+j}\sigma^!B(-s)$.

Сначала вычислим $R^i\underline{\text{Hom}}(B(r), B(-s))$, где r произвольно. Из определений следует, что $R^i\underline{\text{Hom}}(B(r), B(-s)) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Ext}_{\text{QGr}(B)}^i(B(r), B(-s+k))[-k]$. Если $i > 0$, то по предложению 2.5 $\text{Ext}^i(B(r), B(-s+k)) = 0$ для достаточно больших k , и, значит, объект факторкатегории $R^i\underline{\text{Hom}}(B(r), B(-s))$ равен нулю. При $i = 0$ из предложения 2.5 следует, что $\underline{\text{Hom}}(B(r), B(-s)) = B(-s-r)$.

Применим к последовательности

$$0 \rightarrow B(-d) \xrightarrow{\cdot f} B \rightarrow A \rightarrow 0$$

функтор $\underline{\text{Hom}}(\cdot, B(-s))$. Члены вида

$$R^i\underline{\text{Hom}}(B(r), B(-s))$$

в полученной длинной точной последовательности нам известны, и мы находим, что

$$\underline{\text{Hom}}(A, B(-s)) = 0, \quad R^1\underline{\text{Hom}}(A, B(-s)) = A(d-s), \quad R^i\underline{\text{Hom}}(A, B(-s)) = 0$$

при $i > 1$. Следовательно, комплекс $R\sigma^!(B(-s))$ есть $A(d-s)[-1]$.

Комбинируя (9) и (11), получаем

$$\text{Ext}_{\text{QGr}(A)}^i(A, N) \cong \text{Hom}_{\mathbf{D}(\text{QGr}(A))}(N[0], A(d-s)[m-i-1])^* \cong \text{Ext}_{\text{QGr}(A)}^{m-1-i}(N, A(d-s))^*.$$

Это доказывает лемму.

Доказательство предложения 2.6 окончено.

ЛЕММА 2.9. *Отображения умножения между одномерными пространствами*

$$\text{Hom}(A(j), \chi_j) \otimes \text{Ext}^2(\chi_{j+2n+1}, A(j)) \rightarrow \text{Ext}^2(\chi_{j+2n+1}, \chi_j),$$

$$\text{Ext}^2(\chi_{j+2n+1}, A(j)) \otimes \text{Hom}(A(j+2n+1), \chi_{j+2n+1}) \rightarrow \text{Ext}^2(A(j+2n+1), A(j))$$

ненулевые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем нетривиальность для первого отображения; для второго рассуждения аналогичны.

Рассмотрим последовательности из раздела 2.2, подкрученные на j :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow A(j-3) \rightarrow A(j-1) \oplus A(j-2) \rightarrow A(j) \rightarrow (A/(x_0, x_1))(j) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \chi_{j+2n-2} \rightarrow (A/(x_0, x_1))(j) \rightarrow \chi_j \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Применяя к ним функтор $\text{Hom}(\chi_{j+2n+1}, \cdot)$, с помощью предложения 2.6 убедимся в том, что сюръекции $A(j) \rightarrow (A/(x_0, x_1))(j)$ и $(A/(x_0, x_1))(j) \rightarrow \chi_j$ индуцируют изоморфизмы между группами $\text{Ext}^2(\chi_{j+2n+1}, M)$, где $M = A(j)$, $(A/(x_0, x_1))(j)$ и χ_j .

3. Построение исключительного набора

Опишем теперь один из возможных полных исключительных наборов в производной категории от $\text{qgr}(A)$, где A – описанная в разделе 2.2 алгебра.

Пусть $G_j = (x_0, x_1^{n-1}, x_2)(j)$ и $H_j = (x_0, x_1, x_2)(j)$ – подкрученные идеалы в A .

ТЕОРЕМА 3.1. *Набор объектов*

$$(A, A(1), A(2), \dots, A(2n-1), G_{2n}, A(2n), H_{2n+1}, \chi_{2n}, \chi_{2n-1}, \dots, \chi_6, \chi_5)$$

является исключительным в категории $\mathbf{D}^b(\text{qgr}(A))$ (при $n > 2$).

Доказательству этой теоремы предпоялем две леммы. Напомним, через $Q_{j+2k,j}$ в разделе 2.2 был обозначен циклический фактормодуль $(A/(x_0, x_1^{k+1}, x_2))(j)$.

