Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Мартьянов, Оценки скорости сходимости одного алгоритма динамической реконструкции при неполной информации относительно фазового состояния, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 1, 64–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3754>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:27:09

Оценки скорости сходимости одного алгоритма динамической реконструкции при неполной информации относительно фазового состояния

А. С. Мартьянов

В статье исследуется алгоритм динамической реконструкции, который по результатам измерений части координат восстанавливает неизвестный неограниченный вход и все ненаблюдаемые фазовые координаты. Получены верхняя и нижняя оценки точности восстановления. Указан класс корректности входов, относительно которого верхняя оценка является равномерной. Приведено условие оптимального согласования параметров алгоритма, обеспечивающее наивысший порядок верхней оценки и уравнивающее верхнюю и нижнюю оценки по порядку. Таким образом, установлен факт неулучшаемости верхней оценки.

Библиография: 8 названий.

1. Постановка задачи. Рассматривается динамическая система, описываемая нелинейными дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{y}(t) = \varphi_1(t, y(t), z(t)) + \varphi_2(t, y(t), z(t))u(t), \quad (1.1)$$

$$\dot{z}(t) = \psi_1(t, y(t), z(t)) + \psi_2(t, y(t), z(t))u(t), \quad (1.2)$$

$$t \in T = [0, \vartheta], \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0.$$

Пара $\{y(t), z(t)\} = x(t) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n$ составляет фазовую траекторию системы, порождаемую меняющимся во времени входным воздействием $u(\cdot) \in U_T = L_2(T; \mathbb{R}^n)$ – множество допустимых входов. Векторные функции $\varphi_1(\cdot)$, $\psi_1(\cdot)$ отображают декартово произведение $T \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n$ соответственно в $\mathbb{R}^q$ и $\mathbb{R}^n$, матричные функции $\varphi_2(\cdot)$, $\psi_2(\cdot)$ – в пространства $(q \times n)$ - и $(n \times n)$ -мерных матриц. Функции $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot)$, $\psi_1(\cdot)$, $\psi_2(\cdot)$ удовлетворяют условию Липшица по совокупности аргументов с константами $c[g]$, $g(\cdot) = \varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot)$.

УСЛОВИЕ 1. Ранг матрицы $\varphi_2(\cdot)$ на $T \times E_y \times E_z$ равен n и $n = q$, где E_y и E_z – ограниченные подмножества пространств $\mathbb{R}^q$ и $\mathbb{R}^n$ такие, что $x(t) = \{y(t), z(t)\}$ лежит внутри $E_y \times E_z$ при $t \in T$.

УСЛОВИЕ 2. Матричные функции $\varphi_2^{-1}(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ дифференцируемы по своим аргументам и их производные ограничены.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00359), Программы поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН № 22 “Процессы управления”, Урало-Сибирского интердисциплинарного проекта, а также Программы поддержки “Ведущие научные школы” (проект № НШ-7581.2006.1).

Изначально как траектория $x(\cdot)$, так и порождающий ее вход $u(\cdot)$ не заданы. В дискретные достаточно частые моменты времени $\tau_i \in T$ измеряется часть координат текущего фазового вектора, а именно, компонента $y(\tau_i)$. Результаты измерений – векторы $\eta_i^h \in \mathbb{R}^q$ – неточны, они удовлетворяют неравенству

$$|\eta_i^h - y(\tau_i)| \leq h. \quad (1.3)$$

Величина $h \in (0, 1)$ характеризует погрешность измерения. Предложенный в [1] позиционный алгоритм по текущей информации η_i^h в режиме “реального времени” восстанавливает неизмеряемую компоненту $z(t)$ фазового вектора, а также управление $u(t)$, порождающее выход $y(\cdot)$. Именно в процессе развития движения системы алгоритм формирует пару “траектория–управление” $\{w_z^h(\cdot), u^h(\cdot)\}$, “близкую” к паре $\{z(\cdot), u(\cdot)\}$ в соответствующей метрике. Данный алгоритм следует классическому подходу, предложенному Осиповым и Кряжским (см. [2], [3]), который базируется на сочетании принципа управления с моделью метода теории некорректных задач (в данном случае метода сглаживающего функционала).

В настоящей статье для данного алгоритма проведен анализ скорости сходимости с получением оценок точности порядка $O(h^{1/4})$. Установлен класс корректности входов, для которого верхняя оценка является равномерной относительно этого класса, а также проведено исследование наиболее информативного случая, когда верхняя и нижняя оценки точности совпадают по порядку (относительно показателя точности наблюдения). Для других динамических алгоритмов реконструкции некоторые нижние оценки приведены в [4]–[6]. При этом в работах [4], [5], [7] рассмотрены случаи, когда управления стеснены “мгновенными” ограничениями, т.е. $u(t) \in P$, P – выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Статья [6] посвящена стационарным линейным параболическим уравнениям.

