Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Э. Муминов, О выражении числа собственных значений модели Фридрихса, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 1, 75–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3755>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:33:33

О выражении числа собственных значений модели Фридрихса

М. Э. Муминов

Рассматривается самосопряженный оператор обобщенной модели Фридрихса, существенный спектр которого может содержать лакуны. Получена формула для числа собственных значений, лежащих на произвольном интервале вне существенного спектра этого оператора. Найдено достаточное условие конечности дискретного спектра. Применяя полученную формулу, показано существование бесконечного числа собственных значений на лакуне для одной модели Фридрихса и получена асимптотика для числа собственных значений.

Библиография: 7 названий.

1. Введение и формулировка основных результатов. Как известно, некоторые актуальные задачи, в частности, задачи квантовой механики, статистической механики и гидродинамики сводятся к исследованию спектра оператора модели Фридрихса [1]–[3]. В работе [4] получены оценки и равенства для числа собственных значений самосопряженных, ограниченных снизу оператор-функций, удовлетворяющих некоторым условиям.

В настоящей работе рассматривается самосопряженный оператор модели Фридрихса – оператор умножения на функцию $u(\cdot)$, возмущенный компактным оператором K . При некоторых естественных предположениях получена формула для числа собственных значений, лежащих на произвольном интервале вне существенного спектра рассматриваемого оператора. Также найдено достаточное условие конечности дискретного спектра. Полученная формула дает возможность получить асимптотику распределения дискретного спектра, лежащего на лакуне. С помощью нее для одной модели Фридрихса показано существование бесконечности числа собственных значений на лакуне и получена асимптотика для числа собственных значений.

Рассмотрим оператор обобщенной модели Фридрихса, т.е. самосопряженный оператор, действующий в $L_2(D)$ по формуле

$$\begin{aligned} H &= H_0 - K, \\ (H_0 f)(x) &= u(x)f(x), \end{aligned}$$

где $D = \bigcup_{i=1}^n \overline{D_i}$, D_i – ограниченная область в ν -мерном пространстве $\mathbb{R}^\nu$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\overline{D_i}$ – ее замыкание, $u(\cdot)$ – вещественнозначная кусочно-непрерывная и ограниченная функция на D , K – компактный оператор, действующий в $L_2(D)$.

Отметим, что из теоремы Вейля о существенном спектре (см. [5; § XIII.4]) следует, что непрерывный спектр $\sigma_{\text{cont}}(H)$ оператора H не меняется при компактном

возмущении K и совпадает со спектром невозмущенного оператора H_0 . При этом $\sigma_{\text{cont}}(H)$ состоит из области значений функции u , т.е.

$$\sigma_{\text{cont}}(H) = \sigma(H_0) = \overline{\text{Im } u(x)}.$$

Обозначим через $N_{(a,b)}(H)$ – число собственных значений оператора H (с учетом кратности), лежащих на $(a, b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H)$.

Пусть A – самосопряженный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_A(\lambda)$, $\lambda > \sup \sigma_{\text{ess}}(A)$, – подпространство пространства $\mathcal{H}$, элементы которого удовлетворяют условию $(Af, f) > \lambda(f, f)$, $f \neq 0$.

Положим

$$n(\lambda, A) = \sup_{\mathcal{H}_A(\lambda)} \dim \mathcal{H}_A(\lambda).$$

Число $n(\lambda, A)$ совпадает с числом собственных значений (с учетом кратности) оператора A , лежащих правее от λ .

В дальнейшем считаем, что K положительный оператор и $T(z) = K^{1/2} R_0(z) K^{1/2}$, $z \notin \sigma_{\text{cont}}(H)$, где $R_0(z) = (H_0 - zI)^{-1}$, I – единичный оператор, $K^{1/2}$ – положительный квадратный корень оператора K .

Пользуясь свойством компактных операторов и применяя некоторые методы анализа, получим основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 1. Число $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{cont}}(H)$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда функция $n(1, T(\cdot))$ имеет разрыв в точке $z = z_0$. Причем кратность k собственного значения z_0 определяется по формуле

$$k = \lim_{\xi \rightarrow +0} n(1, T(z_0 + \xi)) - n(1, T(z_0)).$$

В силу монотонности функции $n(1, T(\cdot))$ на интервале $(a, b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{cont}}(H)$ (см. предложение 1) из теоремы 1 вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ 1. Для каждого сегмента $[a, b] \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{cont}}(H)$ верно равенство