ЛЕММА 3.2. *При $0 \leq k \leq n-2$ выполнены следующие утверждения:*

- (a) $Q_{j+2k,j}[-k] = L_{\langle \chi_{j+2k}, \chi_{j+2k-2}, \dots, \chi_{j+2} \rangle}(\chi_j)$.
- (b) $\text{Ext}^i(Q_{j+2k,j}, \chi_{j+2l}) = 0$ при всех i и $k, l = 0, \dots, n-2$, за исключением случаев: $\text{Hom}(Q_{j+2k,j}, \chi_{j+2k}) = \mathbb{C}$, пространство порождено сюръекцией $Q_{j+2k,j} \rightarrow \chi_{j+2k}$, $\text{Ext}^2(Q_{j+2k,j}, \chi_{j+2n-4}) = \mathbb{C}$ при $0 \leq k \leq n-2$;
- (c) $\text{Ext}^i(\chi_{j+2k+2}, Q_{j+2k,j}) = 0$ для $i \neq 1$, $\text{Ext}^1(\chi_{j+2k+2}, Q_{j+2k,j}) = \mathbb{C}$, соответствующее расширение дается точной последовательностью типа (3) и композиция морфизмов

$$\text{Hom}(Q_{j+2k,j}, \chi_{j+2k}) \otimes \text{Ext}^1(\chi_{j+2k+2}, Q_{j+2k,j}) \rightarrow \text{Ext}^1(\chi_{j+2k+2}, \chi_{j+2k})$$

нетривиальная;

- (d) При $k < n-2$ набор $(\chi_{j+2k}, \chi_{j+2k-2}, \dots, \chi_{j+2}, \chi_j)$ исключительный в категории $\text{qgr}(A)$. Объект $Q_{j+2k,j} = L_{\langle \chi_{j+2k}, \chi_{j+2k-2}, \dots, \chi_{j+2} \rangle}(\chi_j)[k]$ исключительный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по k . Случай $k = 0$ очевиден. Пусть для $k-1$ утверждение доказано.

(a) Из пункта (a) известно, что $Q_{j+2k-2,j}[1-k] = L_{\langle \chi_{j+2k-2}, \dots, \chi_{j+2} \rangle}(\chi_j)$. Нужно показать, что $L_{\chi_{j+2k}}(Q_{j+2k-2,j}) = Q_{j+2k,j}[-1]$. Действительно, согласно пункту (c) эта перестройка задается выделенным треугольником $Q_{j+2k,j}[-1] \rightarrow \chi_{j+2k}[-1] \rightarrow Q_{j+2k-2,j}$, который связан с точной последовательностью типа (3)

$$0 \rightarrow Q_{j+2k-2,j} \rightarrow Q_{j+2k,j} \rightarrow \chi_{j+2k} \rightarrow 0. \quad (12)$$

(b) Применим к последовательности (12) функтор $\text{Hom}(\cdot, \chi_{j+2l})$ и используем предположение индукции, пункт (b), и предложение 2.6. В единственном нетривиальном случае $l = k - 1$ необходимо учесть результат пункта (c) про композицию.

(c) Для доказательства достаточно применить к точной последовательности (12) функтор $\text{Hom}(\chi_{j+2k+2}, \cdot)$ и рассмотреть полученную длинную точную последовательность. Нужно учесть, что $\text{Ext}^i(\chi_{j+2k+2}, Q_{j+2k-2,j}) = 0$; это следует из существования фильтрации (5) у $Q_{j+2k+2,j}$ и предложения 2.6.

Пункт (d) следует из предложения 2.6 и общих свойств перестроек; см. [5]. Лемма 3.2 доказана.

Из определения модулей G_{2n} , $Q_{2n,4}$ и H_{2n+1} следует существование точных последовательностей

$$0 \rightarrow G_{2n} \rightarrow A(2n) \rightarrow Q_{2n,4} \rightarrow 0, \quad (13)$$

$$0 \rightarrow H_{2n+1} \rightarrow A(2n+1) \rightarrow \chi_{2n+1} \rightarrow 0. \quad (14)$$

Нетрудно проверить, что они определяют перестройки: $H_{2n+1} = L_{A(2n+1)}(\chi_{2n+1})$ и $G_{2n} = L_{A(2n)}(Q_{2n,4}) = L_{\langle A(2n), \chi_{2n}, \chi_{2n-2}, \dots, \chi_8, \chi_6 \rangle}(\chi_4)[n-2]$ (смотри лемму 3.2 (a)).