Напомним общую схему рассматриваемого алгоритма [1]. До начала работы алгоритма выбирается семейство равномерных разбиений отрезка T :

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \tau_{h,m_h} = T. \quad (1.4)$$

Модель M задается группой дифференциальных уравнений

$$\dot{w}_y^h(t) = \bar{u}^h(t), \quad (1.5)$$

$$\dot{w}_z^h(t) = \psi_1(\tau_{h,i}, \xi_i^h) + \psi_2(\tau_{h,i}, \xi_i^h) \varphi_2^{-1}(\tau_{h,i}, \xi_i^h) [\bar{u}^h(t) - \varphi_1(\tau_{h,i}, \xi_i^h)], \quad (1.6)$$

$$\dot{w}_v^h(t) = \varphi_1(\tau_{h,i}, \xi_i^h) + \varphi_2(\tau_{h,i}, \xi_i^h) u^h(t) + \nu^h(t), \quad (1.7)$$

$$\xi_i^h = \{\eta_i^h, w_z^h(\tau_{h,i})\}, \quad t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, m_h - 1,$$

с начальными условиями

$$w_y^h(0) = y_0, \quad w_z^h(0) = z_0, \quad w_v^h(0) = y_0$$

и управлением следующей структуры:

$$U^h(t) = \{\bar{u}^h(t), u^h(t), \nu^h(t)\}.$$

Тройка $\{w_y^h(t), w_z^h(t), w_v^h(t)\} = w^h(t) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q$ составляет фазовый вектор модели. Закон формирования управления в модели реализуется по принципу обратной связи и отождествляется с правилом, ставящим в соответствие каждой пятерке

$$q^{(i)}(\cdot) = \{\tau_{h,i}, \eta_i^h, \eta_{i-1}^h, w_z^h(\tau_{h,i}), w_v^h(\tau_{h,i})\}, \quad i = 1, 2, \dots, m_h - 1,$$

– называемой *позицией*, вектор $U_i^h = \{\bar{u}_i^h, u_i^h, \nu_i^h\}$, компоненты которого вычисляются согласно формулам

$$\bar{u}_0^h = 0, \quad \bar{u}_i^h = \frac{\eta_i^h - \eta_{i-1}^h}{\delta(h)}, \quad i \geq 1, \quad (1.8)$$

$$u_i^h = \frac{1}{\alpha(h)} \varphi_2'(\tau_{h,i}, \eta_i^h, w_z^h(\tau_{h,i}))(\eta_i^h - w_v^h(\tau_{h,i})), \quad (1.9)$$

$$\nu_i^h = \frac{c\delta(h)}{\alpha^2(h)}(\eta_i^h - w_v^h(\tau_{h,i})), \quad (1.10)$$

где $c > 0$ – некоторая константа, вид которой выписывается явно; штрих означает транспонирование. Работа алгоритма (при фиксированном h) разбивается на конечное число однотипных шагов. Очередной i -й шаг выполняется на промежутке времени $[\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$. В течение этого шага осуществляются следующие операции. Сначала согласно (1.8)–(1.10) вычисляется тройка векторов $\{\bar{u}_i^h, u_i^h, \nu_i^h\}$, составляющая вектор управления U_i^h , а затем на вход модели (1.5)–(1.7) подаются постоянные управления

$$\bar{u}^h(t) = \bar{u}_i^h, \quad u^h(t) = u_i^h, \quad \nu^h(t) = \nu_i^h, \quad t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}). \quad (1.11)$$

После этого пересчитывается фазовое состояние модели, и вместо $w^h(\tau_{h,i})$ находится $w^h(\tau_{h,i+1})$. Вся процедура заканчивается в момент ϑ . При этом, если функция $\alpha(h)$ (параметр регуляризации) и диаметр разбиения $\delta(h)$ такие, что при $h \rightarrow 0$ выполняются условия

$$\delta(h) \rightarrow 0, \quad \alpha(h) \rightarrow 0, \quad \frac{h + \delta(h)}{\alpha(h)} \rightarrow 0, \quad \frac{h}{\delta(h)} \leq \lambda, \quad (1.12)$$

где λ – положительная константа, то имеет место равномерная сходимость компоненты $w_z^h(\cdot)$ фазовой траектории модели к ненаблюдаемым координатам $z(\cdot)$ исходной системы и среднеквадратичная сходимость $u^h(\cdot)$ к входному воздействию $u(\cdot)$.

Введем подкласс входов равномерно ограниченных по величине и значению вариации на временном промежутке $[0, \vartheta]$:

$$U_T(a, b) = \{u(\cdot) \in U_T : \text{var}_{[0, \vartheta]} u(t) \leq a, |u(t)| \leq b, t \in [0, \vartheta]\}.$$

Далее всюду считаем выполненным условие

$$u(\cdot) \in U_T(a, b). \quad (1.13)$$

Перейдем непосредственно к вычислению верхних и нижних оценок точности. Покажем, что относительно подкласса $U_T(a, b) \subset U_T$ верхняя оценка является равномерной.

