Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Коваль, В. П. Маслов, Ультравторичное квантование при температуре отличной от нуля, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 1, 52–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3752>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:18:22

Ультравторичное квантование при температуре отличной от нуля

Г. В. Коваль, В. П. Маслов

В данной работе с помощью принципа соответствия получены новые уравнения, которые обобщают уравнения работы [1] на случай отличной от нуля температуры.

Библиография: 8 названий.

В статье [1] показано, что асимптотика некоторых собственных значений системы N тождественных бозонов в пределе при $N \rightarrow \infty$ определяется решениями следующей системы уравнений

$$\begin{aligned}\Omega\Phi(x, y) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y) + U(x) + U(y) + V(x, y)\right)\Phi(x, y) \\ &\quad + 2 \iint dzdw (V(x, y) + V(z, w))\Phi^+(z, w)\Phi(x, z)\Phi(y, w), \\ \Omega\Phi^+(x, y) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y) + U(x) + U(y) + V(x, y)\right)\Phi(x, y) \\ &\quad + 2 \iint dzdw (V(x, z) + V(y, w))\Phi^+(x, z)\Phi^+(y, w)\Phi(z, w),\end{aligned}\tag{1}$$

где $x, y \in \mathcal{M}$ – координаты частиц, пространство $\mathcal{M}$ определяется задачей, например, это может быть $\mathbb{R}^3$, или трехмерный тор, Δ_x, Δ_y – операторы Лапласа, действующий по соответствующей переменной x или y , $U(x)$ – потенциал внешнего поля, $V(x, y)$ – потенциал взаимодействия, симметричный относительно перестановки переменных x и y , m – масса частиц, $\hbar$ – постоянная Планка, Ω – действительное число. Функции $\Phi(x, y), \Phi^+(x, y) \in L_2(\mathcal{M})$ – симметричны относительно перестановок переменных x и y и удовлетворяют условию

$$\iint dx dy \Phi^+(x, y)\Phi(x, y) = \frac{N}{2}.\tag{2}$$

Сначала запишем (1) в другом виде. Введем функции $G(x, y)$, $R(x, y)$ и $\tilde{R}(x, y)$

$$\begin{aligned}\tilde{R}(x, y) &= \Phi^+(x, y), \quad G(x, y) = 2 \int dz \Phi^+(x, z)\Phi(z, y), \\ R(x, y) &= 2 \left(\Phi(x, y) + \int dz \Phi(x, z)G(z, y) \right).\end{aligned}\tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 05-01-02807-НЦНИЛ и № 05-01-00824).

В силу симметрии функций $\Phi^+(x, y)$, $\Phi(x, y)$ для функций (3) выполняются равенства

$$R(x, y) = R(y, x), \quad \tilde{R}(x, y) = \tilde{R}(y, x), \quad (4)$$

$$G(x, y) + \int dz G(x, z)G(z, y) = \int dz \tilde{R}(x, z)R(z, y). \quad (5)$$

Из (2) следует

$$\int dx G(x, x) = N. \quad (6)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Функции $G(x, y)$, $\tilde{R}(x, y)$, $R(x, y)$ удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x - \Delta_y) + U(x) - U(y) \right) G(x, y) \\ & + \int dz (V(x, z) - V(y, z)) \tilde{R}(x, z) R(z, y) = 0, \\ & \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y) + U(x) + U(y) + V(x, y) \right) R(x, y) \\ & + \int dz (V(x, z)G(z, y)R(x, z) + V(y, z)G(z, x)R(z, y)) = \Omega R(x, y), \\ & \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y) + U(x) + U(y) + V(x, y) \right) \tilde{R}(x, y) \\ & + \int dz (V(x, z)G(y, z)\tilde{R}(x, z) + V(y, z)G(x, z)\tilde{R}(z, y)) = \Omega \tilde{R}(x, y). \end{aligned} \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции (3) удовлетворяют уравнениям (7), так как функции $\Phi^+(x, y)$, $\Phi(x, y)$ удовлетворяют (1).

Чтобы обобщить уравнения (1) на случай ненулевой температуры, применим принцип соответствия между этими уравнениями и уравнениями вариационного принципа Боголюбова при нулевой температуре. То есть исходя из температурных уравнений вариационного принципа Боголюбова, по принципу соответствия найдем обобщение уравнений (1) на температурный случай.