ЛЕММА 3.3. G_{2n} и (при $n > 2$) H_{2n+1} являются исключительными объектами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Модуль H_{2n+1} является исключительным как перестройка $L_{A(2n+1)}(\chi_{2n+1})$ объектов в исключительном при $n > 2$ наборе $(A(2n+1), \chi_{2n+1})$. Итак, нам надо проверить, что $\text{Hom}(G_{2n}, G_{2n}) = \mathbb{C}$ и $\text{Ext}^i(G_{2n}, G_{2n}) = 0$ для $i \neq 0$. Проверку проведем по шагам.

1. $\text{Ext}^i(A(2n), G_{2n}) = 0$. Следует из того, что $G_{2n} = L_{A(2n)}(Q_{2n,4})$.
2. $\text{Ext}^i(Q_{2n,4}, Q_{2n-2,4}) = 0$. Это доказывается применением к последовательности типа (3)

$$0 \rightarrow Q_{2n-2,4} \rightarrow Q_{2n,4} \rightarrow \chi_{2n} \rightarrow 0 \quad (15)$$

функтора $\text{Hom}(\cdot, Q_{2n-2,4})$. Все нужные пространства Ext были вычислены в лемме 3.2 (c), (d).

3. $\text{Hom}(Q_{2n,4}, Q_{2n,4}) = \mathbb{C}$, $\text{Ext}^2(Q_{2n,4}, Q_{2n,4}) = \mathbb{C}$, $\text{Ext}^i(Q_{2n,4}, Q_{2n,4}) = 0$ при $i \neq 0, 2$. Это доказывается применением к последовательности (15) функтора $\text{Hom}(Q_{2n,4}, \cdot)$. Нужно учесть результаты предыдущего шага и леммы 3.2 (b).

4. $\text{Ext}^i(Q_{2n,4}, A(2n)) = 0$ при $i \neq 2$, $\text{Ext}^2(Q_{2n,4}, A(2n)) = \mathbb{C}$, причем композиция $\text{Ext}^2(Q_{2n,4}, A(2n)) \otimes \text{Hom}(\chi_4, Q_{2n,4}) \rightarrow \text{Ext}^2(\chi_4, A(2n))$ ненулевая. Для доказательства применим функтор $\text{Hom}(\cdot, A(2n))$ к точной последовательности $0 \rightarrow \chi_4 \rightarrow Q_{2n,4} \rightarrow Q_{2n,6} \rightarrow 0$ типа (4). При этом нужно учесть, что $Q_{2n,6} \in \langle \chi_6, \chi_8, \dots, \chi_{2n} \rangle$, а $A(2n) \in \langle \chi_6, \chi_8, \dots, \chi_{2n} \rangle^\perp$, поэтому все группы $\text{Ext}^i(Q_{2n,6}, A(2n))$ нулевые.

5. $\text{Ext}^1(Q_{2n,4}, G_{2n}) = \mathbb{C}$, $\text{Ext}^i(Q_{2n,4}, G_{2n}) = 0$ при $i \neq 1$. Применим к точной последовательности (13) функтор $\text{Hom}(Q_{2n,4}, \cdot)$ и используем результаты предыдущих шагов. При этом нужно проверить, что не равна нулю композиция ненулевых морфизмов $Q_{2n,4} \rightarrow A(2n)[2] \rightarrow Q_{2n,4}[2]$. Подействуем на нее морфизмами из пространств $\text{Hom}(\chi_4, Q_{2n,4})$ и $\text{Hom}(Q_{2n,4}, \chi_{2n})$ и проверим, что полученная композиция

ненулевых морфизмов ненулевая: $\chi_4 \rightarrow Q_{2n,4} \rightarrow A(2n)[2] \rightarrow Q_{2n,4}[2] \rightarrow \chi_{2n}[2]$. Композиция $\chi_4 \rightarrow Q_{2n,4} \rightarrow A(2n)[2]$ не равна нулю согласно утверждению шага 4, а композиция $A(2n) \rightarrow Q_{2n,4} \rightarrow \chi_{2n}$ – по определению. Нетривиальность композиции $\chi_4 \rightarrow A(2n)[2] \rightarrow \chi_{2n}[2]$ проверена в лемме 2.9.

6. *Наконец, докажем, что G_{2n} – исключительный объект.* Для этого к последовательности (13) применим $\text{Hom}(\cdot, G_{2n})$. Из результатов шагов 1 и 5 получаем, что $\text{Hom}(G_{2n}, G_{2n}) = \mathbb{C}$, $\text{Ext}^i(G_{2n}, G_{2n}) = 0$ для $i \neq 0$.

