Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Дж. Манафов, Спектр и спектральное разложение
одного несамосопряженного дифференциального опера-
тора, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 1, 58–63

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3753>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:31:38

Спектр и спектральное разложение одного несамосопряженного дифференциального оператора

М. Дж. Манафов

Найдены структуры спектра и получено спектральное разложение одного несамосопряженного дифференциального оператора L , порожденного дифференциальным выражением $l[y] \equiv -y'' + \alpha x^m e^{i\mu x} y$, $m, \mu \geq 1$, в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$.

Библиография: 4 названия.

Работа посвящена изучению спектра и разложению по главным функциям дифференциального оператора L , порожденного дифференциальным выражением $l[y] \equiv -y'' + q(x)y$ в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ в предположении, что коэффициент $q(x) = \alpha x^m e^{i\mu x}$, $m, \mu \geq 1$. Здесь абсолютное значение потенциала равно $|\alpha| \cdot |x|^m$ и стремится к бесконечности при $|x| \rightarrow \infty$. Оператор L является несамосопряженным и будет самосопряженным только в тривиальном случае при $\alpha \equiv 0$. Оказывается, что спектр оператора L является непрерывным, заполняет полуось $[0, +\infty)$, а на непрерывном спектре имеются спектральные особенности, которые совпадают с числами вида $\lambda_n(\mu n/2)^2$, $n = 1, 2, \dots$, и имеют кратности, равные $mn + 1$. Отметим, что в работе [1] изучен спектр в случае $m = \mu = 1$, а в работах [2], [3] полностью решены прямая и обратная задачи для периодического случая.

1. Построение специальных решений уравнения $l[y] = k^2 y$. В исследовании важную роль играет явный вид специальных решений уравнения $l[y] = k^2 y$, который дается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. *Уравнение*

$$-y'' + \alpha x^m e^{i\mu x} y = k^2 y \quad (1)$$

имеет решение $f(x, k)$, представимое в виде

$$f(x, k) = e^{ikx} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{mn} P_{n,s}(k) x^s e^{i\mu n x} \right). \quad (2)$$

Здесь $P_{n,s}$ – правильная рациональная функция, имеющая полюсы в точках $k = -\mu j/2$, $j = 1, 2, \dots, n$, и кратности не выше, чем $m j + 1$, и ряд (2) допускает почленное дифференцирование по x сколь угодно раз при $k \neq -\mu n/2$, $n = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ищем решение уравнения (1) в виде (2). Тогда придем к следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m(n+1)} P_{n+1,s}(k) x^s e^{i[\mu(n+1)+k]x} \\ &= \alpha \int_x^{\infty} \frac{\sin(t-x)}{k} t^m e^{i(\mu+k)t} dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{mn} \alpha P_{n,s}(k) \int_x^{\infty} \frac{\sin(t-x)}{k} t^{m+s} e^{i(\mu+k+\mu n)t} dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Преобразуем правую часть равенства (3). Полагая $P_{0,0} = 1$, $P_{0,-s} = 0$, $s = 1, 2, \dots, m$, переходя к новой переменной $\xi = t - x$ и потом используя формулу бинома Ньютона, получаем, что правая часть (3) равна

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m(n+1)} \sum_{p=0}^{\infty} P_{n,s-m}(k) c_s^{s-p} x^p e^{i(s+k)x} \int_0^{\infty} \frac{\sin k\xi}{k} \xi^{s-p} e^{i[\mu(n+1)+k]\xi} d\xi.$$

Теперь воспользовавшись единственностью разложения в ряд Фурье, получаем для определения $P_{n+1,s}(k)$ следующую рекуррентную формулу:

$$P_{n+1,s}(k) = \alpha \sum_{p=s}^{m(n+1)} P_{n,p-m}(k) C_p^{p-s} Q_{n+1,p-s}(k), \quad (4)$$