Итак, рассмотрим теперь уравнения вариационного метода Боголюбова. При температуре $\theta \geq 0$ для рассматриваемой системы бозонов из вариационного метода Боголюбова [2] получаются уравнения

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha u_\alpha(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x) - \mu \right) u_\alpha(x) + \int dy V(x, y) R_B(x, y) v_\alpha^*(y) \\ &+ \int dy V(x, y) (G_B(y, y) u_\alpha(x) + G_B(y, x) u_\alpha(y)), \\ -\lambda_\alpha v_\alpha(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x) - \mu \right) v_\alpha(x) + \int dy V(x, y) R_B(x, y) u_\alpha^*(y) \\ &+ \int dy V(x, y) (G_B(y, y) v_\alpha(x) + G_B(y, x) v_\alpha(y)), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\alpha = 1, 2, \dots$, λ_α – положительные числа, функции $u_\alpha(x)$ и $u_\alpha^*(x)$, а также $v_\alpha(x)$ и $v_\alpha^*(x)$, комплексно сопряжены друг другу и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \int dx (u_\alpha^*(x)v_\beta(x) - v_\alpha(x)u_\beta^*(x)) &= \int dx (u_\alpha(x)v_\beta^*(x) - v_\alpha^*(x)u_\beta(x)) = 0, \\ \int dx (u_\alpha^*(x)u_\beta(x) - v_\alpha(x)v_\beta^*(x)) &= \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (9)$$

для всех $\alpha, \beta = 1, 2, \dots$, где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера. Кроме того в уравнениях (9) функции $R_B(x, y)$ и $G_B(x, y)$ имеют вид

$$\begin{aligned} R_B(x, y) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + n_\alpha \right) (v_\alpha(x)u_\alpha(y) + v_\alpha(y)u_\alpha(x)), \\ G_B(x, y) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} (v_\alpha^*(x)v_\alpha(y)(1 + n_\alpha) + u_\alpha^*(x)u_\alpha(y)n_\alpha), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$n_\alpha = \frac{1}{\exp(\lambda_\alpha/\theta) - 1}, \quad (11)$$

а μ определяется из условия, что функция $G_B(x, y)$ (10) удовлетворяет равенству

$$\int dx G_B(x, x) = N. \quad (12)$$

Функции (10) и комплексно сопряженная к $R_B(x, y)$ функция $R_B^*(x, y)$ при любой температуре θ удовлетворяют равенствам

$$R_B(x, y) = R_B(y, x), \quad R_B^*(x, y) = R_B^*(y, x), \quad (13)$$

$$G_B(x, y) = G_B^*(y, x), \quad (14)$$

а из уравнений (8) следует, что эти функции также удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x - \Delta_y) + U(x) - U(y) \right) G_B(x, y) \\ &\quad + \int dz (V(x, z) - V(y, z)) R_B^*(x, z) R_B(z, y) \\ &\quad + \int dz (V(x, z) - V(y, z)) (G_B(z, z) G_B(x, y) + G_B(x, z) G_B(z, y)) = 0, \\ &\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y) + U(x) + U(y) + V(x, y) \right) R_B(x, y) \\ &\quad + \int dz (V(x, z) G_B(z, y) R_B(x, z) + V(y, z) G_B(z, x) R_B(z, y)) \\ &\quad + \int dz V(x, z) (G_B(z, z) R_B(x, y) + G_B(z, x) R_B(z, y)) \\ &\quad + \int dz V(y, z) (G_B(z, z) R_B(x, y) + G_B(z, y) R_B(z, x)) = 2\mu R_B(x, y), \end{aligned} \quad (15)$$

где дополнительное уравнение получается комплексным сопряжением второго уравнения формулы (15).