Лемма 3.3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Набор

$$(A, A(1), \dots, A(2n-1), A(2n), \chi_{2n}, \chi_{2n-1}, \dots, \chi_6, \chi_5)$$

является исключительным, что непосредственно следует из предложения 2.6. Исключительность объектов G_{2n} и H_{2n+1} доказана в лемме 3.3. Осталось проверить обращение в нуль следующих групп:

1. $\text{Ext}^i(G_{2n}, A(k)) = 0$ для $k = 0, \dots, 2n-1$. Это очевидно, так как по построению G_{2n} принадлежит подкатегории

$$\langle A(2n), \chi_{2n}, \chi_{2n-2}, \dots, \chi_6, \chi_4 \rangle \quad (16)$$

и модули $A, A(1), \dots, A(2n-1)$ полуортогональны справа к этой подкатегории.

2. $\text{Ext}^i(\chi_j, G_{2n}) = 0$ для $j = 5, 6, \dots, 2n-1, 2n$. Для нечетных j это следует из того, что по предложению 2.6 модуль χ_j полуортогонален слева подкатегории (16), а она содержит G_{2n} . Для четных j это следует из общих свойств перестроек и равенства $G_{2n} = L\langle A(2n), \chi_{2n}, \chi_{2n-2}, \dots, \chi_6 \rangle(\chi_4)[n-2]$.

3. $\text{Ext}^i(A(2n), G_{2n}) = 0$. Доказано в лемме 3.3, шаг 1.

4. $\text{Ext}^i(H_{2n+1}, A(k)) = 0$ для $k = 1, \dots, 2n$, $\text{Ext}^i(\chi_j, H_{2n+1}) = 0$ для $j = 6, \dots, 2n$. Следует из результатов предложения 2.6 и точной последовательности (14).

5. $\text{Ext}^i(H_{2n+1}, A) = 0$ и $\text{Ext}^i(\chi_5, H_{2n+1}) = 0$. Для доказательства нужно применить к точной последовательности (14) функторы $\text{Hom}(\cdot, A)$ и $\text{Hom}(\chi_5, \cdot)$. Необходимо использовать, что не равны нулю композиции ненулевых морфизмов $A(2n+1) \rightarrow \chi_{2n+1} \rightarrow A[2]$ и $\chi_5 \rightarrow A(2n+1)[2] \rightarrow \chi_{2n+1}[2]$, см. лемму 2.9.

6. $\text{Ext}^i(H_{2n+1}, G_{2n}) = 0$. Действительно,

$$G_{2n} \in \langle A(2n), \chi_{2n}, \dots, \chi_6, \chi_4 \rangle \subset \langle A(2n+1), \chi_{2n+1} \rangle^\perp \ni H_{2n+1}.$$

Проверка закончена, теорема 3.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно проверить, что набор

$$(A, A(1), A(2), \dots, A(2n-2), G_{2n-1}, A(2n-1), G_{2n}, A(2n), \chi_{2n}, \chi_{2n-1}, \dots, \chi_6, \chi_5)$$

также является исключительным (в том числе при $n = 2$).

ТЕОРЕМА 3.4. *Исключительные наборы*

$$(A, A(1), A(2), \dots, A(2n-1), G_{2n}, A(2n), H_{2n+1}, \chi_{2n}, \chi_{2n-1}, \dots, \chi_6, \chi_5), \quad (17)$$

$$(A, A(1), A(2), \dots, A(2n-2), G_{2n-1}, A(2n-1), G_{2n}, A(2n), \chi_{2n}, \chi_{2n-1}, \dots, \chi_6, \chi_5) \quad (18)$$

являются полными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала полноту набора (18).

Обозначим подкатегорию в $\mathbf{D}^b(\mathrm{qgr}(A))$, порожденную объектами исключительного набора (18), через $\mathcal{D}_0$. Мы сейчас покажем, что $\mathcal{D}_0$ содержит все модули $A(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Согласно замечанию перед леммой 3.3 $G_{2n} = L_{\langle A(2n), \chi_{2n}, \chi_{2n-2} \dots \chi_8, \chi_6 \rangle}(\chi_4)[n-2]$; следовательно, $\chi_4 \in \mathcal{D}_0$. Аналогично, $G_{2n-1} = L_{\langle A(2n-1), \chi_{2n-1}, \chi_{2n-3} \dots \chi_7, \chi_5 \rangle}(\chi_3)[n-2]$ и $\chi_3 \in \mathcal{D}_0$.