2. Верхняя оценка скорости сходимости. Для краткости выкладок введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F(t) &= \varphi_1(t, y(t), z(t)), & F_{h,i} &= \varphi_1(\tau_{h,i}, \eta_i^h, w_z^h(\tau_{h,i})), \\ B(t) &= \varphi_2(t, y(t), z(t)), & B_{h,i} &= \varphi_2(\tau_{h,i}, \eta_i^h, w_z^h(\tau_{h,i})). \end{aligned}$$

Из (1.13) следует: $|y(t^*) - y(t_*)| \leq c[y]|t^* - t_*|$, $t^*, t_* \in T$.

ЛЕММА 1. Пусть выполнено (1.13); тогда имеют место следующие оценки:

$$|w_y^h(\cdot) - y(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^q)} \leq 3h + 2c[y]\delta(h), \quad (2.1)$$

$$|w_z^h(\cdot) - z(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^r)} \leq k(h + \delta(h)). \quad (2.2)$$

Доказательство проводится по схеме леммы 2 [1].

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия (1.12). Тогда можно указать число $\tilde{h} \in (0, 1)$ и постоянную d_1 такие, что при всех $h \in (0, \tilde{h}]$ справедливо неравенство

$$|w_v^h(\cdot) - y(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^q)} \leq d_1 \alpha(h). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим величину $x^h(t) = w_v^h(t) - y(t)$. Имеет место следующая цепочка равенств (см. (1.1), (1.7)):

$$\begin{aligned} x_{i+1}^h &= w_v^h(\tau_{h,i+1}) - y(\tau_{h,i+1}) = w_v^h(\tau_{h,i}) - y(\tau_{h,i}) \\ &\quad + \int_{\tau_{h,i}}^{\tau_{h,i+1}} (F_{h,i} + B_{h,i}u_i^h + \nu_i^h) dt - \int_{\tau_{h,i}}^{\tau_{h,i+1}} (F(t) + B(t)u(t)) ds \\ &= x_i^h + \delta(B_{h,i}u_i^h + \nu_i^h) - \int_{\tau_{h,i}}^{\tau_{h,i+1}} (F(t) - F_{h,i} + B(t)u(t)) ds. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\beta_i^h = \int_{\tau_{h,i}}^{\tau_{h,i+1}} (F(t) - F_{h,i} + B(t)u(t)) dt, \quad P_i^h = B_{h,i}B'_{h,i}.$$

Тогда согласно (1.9), (1.10) имеем

$$\begin{aligned} x_{i+1}^h &= x_i^h + \delta \left(P_i^h + \frac{c\delta}{\alpha} I_q \right) \frac{\eta_i^h - w_v^h(\tau_{h,i})}{\alpha} - \beta_i^h \\ &= x_i^h - \beta_i^h + \delta \left(P_i^h + \frac{c\delta}{\alpha} I_q \right) \left\{ \frac{\eta_i^h - y(\tau_{h,i})}{\alpha} - \frac{w_v^h(\tau_{h,i}) - y(\tau_{h,i})}{\alpha} \right\} \\ &= \left\{ I_q - \frac{\delta}{\alpha} \left(P_i^h + \frac{c\delta}{\alpha} I_q \right) \right\} x_i^h + \delta \left(P_i^h + \frac{c\delta}{\alpha} I_q \right) \frac{\eta_i^h - y(\tau_{h,i})}{\alpha} - \beta_i^h, \end{aligned}$$

откуда получаем разностное уравнение вида

$$x_{i+1}^h = A_i^h x_i^h + \gamma_i^h, \quad i = 0, 1, \dots, m_h - 1, \quad x_0^h = 0, \quad (2.4)$$

где

$$A_i^h = I_q - \frac{\delta}{\alpha} \left(P_i^h + \frac{c\delta}{\alpha} I_q \right), \quad \gamma_i^h = \delta \left(P_i^h + \frac{c\delta}{\alpha} I_q \right) \frac{\eta_i^h - y(\tau_{h,i})}{\alpha} - \beta_i^h.$$

Рассмотрим свойства матрицы A_i^h и неоднородности γ_i^h . Для каждого i матрица P_i^h является симметричной и положительно определенной [8]. Тогда

$$P_i^h = V_i \text{diag}(\lambda_{i,j}^P) V_i',$$

где $\lambda_{i,j}^P > 0$ – собственные числа, $j = 1, 2, \dots, q$, V_i – ортогональная матрица (т.е. выполнено $V_i V_i' = I_q$), составленная из собственных векторов матрицы P_i^h . Обозначим $\lambda_i^{\min} = \min_{j=1, \dots, q}(\lambda_{i,j}^P)$, $\lambda^{\min} = \min_{i=0, \dots, m_h-1}(\lambda_i^{\min})$, $\lambda_i^{\max} = \max_{j=1, \dots, q}(\lambda_{i,j}^P)$,