Если $\theta = 0$, то в силу положительности λ_α из (11) следует, что $n_\alpha = 0$ для всех $\alpha = 1, 2, \dots$. Тогда из (9) следует, что функции (10) при нулевой температуре удовлетворяют условию

$$G_B(x, y) + \int dz G_B(x, z) G_B(z, y) = \int dz R_B^*(x, z) R_B(z, y). \quad (16)$$

Равенства (16), (13) и (12) совпадают соответственно с равенствами (5), (4) и (6), если по принципу соответствия заменить $R_B^*(x, y)$ на $\tilde{R}(x, y)$, $R_B(x, y)$ на $R(x, y)$, $G_B(x, y)$ на $G(x, y)$. Уравнения (15) при такой замене не переходят в уравнения (7), однако, если 2μ в (15) заменить на Ω , то очевидно соответствие между одной системой и другой, причем соответствующие друг другу уравнения отличаются одним слагаемым в левой части. Кроме того, для частного вида взаимодействия, например, такого как в модели БКШ [3], уравнения (15) после замены совпадают с (7). Таким образом, можно считать, что есть соответствие между функциями (3) и функциями (10). Отметим, однако, что функции $G_B(x, y)$, $R_B(x, y)$, $R^*(x, y)$ удовлетворяют большему числу условий, чем функции $G(x, y)$, $R(x, y)$, $\tilde{R}(x, y)$. Функции $\Phi(x, y)$, $\Phi^+(x, y)$, удовлетворяющие уравнениям (1), в общем случае не являются комплексно сопряженными друг другу [1]. Поэтому из формул (3) следует, что функция $\tilde{R}(x, y)$ не должна быть комплексно сопряженной к $R(x, y)$, а функция $G(x, y)$ не должна удовлетворять условию (14).

Из соответствия между функциями (3) и (10), получим, что температурным аналогом системы уравнений (1) является следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha u_\alpha(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x) - \mu \right) u_\alpha(x) + \int dy V(x, y) R(x, y) \tilde{v}_\alpha(y), \\ -\lambda_\alpha v_\alpha(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x) - \mu \right) v_\alpha(x) + \int dy V(x, y) R(x, y) \tilde{u}_\alpha(y), \\ \lambda_\alpha \tilde{u}_\alpha(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x) - \mu \right) \tilde{u}_\alpha(x) + \int dy V(x, y) \tilde{R}(x, y) v_\alpha(y), \\ -\lambda_\alpha \tilde{v}_\alpha(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x) - \mu \right) \tilde{v}_\alpha(x) + \int dy V(x, y) \tilde{R}(x, y) u_\alpha(y), \end{aligned} \quad (17)$$

где λ_α при всех $\alpha = 1, 2, \dots$ являются положительными числами, а $G(x, y)$, $R(x, y)$ и $\tilde{R}(x, y)$ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} (\tilde{v}_\alpha(x) v_\alpha(y) (1 + n_\alpha) + \tilde{u}_\alpha(x) u_\alpha(y) n_\alpha), \\ R(x, y) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + n_\alpha \right) (v_\alpha(x) u_\alpha(y) + v_\alpha(y) u_\alpha(x)), \\ \tilde{R}(x, y) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + n_\alpha \right) (\tilde{v}_\alpha(x) \tilde{u}_\alpha(y) + \tilde{v}_\alpha(y) \tilde{u}_\alpha(x)), \end{aligned} \quad (18)$$

n_α выражается через λ_α и θ формулой (11), а функции $u_\alpha(x)$, $v_\alpha(x)$, $\tilde{u}_\alpha(x)$, $\tilde{v}_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, \dots$ кроме уравнений (17) еще удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \int dx (\tilde{u}_\alpha(x)v_\beta(x) - v_\alpha(x)\tilde{u}_\beta(x)) &= \int dx (u_\alpha(x)\tilde{v}_\beta(x) - \tilde{v}_\alpha(x)u_\beta(x)) = 0, \\ \int dx (\tilde{u}_\alpha(x)u_\beta(x) - v_\alpha(x)\tilde{v}_\beta(x)) &= \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (19)$$

для всех $\alpha, \beta = 1, 2, \dots$. Параметр μ в уравнениях (17) определяется из условия, что функция $G(x, y)$ (18) удовлетворяет условию (6).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если функции $u_\alpha(x)$, $\tilde{u}_\alpha(x)$, $v_\alpha(x)$, $\tilde{v}_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, \dots$, удовлетворяют системе уравнений (17) и условиям (19), то функции (18) при любом $\theta \geq 0$ удовлетворяют системе уравнений (7) с $\Omega = 2\mu$ и условиям (4), (6), а при $\theta = 0$ еще удовлетворяют условию (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу уравнений (17) и условий (19) утверждение доказывается прямой подстановкой функций (18) в формулы (4)–(7).