где

$$Q_{n,\beta}(k) = \frac{i^\beta \cdot \beta!}{2k} \left[\frac{1}{(2k + \mu n)^{\beta+1}} - \frac{1}{(\mu n)^{\beta+1}} \right], \quad \beta = 0, 1, 2, \dots, mn. \quad (5)$$

Пусть r и ε – произвольные положительные числа и область

$$D(\varepsilon, r) = \{k | 2k + \mu n | \geq \varepsilon > 0, |k| < r\}.$$

Тогда из (5) вытекает, что если $k \in D(\varepsilon, r)$, то справедлива оценка

$$|Q_{n,\beta}(k)| = \frac{\beta!}{n^{\beta+2}} C(\varepsilon, r, \mu), \quad (6)$$

где число $C(\varepsilon, r, \mu)$ зависит только от ε , r и μ .

Пусть $P_n = \sum_{s=0}^{mn} |P_{n,s}|$. Тогда, принимая во внимание оценку (6), из (4) находим, что

$$P_{n+1} \leq P_n \max_{0 \leq l \leq m(n+1)} A_{l,n}, \quad (7)$$

где

$$A_{l,n} = C(\varepsilon, r, \mu) \alpha \sum_{s=0}^l C_l^{l-s} \frac{(l-s)!}{(n+1)^{l-s+2}}.$$

Непосредственно проверяется неравенство

$$A_{l,n} \leq A_{l+1,n}, \quad l = 1, 2, \dots, m(n+1).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A_{m(n+1),n} &= C(\varepsilon, r, \mu) \alpha \sum_{s=0}^{m(n+1)} C_{m(n+1)}^{m(n+1)-s} \frac{[m(n+1)-s]!}{(n+1)^{m(n+1)-s+2}} \\ &\leq C_1(\varepsilon, r, \alpha, m, \mu) \frac{1}{(n+1)^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $C_1(\varepsilon, r, \alpha, m, n)$ зависит только от $\varepsilon, r, \alpha, m$ и μ .

Из (8) находим, что ряд (2) сходится равномерно в любой ограниченной области изменения x и $k \in D(\varepsilon, r)$. Действительно,

$$\left| \sum_{s=0}^{mn} P_{n,s}(k) x^s e^{i(\mu n + k)} \right| \leq P_n(1 + |x|)^{mn} e^{-\operatorname{Im} k \cdot x}$$

и поэтому члены ряда

$$\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(1 + |x|)^{mn} \right] e^{-\operatorname{Im} k \cdot x}$$

мажорируют соответствующие члены ряда (2) и сходятся равномерно в любой ограниченной области изменения x . Почленная дифференцируемость ряда (2) проверяется просто. Существование полюсов функции $f(x, k)$ в точках $k = -\mu n/2$, $n = 1, 2, \dots$, непосредственно вытекает из рекуррентных формул (4). Теорема доказана.

ЛЕММА 1. В точке $k = -\mu n/2$, $n = 1, 2, \dots$, функция $f(x, k)$ имеет полюс порядка $mn + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из рекуррентных формул (4) вытекает, что

$$P_{n-1, m(n-1)}(k) = \alpha^{n-1} \prod_{s=1}^{n-1} Q_{s,0}(k).$$

С другой стороны,

$$Q_{s,0}(k) = -\frac{1}{s(s+2k)}.$$

Тогда

$$Q_{s,0}\left(-\frac{\mu n}{2}\right) = \frac{1}{s(\mu n - s)}.$$

Поэтому

$$P_{n-1, m(n-1)}\left(-\frac{n}{2}\right) = \alpha^{n-1} \prod_{s=1}^{n-1} \frac{1}{s(\mu n - s)} = \frac{\alpha^{n-1} [\mu - 1] n!}{(n-1)! (\mu n - 1)!}.$$

Следовательно,

$$\lim_{2k + \mu n \rightarrow 0} (2k + \mu n)^{mn+1} P_{n,0}(k) = \frac{\alpha(i)^{mn+2} (mn)!}{\mu n} P_{n-1, m(n-1)}\left(-\frac{\mu n}{2}\right) \neq 0,$$

но $\lim_{2k + \mu n \rightarrow 0} (2k + \mu n)^{mn+1} P_{n,0}(k) = 0$.