$\lambda^{\max} = \max_{i=0, \dots, m_h-1} (\lambda_i^{\max})$. Введем матричную норму $|P_i^h| = \lambda_i^{\max}$. Матрица A_i^h является симметричной, с собственными значениями

$$s_{i,j}^A(h) = 1 - \frac{\delta(h)}{\alpha(h)} \left(\lambda_{i,j}^P + \frac{c\delta(h)}{\alpha(h)} \right), \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (2.5)$$

Для некоторого фиксированного $\varepsilon \in (0, 1)$ положим

$$\tilde{h} = \arg \left\{ \frac{\delta(h)}{\alpha(h)} = \rho(\varepsilon) : \rho(\varepsilon) = \frac{(\sqrt{(\lambda^{\max})^2 + 4c(1-\varepsilon)} - \lambda^{\max})}{2c} \right\}.$$

Тогда при $h \in (0, \tilde{h})$ собственные числа $s_{i,j}^A(h) \in [\varepsilon, 1)$, т.е. матрицы A_i^h являются невырожденными и сжимающими. Решение уравнения (2.4) имеет вид

$$x_i^h = \left(\prod_{k=0}^{i-1} A_k^h \right) x_0^h + \sum_{k=0}^{i-1} \left(\prod_{l=0}^k A_l^h \right) (A_0^h)^{-1} \gamma_{i-k-1}^h, \quad i = 1, 2, \dots, m_h. \quad (2.6)$$

Рассмотрим неоднородность γ_i^h . Из (2.2) имеем

$$|F(t) - F_{h,i}| \leq c[\varphi_1] \{ (1 + c[y] + c[z] + k)\delta + (1 + k)h \} \leq c[F](h + \delta). \quad (2.7)$$

Тогда

$$|\beta_i^h| \leq \int_{\tau_{h,i}}^{\tau_{h,i+1}} (|F(t) - F_{h,i}| + |B(t)u(t)|) dt \leq (c[F](h + \delta) + |B(t)|b)\delta \leq b[\beta]\delta.$$

Отсюда следует справедливость оценки

$$\begin{aligned} |\gamma_i^h| &= \left| \delta \left(P_i^h + \frac{c\delta}{\alpha} I_q \right) \frac{\eta_i^h - y(\tau_{h,i})}{\alpha} - \beta_i^h \right| \\ &\leq \frac{h\delta}{\alpha} \left(\lambda^{\max} + \frac{c\delta}{\alpha} \right) + b[\beta]\delta \leq b[\gamma]\delta, \quad i = 1, 2, \dots, m_h. \end{aligned}$$

Введем величины

$$s_i^{\max}(h) = \max_{j=1, \dots, q} (s_{i,j}^A(h)), \quad s^{\max}(h) = \max_{i=0, \dots, m_h-1} (s_i^{\max}(h)) > 0.$$

Тогда выполняется неравенство

$$\left| \prod_{k=0}^{i-1} A_k^h \right| \leq \prod_{k=0}^{i-1} |A_k^h| \leq \prod_{k=0}^{i-1} s_k^{\max}(h) \leq (s^{\max}(h))^i.$$

Возвращаясь к (2.6), получим

$$|x_i^h| \leq |x_0^h| (s^{\max}(h))^i + \sum_{k=0}^{i-1} |\gamma_{i-k-1}^h| (s^{\max}(h))^k \leq |x_0^h| (s^{\max}(h))^i + b[\gamma] \sum_{k=0}^{i-1} (s^{\max}(h))^k \delta.$$

Используя формулу для суммы членов геометрической прогрессии, выводим

$$\sum_{k=0}^{i-1} (s^{\max}(h))^k = \frac{(1 - (s^{\max}(h))^i)}{1 - s^{\max}(h)} \leq \frac{\alpha}{\lambda^{\min} \delta}.$$

Напомним, что $x_0^h = 0$; тогда выполняется оценка

$$|x_i^h| \leq b[\gamma] \sum_{k=0}^{i-1} (s^{\max}(h))^k \delta \leq \frac{b[\gamma]\alpha}{\lambda^{\min}} \leq d_0\alpha, \quad i = 0, 1, \dots, m_h - 1. \quad (2.8)$$

Из (1.3), (2.8), (1.9) и (1.10) имеют место ограничения

$$|u_i^h| = \left| \frac{B'_{h,i}(\eta_i^h - w_v^h(\tau_{h,i}))}{\alpha} \right| \leq \left(\frac{h}{\alpha} + d_0 \right) \sqrt{\lambda^{\max}} \leq c_u, \quad (2.9)$$

$$|\nu_i^h| = \left| \frac{c\delta(\eta_i^h - w_v^h(\tau_{h,i}))}{\alpha^2} \right| \leq \left(\frac{h}{\alpha} + d_0 \right) \frac{c\delta}{\alpha} \leq c_\nu \frac{\delta}{\alpha}. \quad (2.10)$$