Рассмотрим первую точную последовательность, описанную в лемме 2.4. Подкрутив ее на k , получим

$$0 \rightarrow A(k-3) \rightarrow A(k-1) \oplus A(k-2) \rightarrow A(k) \rightarrow (A/(x_0, x_1))(k) \rightarrow 0. \quad (19)$$

При $k = 3, \dots, 2n$ три левых члена $A(k-3)$, $A(k-1) \oplus A(k-2)$ и $A(k)$ комплекса (19) принадлежат подкатегории $\mathcal{D}_0$; следовательно, его правый член $(A/(x_0, x_1))(k)$ тоже ей принадлежит.

Рассмотрим точную последовательность $0 \rightarrow \chi_{k-2n+1} \rightarrow (A/(x_0, x_1))(k) \rightarrow \chi_k \rightarrow 0$ типа (6). При $k = 3, \dots, 2n$ ее правый и средний члены лежат в $\mathcal{D}_0$, а значит, и $\chi_{k-2n+1} = \chi_{k+2n-2} \in \mathcal{D}_0$. Таким образом, мы доказали, что модули $\chi_{2n+1}, \chi_{2n+2}, \dots, \chi_{4n-4}, \chi_{4n-3} = \chi_0, \chi_1$ содержатся в подкатегории $\mathcal{D}_0$. Покажем, что она содержит и χ_2 .

Рассмотрим вторую точную последовательность, описанную в лемме 2.4. Подкрутив ее на $2n$, получим $0 \rightarrow A \rightarrow A(2n-1) \oplus A(1) \rightarrow A(2n) \rightarrow Q_{2n, -2n+4} \rightarrow 0$. В этой последовательности три левых члена лежат в подкатегории $\mathcal{D}_0$, значит, в ней лежит и правый член $Q_{2n, -2n+4}$. У него есть фильтрация (5), присоединенные факторы которой изоморфны модулям $\chi_{-2n+4}, \chi_{-2n+6}, \dots, \chi_{-2}, \chi_0, \chi_2, \dots, \chi_{2n-2}, \chi_{2n}$. Все эти модули, кроме χ_2 , лежат в $\mathcal{D}_0$; значит, χ_2 тоже в ней лежит.

Итак, подкатегория $\mathcal{D}_0$ содержит все модули χ_j , а значит, и модули $(A/(x_0, x_1))(k)$ для всех k . Снова рассмотрим комплекс (19). Для любого целого k его правый член принадлежит категории $\mathcal{D}_0$. Рассматривая значения $k = 2n+1, 2n+2, \dots$, мы последовательно докажем, что модули $A(2n+1), A(2n+2), \dots$ принадлежат подкатегории $\mathcal{D}_0$. Аналогично, подставляя $k = 2, 1, 0, -1, \dots$, докажем, что в ней содержатся $A(-1), A(-2), \dots$.

Теперь докажем, что подкатегория $\mathcal{D}_0$ совпадает со всей категорией $\mathbf{D}^b(\mathrm{qgr}(A))$. Категория, порожденная исключительным набором, допустима (см. [5]), поэтому достаточно показать, что правый ортогонал $\mathcal{D}_0^\perp = \{Y \in \mathbf{D}^b(\mathrm{qgr}(A)) \mid \mathrm{Hom}(\mathcal{D}_0, Y) = 0\}$ к $\mathcal{D}_0$ равен нулю. Предположим противное, пусть $Y \in \mathcal{D}_0^\perp$, $Y \neq 0$.

Пусть j_0 — такой индекс, что $H^{j_0}(Y) \neq 0$. Из [9; предложения 7.4(1), 3.11(3)] следует, что для любого конечно порожденного градуированного A -модуля M при $k \gg 0$ имеем $\mathrm{Hom}_{\mathrm{qgr}(A)}(A(-k), M) = M_k$ и $\mathrm{Ext}_{\mathrm{qgr}(A)}^i(A(-k), M) = 0$ при $i > 0$. Выберем такое целое k , что $\mathrm{Ext}^i(A(-k), H^j(Y)) = 0$ при $i > 0$ и всех j , $\mathrm{Hom}(A(-k), H^{j_0}(Y)) \neq 0$. Вычислим $\mathrm{Hom}^j(A(-k), Y)$ с помощью спектральной последовательности с $E_2^{pq} = \mathrm{Ext}^q(A(-k), H^p(Y))$. Согласно выбору k лист E_2 сосредоточен в нулевой строке. Следовательно, спектральная последовательность сходится на втором шаге, $E_2^{pq} = E_\infty^{pq}$, $\mathrm{Hom}^{j_0}(A(-k), Y) = E_2^{j_0 0} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{QGr}(A)}(A(-k), H^{j_0}(Y)) \neq 0$. Получено противоречие с $Y \in \mathcal{D}_0^\perp$.