Множество решений уравнений (15) шире, чем множество функций (10), выраженных через решения системы уравнений (8). В [4] показано, что система уравнений (15) может быть записана в виде пары:

$$[\hat{A}, \hat{L}] = 0, \quad (20)$$

а множеству решений температурных уравнений (8) соответствует такое решение уравнения (20), для которого

$$\hat{A} = f_\theta(\hat{L}), \quad (21)$$

где

$$f_\theta(\xi) = \frac{1}{\exp(\xi/\theta) - 1} + \frac{1}{2}. \quad (22)$$

Для уравнений (17) и (19) справедливо аналогичное утверждение. Рассмотрим матрицы $\hat{A}$ и $\hat{L}$ вида

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{G} + \frac{1}{2} & -\hat{\tilde{R}} \\ \hat{R} & -\hat{G}^t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \hat{L} = \begin{pmatrix} \hat{T} & \hat{\tilde{B}} \\ -\hat{B} & -\hat{T} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где $\hat{G}$, $\hat{R}$, $\hat{\tilde{R}}$ – операторы в пространстве $L_2(\mathcal{M})$, задаваемые интегральными ядрами $G(x, y)$, $R(x, y)$, $\tilde{R}(x, y)$ соответственно, $\hat{G}^t$ – оператор, задаваемый в $L_2(\mathcal{M})$ ядром $G^t(x, y) = G(y, x)$, а $\hat{B}$ и $\hat{\tilde{B}}$ – ядрами $B(x, y) = V(x, y)R(x, y)$ и $\tilde{B}(x, y) = V(x, y)\tilde{R}(x, y)$ соответственно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Система уравнений (7) может быть записана в виде (20), где $\hat{A}$ и $\hat{L}$ имеют вид (23), а $2\mu = \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подстановка (23) в (20) приводит к четырем уравнениям, из которых два совпадают, а три независимых приводятся к виду (7).

Кроме того, решениям системы уравнений (7), вида (18), которые получены из решений уравнений (17), (19), соответствуют такие $\hat{A}$ и $\hat{L}$, что для них справедливо равенство (21). Это является следствием уравнений (17), (19).

В заключение отметим, что уравнения (7), полученные здесь из принципа соответствия, могут быть строго получены из истинного символа [1], [4], [5], [6] для ультраволично квантованного уравнения, отвечающего матрице плотности [7]. Это позволяет перенести результаты [7], [8] на температурный случай.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Маслов, “Ультратретичное квантование термодинамики”, *ТМФ*, **132**:3 (2002), 388–398.
- [2] Н. Н. Боголюбов, *Избранные труды*, т. 2, Наукова думка, Киев, 1970.
- [3] Дж. Шриффер, *Теория сверхпроводимости*, Наука, М., 1970.
- [4] V. P. Maslov, “The notions of entropy, Hamiltonian, temperature, and thermodynamical limit in the theory of probabilities used for solving model problems in econophysics”, *Russ. J. Math. Phys.*, **9**:4 (2002), 437–445.
- [5] В. П. Маслов, “О зависимости критерия сверхтекучести от радиуса капилляра”, *ТМФ*, **143**:3 (2005), 307–327.
- [6] В. П. Маслов, “Резонанс между одночастичными (боголюбовскими) и двучастичными сериями в сверхпроводящей жидкости в капилляра”, *Докл. РАН*, **404**:5 (2005), 608–611.
- [7] В. П. Маслов, *Квантование термодинамики и ультраволичное квантование*, Институт компьютерных исследований, М., 2001.
- [8] V. P. Maslov, “Resonance between one-particle (Bogoliubov) and two-particle series in a superfluid liquid in a capillary”, *Russ. J. Math. Phys.*, **12**:3 (2005), 369–378.

Г. В. Коваль

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: kovgen@mail.ru

Поступило
17.05.2007

В. П. Маслов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: v.p.maslov@mail.ru