Из последнего следует $|w_v^h(t) - w_v^h(\tau_{h,i})| \leq c[w]\delta$, $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$. Таким образом, для $t \in T$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} |w_v^h(t) - y(t)| &= |w_v^h(t) - w_v^h(\tau_{h,i})| + |w_v^h(\tau_{h,i}) - y(\tau_{h,i})| \\ &\quad + |y(\tau_{h,i}) - y(t)| \leq c[w]\delta + d_0\alpha + c[y]\delta \leq d_1\alpha. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия (1.12) и (1.13). Тогда можно указать постоянную d_2 такую, что справедливо неравенство

$$\int_0^\vartheta |u^h(t)|^2 dt \leq \int_0^\vartheta |u(t)|^2 dt + d_2 \left(\frac{h + \delta(h)}{\alpha(h)} \right). \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$\mu(t) = |w_v^h(t) - y(t)|^2 + \alpha \int_0^\vartheta (|u^h(\tau)|^2 - |u(\tau)|^2) d\tau.$$

Пусть $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$. Оценим разность

$$\begin{aligned} \mu(t) - \mu(\tau_{h,i}) &= 2 \int_{\tau_{h,i}}^t \langle \dot{w}_v^h(s) - \dot{y}(s), w_v^h(s) - y(s) \rangle ds + \alpha \int_{\tau_{h,i}}^t (|u^h(s)|^2 - |u(s)|^2) ds \\ &= 2 \int_{\tau_{h,i}}^t \langle F_{h,i} + B_{h,i}u_i^h + \nu_i^h - F(s) - B(s)u(s), w_v^h(s) - y(s) \rangle ds \\ &\quad + \alpha \int_{\tau_{h,i}}^t (|u^h(s)|^2 - |u(s)|^2) ds \\ &= \{\gamma_i^{(0)}(t; u^h(\cdot)) - \gamma_i^{(0)}(t, u(\cdot))\} + \gamma_i^{(1)}(t) + \gamma_i^{(2)}(t) + \gamma_i^{(3)}(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_i^{(0)}(t; v(\cdot)) &= \int_{\tau_{h,i}}^t (2\langle B_{h,i}v(s), w^h(\tau_{h,i}) - \eta_i^h \rangle + \alpha(h)|v(s)|^2) ds, \\ \gamma_i^{(1)}(t) &= 2 \int_{\tau_{h,i}}^t \langle F_{h,i} - F(s) + \nu_i^h, w_v^h(s) - y(s) \rangle ds, \\ \gamma_i^{(2)}(t) &= 2 \int_{\tau_{h,i}}^t \langle B_{h,i}(u_i^h - u(s)), w_v^h(s) - w_v^h(\tau_{h,i}) + \eta_i^h - y(s) \rangle ds, \\ \gamma_i^{(3)}(t) &= 2 \int_{\tau_{h,i}}^t \langle (B_{h,i} - B(s))u(s), w_v^h(s) - y(s) \rangle ds.\end{aligned}$$

Здесь и далее угловые скобки означают скалярное произведение. Нетрудно видеть (см. (1.9)), что $u^h(t) = \arg \min \{ \gamma_i^{(0)}(t; v(t)) : v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n) \}$ при $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$. Также справедливы следующие оценки (см. (1.13), (2.7)):

$$\begin{aligned}|\gamma_i^{(1)}(t)| &\leq 2 \int_{\tau_{h,i}}^t (|F_{h,i} - F(s)| + |\nu_i^h|) |w_v^h(s) - y(s)| ds \leq 2d_2 \left(c[F](h + \delta) + \frac{c_\nu \delta}{\alpha} \right) \alpha \delta, \\ |\gamma_i^{(2)}(t)| &\leq 2\sqrt{\lambda^{\max}}(c_u + b) \{ |w_v^h(t) - w_v^h(\tau_{h,i})| + |\eta_i^h - y(t)| \} \delta \\ &\leq 2\sqrt{\lambda^{\max}}(c_u + b) \{ (c[w] + c[y])\delta + h \} \delta.\end{aligned}$$

Из (2.2) следует, что

$$|B_{h,i} - B(s)| \leq c[\varphi_2](\delta + h + c[y]\delta + k(h + \delta)) \leq c[B](h + \delta). \quad (2.12)$$

Тогда

$$|\gamma_i^{(3)}(t)| \leq 2c[B]bd_2(h + \delta)\alpha\delta.$$

Учитывая полученные соотношения, имеем

$$\mu(t) - \mu(\tau_{h,i}) \leq |\gamma_i^{(1)}(t)| + |\gamma_i^{(2)}(t)| + |\gamma_i^{(3)}(t)| \leq \delta(c_1 h + c_2 \delta + c_3(h + \delta)\alpha),$$

где $c_1 = 2\sqrt{\lambda^{\max}}(c_u + b)$, $c_2 = c_1(c[w] + c[y]) + 2d_2 c_\nu$, $c_3 = 2d_2(c[F] + c[B]b)$. Последнее неравенство выполнено для всех $i = 0, 1, \dots, m_h - 1$. Заметим, что

$$\mu(0) = |w_v^h(0) - y(0)|^2 = 0.$$

Таким образом, при любом $t \in [0, \vartheta]$

$$\mu(t) \leq c_4(h + \delta)\vartheta, \quad c_4 = \max\{c_1 + c_3, c_2 + c_3\}.$$

Отсюда вытекает утверждаемая оценка (2.11).