Теперь докажем полноту набора (17). Для этого достаточно показать, что объект $G' = L_{\langle A(2n-1), G_{2n}, A(2n) \rangle}(H_{2n+1})$ равен $G_{2n-1}[k]$ для некоторого k . Действительно, G' лежит в подкатегории $\mathcal{S} = {}^\perp \langle A, \dots, A(2n-2) \rangle \cap \langle A(2n-1), G_{2n}, \dots, \chi_5 \rangle^\perp$ – пересечении левого и правого ортогоналов. Набор (18) полный, поэтому $\mathcal{S}$ порождена исключительным объектом G_{2n-1} и эквивалентна производной категории векторных пространств $\mathbf{D}^b(\mathbb{C}\text{-vect})$. Так как любой исключительный объект в $\mathbf{D}^b(\mathbb{C}\text{-vect})$ имеет вид $\mathbb{C}[k]$, объект $G' \in \mathcal{S}$ равен $G_{2n-1}[k]$ для некоторого k . Теорема 3.4 доказана.

4. Вычисление алгебры морфизмов, связанной с исключительным набором

Производя перестройки в исключительном наборе $(\chi_{2n}, \chi_{2n-2}, \dots, \chi_8, \chi_6)$, можно получить набор $(\chi_6, R_{\chi_6}(\chi_8), R_{\langle \chi_8, \chi_6 \rangle}(\chi_{10}), \dots, R_{\langle \chi_{2n-2}, \dots, \chi_6 \rangle}(\chi_{2n}))$, с точностью до сдвига в производной категории равный набору $(Q_{6,6}, Q_{8,6}, \dots, Q_{2n-2,6}, Q_{2n,6})$. Этот набор интересен с той точки зрения, что между его объектами высшие группы Ext нулевые.

Проводя аналогичные перестройки с модулями $\chi_{2n-1}, \chi_{2n-3}, \dots, \chi_7, \chi_5$, получаем из набора (17) исключительный набор

$$(A, A(1), \dots, A(2n-1), G_{2n}, A(2n), H_{2n+1}, Q_{6,6}, Q_{8,6}, \dots, Q_{2n,6}, Q_{5,5}, Q_{7,5}, \dots, Q_{2n-1,5}). \quad (20)$$

В нем существенно уменьшено по сравнению с наборами (18) и (17) количество нетривиальных высших групп Ext между объектами. Для него мы вычислим алгебру морфизмов, т.е. опишем группы Hom и Ext между объектами и законы их композиции.

Мы будем обозначать через $\overline{A_{2m}}$ подпространство в однородной компоненте A_{2m} , порожденное всеми мономами, кроме x_1^m , при $m \leq n-2$, и все пространство A_{2m} при $m > n-2$. Для нечетных k положим $\overline{A_k} = A_k$. Нетрудно видеть, что при $k < 4n-3$ $\overline{A_k}$ есть k -я однородная компонента $(G_0)_k$ ядра проекции $G_0 = \ker(A \rightarrow Q_{0,4-2n})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Ниже перечислены все ненулевые группы Ext между различными объектами исключительного набора (20):*

- (a) $\text{Hom}(A(k), A(l)) = A_{l-k}$, многочлены из A_{l-k} действуют на $A(k)$ умножением;
- (b) $\text{Hom}(A(k), Q_{j+2r,j}) = \mathbb{C} = \langle x_1^{r+(j-k)/2} \rangle$ при $j \leq k \leq j+2r, k \equiv j \pmod{2}$, образующая переводит 1 в $[x_1^{r+(j-k)/2}]$ (здесь и ниже $[\cdot]$ обозначает класс элемента в фактормодуле $Q_{j+2r,j} = (A/(x_0, x_1^{r+1}, x_2))(j+2r)$);
- (c) $\text{Hom}(Q_{j+2r,j}, Q_{j+2s,j}) = \mathbb{C} = \langle x_1^{s-r} \rangle$ при $j = 5, 6, r \leq s$, образующая переводит $[1]$ в $[x_1^{s-r}]$;
- (d) $\text{Hom}(A(k), G_{2n}) = \overline{A_{2n-k}}$,
 $\text{Hom}(G_{2n}, A(2n)) = \mathbb{C}$, образующая является вложением, $\text{Ext}^1(G_{2n}, A(2n)) = \mathbb{C}$, $\text{Ext}^1(G_{2n}, Q_{2n,6}) = \mathbb{C}$;
- (e) $\text{Hom}(A(k), H_{2n+1}) = A_{2n+1-k}$ при $0 \leq k \leq 2n$, многочлены из A_{2n+1-k} действуют умножением,
 $\text{Hom}(G_{2n}, H_{2n+1}) = \mathbb{C} = \langle x_0 \rangle$, образующая действует умножением на x_0 ,