Отсюда вытекает, что член в ряде (2) с номером n имеет полюс в точке $-\mu n/2$, $n = 1, 2, \dots$, порядка $mn + 1$, и нетрудно заметить, что последующие члены этот порядок не меняют.

2. Спектр и спектральное разложение по главным функциям оператора L . Для изучения спектра оператора L сначала с помощью общих методов вычисляется ядро резольвенты оператора $(L - \lambda E)^{-1}$. Для построения ядра резольвенты оператора L докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2. При любом k с $\operatorname{Im} k > 0$ функция $f(x, k) \in L_2(0, \infty)$ и $f(x, -k) \in L_2(-\infty, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение первой части леммы сводится к сходимости следующего повторного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{mn} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{s'=0}^{mn'} |P_{n,s}(k)| \cdot |P_{n',s'}(k)| \int_x^{\infty} x^{s+s'} e^{-2 \operatorname{Im} k x} dx. \quad (9)$$

При k с $\operatorname{Im} k > 0$ и из равенства $P_{n+1} \leq A_{m(n+1)n} P_n$ вытекает, что ряд (9) сходится.

Применяя аналогичные рассуждения, можно показать, что $f(x, -k) \in L_2(-\infty, 0)$.

ЛЕММА 3. Функции $f(x, k)$ и $f(x, -k)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) при $k \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из вида (2) и из оценок (7) и (8) вытекает, что $f(x, \pm k)$ допускает голоморфное продолжение в верхнюю полуплоскость по x и

$$\lim_{\operatorname{Im} x \rightarrow \infty} f^{(j)}(x, \pm k) e^{\pm k x} = (\pm i k)^j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \text{при } k \neq -\frac{\mu n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поэтому вронскиан решений $f(x, k)$ и $f(x, -k)$ равен $2ik$ и отличен от нуля при $k \neq 0$.

Используя лемму 3, непосредственно проверяем, что при $\operatorname{Im} k > 0$ оператор $(L - k^2 E)^{-1}$ существует, является ограниченным оператором и его ядро имеет вид

$$R(x, t; k) = \frac{1}{2ik} \begin{cases} f(x, k) f(t, -k), & t < x, \\ f(t, k) f(x, -k), & t > x. \end{cases} \quad (10)$$

Теперь приведем основную теорему о спектре оператора L .

ТЕОРЕМА 2. Спектр оператора L непрерывный, заполняет полуось $[0, +\infty]$, а на непрерывном спектре имеются спектральные особенности в точках $\lambda_n = (\mu n/2)^2$, $n = 1, 2, \dots$, кратности $mn + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко устанавливается, что никакая нетривиальная линейная комбинация решений (2) уравнения (1) не принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$. Отсюда вытекает, что оператор L не имеет собственных значений.

Пусть $s \neq (\mu n/2)^2$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [R(x, t; \sqrt{s + i\varepsilon}) - R(x, t; \sqrt{s - i\varepsilon})] = \frac{i}{\sqrt{s}} f(x, \sqrt{s}) f(t, -\sqrt{s})$$

и поэтому s принадлежит непрерывному спектру оператора L . Из (10) очевидно, что на непрерывном спектре ядро резольвенты имеет полюсы в точках $\lambda_n = (\mu n/2)^2$, $n = 1, 2, \dots$, порядка $mn + 1$ и эти точки не являются собственными значениями оператора L . Следовательно, они являются спектральными особенностями (см. [4; с. 456]).