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия согласования параметров (1.12). Тогда имеет место равномерная относительно подкласса функций $U_T(a, b) \subset U_T$ верхняя оценка скорости сходимости

$$\int_0^\vartheta |u^h(t) - u(t)|^2 dt \leq d_3 \left(\alpha(h) + \frac{h + \delta(h)}{\alpha(h)} \right). \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы опирается на леммы 1–3 и проводится по схеме теоремы 2 [1].

3. Нижняя оценка скорости сходимости. Рассмотрим некоторую траекторию $x(\cdot) = \{y(\cdot), z(\cdot)\}$, порожденную постоянным управлением $u(t; y(\cdot), z(\cdot)) = u \in U_T(a, b)$. Имеет место теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции $\delta(h)$, $\alpha(h)$ удовлетворяют условию (1.12). Тогда существует число $\bar{h} > 0$ такое, что для любого $h \in (0, \bar{h}]$ и постоянного входа $u \in U_T(a, b)$ справедлива оценка

$$\int_0^{\vartheta} |u^h(t) - u|^2 dt \geq d_4 \alpha(h). \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим величину $v_i^h = u_i^h - u$. Имеет место цепочка равенств:

$$\begin{aligned} v_{i+i}^h - v_i^h &= u_{i+1}^h - u_i^h = \frac{B'_{h,i+1}}{\alpha} (\eta_{i+1}^h - w_v(\tau_{h,i+1})) - \frac{B'_{h,i}}{\alpha} (\eta_i^h - w_v(\tau_{h,i})) \\ &= \frac{B'_{h,i+1}}{\alpha} \left(\eta_{i+1}^h - \left(w_v(\tau_{h,i}) + \int_{\tau_{h,i}}^{\tau_{h,i+1}} (F_i^h + B_{h,i} u_i^h + \nu_i^h) d\tau \right) \right) \\ &\quad - \frac{B'_{h,i}}{\alpha} (\eta_i^h - w_v(\tau_{h,i})) \\ &= -\frac{\delta}{\alpha} B'_{h,i+1} B_{h,i} u_i^h \\ &\quad + \frac{B'_{h,i+1}}{\alpha} (\eta_{i+1}^h - w_v(\tau_{h,i}) - (F_i^h + \nu_i^h) \delta) - \frac{B'_{h,i}}{\alpha} (\eta_i^h - w_v(\tau_{h,i})) \\ &= -\frac{\delta}{\alpha} B'_{h,i} B_{h,i} u_i^h - \frac{\delta}{\alpha} (B'_{h,i+1} - B'_{h,i}) B_{h,i} u_i^h - \frac{\delta}{\alpha} B'_{h,i+1} (F_i^h + \nu_i^h) \\ &\quad + \frac{B'_{h,i+1}}{\alpha} (\eta_{i+1}^h - w_v(\tau_{h,i})) - \frac{B'_{h,i}}{\alpha} (\eta_i^h - w_v(\tau_{h,i})) \\ &= -\frac{\delta}{\alpha} B'_{h,i} B_{h,i} (u_i^h - u) - \frac{\delta}{\alpha} B'_{h,i} B_{h,i} u \\ &\quad - \frac{\delta}{\alpha} (B'_{h,i+1} - B'_{h,i}) B_{h,i} u_i^h - \frac{\delta}{\alpha} B'_{h,i+1} (F_i^h + \nu_i^h) \\ &\quad + (B'_{h,i+1} - B'_{h,i}) \frac{(\eta_i^h - w_v(\tau_{h,i}))}{\alpha} + \frac{B'_{h,i+1}}{\alpha} (\eta_{i+1}^h - \eta_i^h). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующее разностное уравнение:

$$v_{i+1}^h = E_i^h v_i^h + \xi_i^h, \quad i = 0, 1, \dots, m_h - 1, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} E_i^h &= I - \frac{\delta}{\alpha} L_i^h, \quad L_i^h = B'_{h,i} B_{h,i}, \\ \xi_i^h &= \sum_{k=1}^5 \beta_{k,i}^h, \\ \beta_{1,i}^h &= -\frac{\delta}{\alpha} L_i^h u, \quad \beta_{2,i}^h = -\frac{\delta}{\alpha} (B'_{h,i+1} - B'_{h,i}) B_{h,i} u_i^h, \\ \beta_{3,i}^h &= -\frac{\delta}{\alpha} B'_{h,i+1} (F_i^h + \nu_i^h), \quad \beta_{4,i}^h = (B'_{h,i+1} - B'_{h,i}) \frac{(\eta_i^h - w_v(\tau_{h,i}))}{\alpha}, \end{aligned}$$

$$\beta_{5,i}^h = \frac{B'_{h,i+1}}{\alpha} (\eta_{i+1}^h - \eta_i^h).$$

Матрица L_i^h , а следовательно, и E_i^h , для каждого i являются симметричными. Собственные числа матрицы E_i^h определяются значениями

$$s_{i,j}^E(h) = 1 - \frac{\delta(h)}{\alpha(h)} \lambda_{i,j}^L, \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (3.3)$$