$\text{Hom}(H_{2n+1}, Q_{2n-1,5}) = \mathbb{C}$, образующая есть гомоморфизм

$$f(x) \mapsto \frac{1}{x_1} [f(x)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Содержится в предложении 2.6.

(b) Следует из существования фильтрации (5) для $Q_{j+2r,j}$.

(c) Применим к точной последовательности (2)

$$0 \rightarrow Q_{j+2r,j} \rightarrow Q_{j+2s,j} \rightarrow Q_{j+2s,j+2r+2} \rightarrow 0$$

функтор $\text{Hom}(Q_{j+2r,j}, \cdot)$ и учтем, что $\text{Ext}^i(Q_{j+2r,j}, Q_{j+2s,j+2r+2}) = 0$. Равенство нулю групп $\text{Ext}^i(Q_{6+2r,6}, Q_{5+2s,5})$ следует из существования фильтрации (5).

(d) Для вычисления $\text{Ext}^i(A(k), G_{2n})$ применим к точной последовательности (13) функтор $\text{Hom}(A(k), \cdot)$. Группы $\text{Ext}^i(G_{2n}, A(2n))$ могут быть найдены применением к ней функтора $\text{Hom}(\cdot, A(2n))$ с учетом результата шага 4 в доказательстве леммы 3.3. Для вычисления групп $\text{Ext}^i(G_{2n}, Q_{j+2r,j})$ следует посчитать $\text{Ext}^i(G_{2n}, \chi_j)$ с помощью точной последовательности (13) и леммы 3.2: $\text{Ext}^1(G_{2n}, \chi_{2n}) = \mathbb{C}$, прочие группы $\text{Ext}(G_{2n}, \cdot)$ для модулей χ из набора (17) нулевые. Затем перейти от χ к Q с помощью последовательностей типа (4).

(е) Группы $\text{Ext}^i(A(k), H_{2n+1})$ легко вычисляются с помощью определения H_{2n+1} . Из объектов $A(2n), \chi_{2n}, \dots, \chi_6, \chi_4$ в объекты $A(2n+1), \chi_{2n+1}$ имеется лишь один морфизм $x_0: A(2n) \rightarrow A(2n+1)$, откуда следуют утверждения про $\text{Ext}(G_{2n}, H_{2n+1})$. Для вычисления $\text{Ext}^i(H_{2n+1}, Q)$ следует применить $\text{Hom}(\cdot, Q_{j+2r,j})$ к последовательности (14). Наконец, убедимся, что указанная формула корректно определяет ненулевой гомоморфизм $H_{2n+1} \rightarrow Q_{2n-1,5}$.

В следующем предложении явно описаны все отображения композиции

$$\text{Ext}^i(E_l, E_m) \otimes \text{Ext}^j(E_k, E_l) \rightarrow \text{Ext}^{i+j}(E_k, E_m)$$

для групп Ext между объектами исключительного набора (20) в тех случаях, в которых все три группы ненулевые.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Умножение в алгебре морфизмов для набора (20) устроено следующим образом:

- (a) $A(k) \rightarrow A(l) \rightarrow A(m)$. Композиция $A_{m-l} \otimes A_{l-k} \rightarrow A_{m-k}$ есть умножение многочленов.
- (b) $A(j+2k) \rightarrow A(j+2l) \rightarrow Q_{j+2r,j}$. Композиция $\mathbb{C}\langle x_1^{r-l} \rangle \otimes A_{2l-2k} \rightarrow \mathbb{C}\langle x_1^{r-k} \rangle$ определяется умножением на коэффициент при x_1^{l-k} в многочлене из A_{2l-2k} .
- (c) $A(j+2k) \rightarrow Q_{j+2r,j} \rightarrow Q_{j+2s,j}$. Композиция $\mathbb{C}\langle x_1^{s-r} \rangle \otimes \mathbb{C}\langle x_1^{r-k} \rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle x_1^{s-k} \rangle$ есть умножение.
- (d) $Q_{j+2q,j} \rightarrow Q_{j+2r,j} \rightarrow Q_{j+2s,j}$. Композиция $\mathbb{C}\langle x_1^{s-r} \rangle \otimes \mathbb{C}\langle x_1^{r-q} \rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle x_1^{s-q} \rangle$ есть перемножение.
- (e) $A(k) \rightarrow A(l) \rightarrow G_{2n}$. Композиция $\overline{A_{2n-l}} \otimes A_{l-k} \rightarrow \overline{A_{2n-k}}$ получается из умножения многочленов $A_{2n-l} \times A_{l-k} \rightarrow A_{2n-k}$ ограничением на подпространства.
- (f) $A(k) \rightarrow G_{2n} \rightarrow A(2n)$. Композиция $\mathbb{C} \otimes \overline{A_{2n-k}} \rightarrow \overline{A_{2n-k}}$ есть умножение.