Теперь приведем формулу разложения по главным функциям оператора L , которая непосредственно выводится из (10). Обозначим через Γ_δ^+ (Γ_δ^-) контур, образованный подотрезками

$$\left[0, \frac{\mu}{2} - \delta\right], \quad \left[\frac{\mu}{2} + \delta, \frac{\mu(n+1)}{2} - \delta\right], \quad n = 1, 2, \dots,$$

и полуокружностями радиуса δ с центрами в точках $\mu n/2$, $n = 1, 2, \dots$, расположенных в верхней (в нижней) полуплоскости. Контур Γ_δ^+ получается из Γ_δ^- поворотом на угол π . В этих обозначениях очевидно, что если $z = |z| \cdot \exp(i\varphi)$, $0 < \varphi < \pi$, то

$$\begin{aligned} R(x, t; z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|k-z|=\delta} \frac{R(x, t; k)}{k^2 - z^2} dk^2 \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_\delta^+} \frac{R(x, t; k) - R(x, t; -k)}{k^2 - z^2} k dk + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\mu n/2)}{(\mu n/2)^2 - z^2} \operatorname{Re} sR(x, t; k) \Big|_{k=\mu n/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя представление (10), нетрудно проверить, что

$$[R(x, t; k) - R(x, t; -k)]k = \frac{1}{2i} [f(x, k)f(t, -k) + f(x, -k)f(t, k)].$$

Тогда из (11) вытекает, что

$$\begin{aligned} R(x, t; z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\delta^-} \frac{f(x, k)f(t, -k) + f(x, -k)f(t, k)}{k^2 - z^2} dk \\ &\quad - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{2}\right)^{mn+1} \frac{\{(d/dk)^{mn} e^{-ikx} P_{n-1, m(n-1)}(k)\}_{k=\mu n/2} f^{(mn)}(t, \mu n/2)}{(\mu n/2)^2 - z^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Это формула есть спектральное разложение ядра резольвенты оператора L . В формуле (12) перейдем к пределу при $\delta \rightarrow 0$. В результате находим, что

$$\begin{aligned} R(x, t; z) &= \frac{1}{2\pi} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, -k)f(t, k)}{k^2 - z^2} dk \\ &\quad - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{2}\right)^{mn+1} \frac{\{(d/dk)^{mn} e^{-ikx} P_{n-1, m(n-1)}(k)\}_{k=\mu n/2} f^{(mn)}(t, \mu n/2)}{(\mu n/2)^2 - z^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\arg z \in (0, \pi)$ и интеграл понимается в смысле главного значения в полюсах $\mu n/2$ ($n = \pm 1, \pm 2$) по пути интегрирования подынтегральной функции.

Из (13) вытекает следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\theta(x)$ принадлежит области определения $D(L)$ оператора L и $x\theta(x) \in L_1(-\infty, \infty)$. Тогда $\theta(x)$ разлагается по главным функциям непрерывного

спектра и спектральным особенностям оператора L следующим образом:

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\theta}(k) f(x, -k) dk - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{2}\right)^{mn+1} \left\{ \left(\frac{d}{dk}\right)^{mn} e^{-ikx} P_{n-1, m(n-1)}(k) \right\}_{k=\mu n/2} \widehat{\theta}^{(mn)}\left(\frac{\mu n}{2}\right), \quad (14)$$

где $\widehat{\theta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) f(t, k) dt$. Здесь интеграл и ряд в (14) сходятся абсолютно и равномерно по x из любой ограниченной области изменения.

В заключение выражаю глубокую благодарность академику НАН Азербайджана М.Г. Гасымову за проявленное внимание при обсуждении данной работы на его научном семинаре.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Г. Гасымов, “О спектре одного несамосопряженного оператора”, *УМН*, **36**:6 (1981), 209–210.
- [2] М. Г. Гасымов, “Спектральный анализ одного класса несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка”, *Функци. анализ и его прил.*, **14**:1 (1980), 14–19.
- [3] Л. А. Пастур, В. А. Ткаченко, “Обратная задача для одного класса одномерных операторов Шрёдингера с комплексным периодическим потенциалом”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:6 (1990), 1252–1269.
- [4] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.

М. Дж. Манафов

Институт математики и механики НАН Азербайджана

Поступило

17.03.2004