Имеют место равенства $\lambda^{\min} = \min_{i,j}(\lambda_{i,j}^L)$, $\lambda^{\max} = \max_{i,j}(\lambda_{i,j}^L)$. Тогда $|L_i^h| \leq \lambda^{\max}$. Пусть $\delta(h)$ и $\alpha(h)$ такие, что для некоторого фиксированного значения $\varepsilon \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$\frac{\delta(h)}{\alpha(h)} \leq \frac{1 - \varepsilon}{\lambda^{\max}}. \quad (3.4)$$

Тогда собственные числа $s_{i,j}^E(h) \in [\varepsilon, 1)$, т.е. матрицы E_i^h являются невырожденными и сжимающими. Решение разностного уравнения (3.2) имеет вид

$$v_i^h = \left(\prod_{k=0}^{i-1} E_k^h \right) v_0^h + \sum_{k=0}^{i-1} \left(\prod_{r=0}^k E_r^h \right) (E_0^h)^{-1} \xi_{i-k-1}^h, \quad i = 1, 2, \dots, m_h. \quad (3.5)$$

Обозначим

$$C_i = \left| \left(\prod_{k=0}^{i-1} E_k^h \right) v_0^h \right|, \quad D_i = \left| \sum_{k=0}^{i-1} \left(\prod_{r=0}^k E_r^h \right) (E_0^h)^{-1} \xi_{i-k-1}^h \right|.$$

Получим оценку для неоднородности ξ_i^h . Имеют место неравенства

$$|\beta_{1,i}^h| \leq \frac{\delta}{\alpha} \lambda^{\max} b = k_1 \frac{\delta}{\alpha}.$$

Из (2.9), (2.10) и (2.13) следует, что

$$\begin{aligned} |\beta_{2,i}^h| &\leq \frac{\delta}{\alpha} \sqrt{\lambda^{\max}} c[B] (h + \delta) c_u = \frac{c[B] c_u \sqrt{\lambda^{\max}}}{\alpha} (h + \delta) \delta = k_2 \frac{(h + \delta) \delta}{\alpha}, \\ |\beta_{3,i}^h| &\leq \frac{\delta}{\alpha} \sqrt{\lambda^{\max}} \left(b[F] + c_\nu \frac{\delta}{\alpha} \right) \leq k_3 \frac{\delta}{\alpha}. \end{aligned}$$

Используя результат (2.3), выводим

$$\begin{aligned} |\beta_{4,i}^h| &\leq |B'_{h,i+1} - B'_{h,i}| \frac{|\eta_i^h - y(\tau_{h,i})| + |y(\tau_{h,i}) - w_v^h(\tau_{h,i})|}{\alpha} \\ &\leq c[B] (h + \delta) \frac{h + d_2 \alpha}{\alpha} \leq k_4 (h + \delta), \\ |\beta_{5,i}^h| &\leq \frac{\sqrt{\lambda^{\max}}}{\alpha} (2h + c[y] \delta) \leq k_5 \frac{(h + \delta)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $i = 0, 1, \dots, m_h - 1$ выполняется

$$\begin{aligned} |\xi_i^h| &\leq \sum_{k=1}^5 |\beta_{k,i}^h| \leq (k_1 + k_2(h + \delta) + k_3 + k_5) \frac{\delta}{\alpha} \\ &\quad + k_5 \frac{h}{\alpha} + k_4(h + \delta) \leq b[\xi] \frac{(h + \delta)}{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Обозначим (см. (3.3))

$$s^{\min}(h) = \left(1 - \frac{\lambda^{\max}\delta(h)}{\alpha(h)}\right) \leq s_{i,j}^E(h) \leq \left(1 - \frac{\lambda^{\min}\delta(h)}{\alpha(h)}\right) = s^{\max}(h).$$

Так как матрицы E_i^h невырожденные (см. (3.4)), то

$$|v_0^h|(s^{\min}(h))^i \leq C_i \leq |v_0^h|(s^{\max}(h))^i.$$

Из вида суммы членов геометрической последовательности и из (3.6) заключаем, что

$$\begin{aligned} D_i &= \left| \sum_{k=0}^{i-1} \left(\prod_{r=0}^k E_r^h \right) (E_0^h)^{-1} \xi_{i-k-1}^h \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{i-1} ((s^{\max}(h))^k |\xi_{i-k-1}^h|) \leq \frac{b[\xi](1 - (s^{\max})^i)(h + \delta)}{(1 - s^{\max})\alpha} \leq \frac{b[\xi](h + \delta)}{\lambda^{\min}\delta} \leq \frac{2b[\xi]}{\lambda^{\min}}. \end{aligned}$$

В дальнейшем полагаем в (3.4) $\varepsilon = 1/2$, т.е. $\delta/\alpha \leq 1/2\lambda^{\max}$. Рассмотрим два случая.