(g) $G_{2n} \rightarrow A(2n)[1] \rightarrow Q_{2n,6}[1]$. *Композиция*

$$\mathrm{Hom}(A(2n), Q_{2n,6}) \otimes \mathrm{Ext}^1(G_{2n}, A(2n)) \rightarrow \mathrm{Ext}^1(G_{2n}, Q_{2n,6})$$

нетривиальна.

(h) $A(k) \rightarrow G_{2n} \rightarrow H_{2n+1}$. *Композиция $\mathbb{C}\langle x_0 \rangle \otimes \overline{A_{2n-k}} \rightarrow A_{2n+1-k}$ есть умножение.*

(i) $G_{2n} \rightarrow A(2n) \rightarrow H_{2n+1}$. *Композиция $\mathbb{C}\langle x_0 \rangle \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\langle x_0 \rangle$ есть умножение.*

(j) $A(2k+1) \rightarrow H_{2n+1} \rightarrow Q_{2n-1,5}$ ($k \geq 2$). *Композиция $\mathbb{C} \otimes A_{2n-2k} \rightarrow \mathbb{C}$ есть умножение числа на коэффициент многочлена при x_1^{n-k} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти утверждения очевидно следуют из явного описания гомоморфизмов между объектами исключительного набора, данного в предложении 4.1, кроме, быть может, пункта (g). Проверим нетривиальность композиции ненулевых морфизмов $G_{2n} \rightarrow A(2n)[1] \rightarrow Q_{2n,6}[1]$. Достаточно показать, что композиция $\chi_4[-1] \rightarrow Q_{2n,4}[-1] \rightarrow G_{2n} \rightarrow A(2n)[1] \rightarrow Q_{2n,6}[1] \rightarrow \chi_{2n}[1]$ нетривиальна, где морфизм $Q_{2n,4}[-1] \rightarrow G_{2n}$ определяется расширением (13), а морфизмы, стоящие слева и справа, определены в разделе 2.2. Согласно доказательству предложения 4.1 (d), эта композиция есть композиция ненулевых морфизмов $\chi_4[-1] \rightarrow A(2n)[1] \rightarrow \chi_{2n}[1]$, которая не равна нулю по лемме 2.9.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. О. Орлов, “Проективные расслоения, моноидальные преобразования и производные категории когерентных пучков”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:4 (1992), 852–862.
- [2] С. А. Кулешов, Д. О. Орлов, “Исключительные пучки на поверхностях дель Пеццо”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:3 (1994), 53–87.
- [3] Y. Kawamata, *Derived categories of toric varieties*, [arxiv:math.AG/0503102](https://arxiv.org/abs/math/0503102).
- [4] D. Auroux, L. Katzarkov, D. Orlov, *Mirror symmetry for weighted projective planes and their noncommutative deformations*, [arxiv:math.AG/0404281](https://arxiv.org/abs/math/0404281).
- [5] А. И. Бондал, “Представления ассоциативных алгебр и когерентные пучки”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:1 (1989), 25–44.
- [6] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [7] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981.
- [8] H. Kojima, “Logarithmic Del Pezzo surfaces of rank one with unique singular points”, *Japan. J. Math. (N.S.)*, **25**:2 (1999), 343–375.
- [9] M. Artin, J. J. Zhang, “Noncommutative Projective Schemes”, *Adv. Math.*, **109**:2 (1994), 228–287.
- [10] D. Baer, “Tilting sheaves in representation theory of algebras”, *Manuscripta Math.*, **60**:3 (1988), 323–347.
- [11] B. Keller, “Derived categories and their uses”, *Handbook of Algebra*, vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1996, 671–701.

А. Д. Елагин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: alexelagin@rambler.ru

Поступило

14.11.2006