Случай А. Пусть $K\sqrt{\alpha} \leq D_i \leq 2b[\xi]/\lambda^{\min}$, где $K = \sqrt{4b[\xi]|v_0^h|/(\lambda^{\min}\lambda^{\max}\vartheta)}$. Тогда

$$\begin{aligned} &\int_0^{\vartheta} |u^h(\tau) - u|^2 d\tau \\ &= \sum_{i=0}^{m_h-1} |v_i^h|^2 \delta \geq \sum_{i=0}^{m_h-1} (C_i^2 + D_i^2 - 2C_i D_i) \delta \\ &\geq |v_0^h|^2 \sum_{i=0}^{m_h-1} (s^{\min}(h))^{2i} \delta + K^2 \alpha \vartheta - \frac{4b[\xi]|v_0^h|}{\lambda^{\min}} \sum_{i=0}^{m_h-1} (s^{\max}(h))^i \delta \\ &\geq \frac{|v_0^h|^2 (1 - (s^{\min})^{2m_h}) \delta}{1 - (s^{\min})^2} + K^2 \alpha \vartheta - \frac{4b[\xi]|v_0^h|(1 - (s^{\min})^{m_h}) \delta}{\lambda^{\min}(1 - s^{\min})} \\ &\geq \frac{3|v_0^h|^2 \alpha}{8\lambda^{\max}} + \alpha \left(K^2 \vartheta - \frac{4b[\xi]|v_0^h|}{\lambda^{\min}\lambda^{\max}} \right) = \frac{3|v_0^h|^2}{8\lambda^{\max}} \alpha(h). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Случай Б. При $D_i < K\sqrt{\alpha}$ для $h \in (0, \bar{h}]$, $\bar{h} = \arg\{\sqrt{\alpha(h)} = 3|v_0^h|/32K\}$ получим

$$\begin{aligned} &\int_0^{\vartheta} |u^h(\tau) - u|^2 d\tau \\ &= \sum_{i=0}^{m_h-1} |v_i^h|^2 \delta \geq \sum_{i=0}^{m_h-1} (C_i^2 - 2C_i D_i) \delta \\ &\geq |v_0^h|^2 \sum_{i=0}^{m_h-1} (s^{\min}(h))^{2i} \delta - 2K|v_0^h|\sqrt{\alpha} \sum_{i=0}^{m_h-1} (s^{\max}(h))^i \delta \\ &\geq \left(\frac{3|v_0^h|^2}{8\lambda^{\max}} - \frac{2K|v_0^h|\sqrt{\alpha}}{\lambda^{\max}} \right) \alpha = \frac{3|v_0^h|^2}{16\lambda^{\max}} \alpha(h). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Объединив оба случая, полагая $d_4 = 3|v_0^h|^2/16\lambda^{\max}$, получаем требуемую оценку (3.1).

СЛЕДСТВИЕ. Если $\delta(h) = O(h)$, $\alpha(h) = O(h^{1/2})$, то (см. (2.13), (3.1)) верхняя и нижняя оценки скорости сходимости алгоритма (1.3)–(1.12) имеют одинаковый порядок $O(h^{1/4})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. С. Мартьянов, “О реконструкции управлений по измерению части координат”, *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2004, № 4, 52–60.
- [2] А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов, “О моделировании управления в динамической системе”, *Изв. АН СССР. Тех. кибернетика*, 1983, № 2, 51–60.
- [3] Yu. S. Osipov, A. V. Kryazhimskii, *Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions*, Gordon and Breach Science Publishers, London, 1995.
- [4] Ю. С. Осипов, А. В. Кряжимский, В. И. Максимов, “Динамические обратные задачи для параболических систем”, *Дифференц. уравнения*, **36**:5 (2000), 579–597.
- [5] А. И. Короткий, И. А. Цепелев, “Верхняя и нижняя оценки точности в задаче динамического определения параметров”, *Труды ИММ УрО РАН*, **4**, Екатеринбург, 1996, 227–238.
- [6] Е. В. Васильева, “Нижние оценки сходимости алгоритмов динамической реконструкции для систем с распределенными параметрами”, *Матем. заметки*, **76**:5 (2004), 675–687.
- [7] В. И. Максимов, *Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем*, УрО РАН, Екатеринбург, 2000.
- [8] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.

А. С. Мартьянов

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург

Поступило

31.05.2006