$$N_{(a,b)}(H) = n(1, T(b)) - n(1, T(a)).$$

Непосредственно получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $(a, b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{cont}}(H)$ и оператор-функция $T(z)$ при $z \rightarrow b - 0$ сходится равномерно к некоторому оператору $T(b)$. Тогда оператор H на интервале (a, b) может иметь лишь конечное число собственных значений.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Компактность оператора $T(b)$ является достаточным условием для конечности дискретного спектра оператора H на $(a, b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{cont}}(H)$. Например, если H_0 – оператор умножения на x^2 и $K = \sum_{k=1}^n (\varphi_k, \cdot) \varphi_k$, где $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – произвольные ортогональные элементы пространства $L_2[-1, 1]$, то число собственных значений оператора $H = H_0 - K$ всегда конечно в $\mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{cont}}(H) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, хотя соответствующее семейство операторов $T(z)$, $z \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, может быть не сходится равномерно ни к какому оператору при $z \rightarrow 0 - 0$ или $z \rightarrow 1 + 0$.

2. Доказательство основного результата. В этом пункте докажем несколько вспомогательных утверждений, основной результат и его следствия.

ЛЕММА 1. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{cont}}(H)$, где $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда оператор $T(z)$ имеет собственное значение, равное единице, причем кратности z и 1 совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{cont}}(H)$ – собственное значение оператора H и f – соответствующий собственный вектор, т.е. уравнение $Hf = zf$ имеет нетривиальное решение f . Так как $R_0(z)$ ограничен в $L_2(D)$, имеем

$$f = R_0(z)Kf.$$

Отсюда следует, что число z является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда 1 является собственным значением $R_0(z)K$, причем кратности z и 1 совпадают. Так как для ограниченных операторов A и B каждое ненулевое собственное значение оператора AB является собственным значением BA с той же кратностью (см., например, [6]), то собственное значение оператора $R_0(z)K = R_0(z)K^{1/2}K^{1/2}$, равное единице, является собственным значением оператора $T(z) = K^{1/2}R_0(z)K^{1/2}$ с той же кратностью.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для каждого $\lambda > 0$ функция $n(\lambda, T(\cdot))$ является монотонно неубывающей на произвольном интервале $(a, b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{cont}}(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_1 < z_2$, $z_1, z_2 \in (a, b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{cont}}(H)$. Предположим, что $u \in \mathcal{H}_{T(z_1)}(\lambda)$, $\lambda > 0$, т.е. $(T(z_1)u, u) > \lambda(u, u)$.

Так как $(R_0(\cdot)u, u)$ – монотонно неубывающая функция на (a, b) , из положительности оператора K имеем

$$(T(z_2)u, u) = (R_0(z_2)K^{1/2}u, K^{1/2}u) \geq (R_0(z_1)K^{1/2}u, K^{1/2}u) = (T(z_1)u, u) > \lambda(u, u).$$

Следовательно, $n(\lambda, T(z_2)) \geq n(\lambda, T(z_1))$. Отсюда получим утверждение предложения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (см. [4]). Обозначим через $\Lambda_m(\cdot)$, $m = 1, 2, \dots$, положительно-значные функции, определенные на $[a, b] \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{cont}}(H)$, удовлетворяющие условию: $\Lambda_m(z)$ – m -е собственное значение (собственные значения занумерованы сверху, считая их кратности) оператора $T(z)$, $z \in [a, b]$.

Отметим, что оператор-функция $T(\cdot)$ является непрерывной на $[a, b]$ в смысле равномерной операторной топологии и $T(z)$ есть компактный оператор при $z \in [a, b]$. Поэтому имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для каждого натурального числа m функция $\Lambda_m(\cdot)$ является непрерывной на любом сегменте $[a, b] \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{cont}}(H)$.

ЛЕММА 2. Число $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{cont}}(H)$ является регулярной точкой оператора H тогда и только тогда, когда функция $n(1, T(\cdot))$ непрерывна в точке $z = z_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $z = z_0$ – регулярная точка оператора H . Тогда из леммы 1 вытекает, что $\Lambda_m(z_0) \neq 1$, $m = 1, 2, \dots$.

В силу непрерывности функции $\Lambda_m(\cdot)$ существует число $\rho > 0$ такое, что для всех m и $z \in [z_0 - \rho, z_0 + \rho] \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{cont}}(H)$ выполняется неравенство $\Lambda_m(z) \neq 1$. Отсюда получим

$$\text{card}\{m : \Lambda_m(z_0) > 1\} = \text{card}\{m : \Lambda_m(z) > 1, z \in [z_0 - \rho, z_0 + \rho]\},$$

где $\text{card } M$ – мощность множества M . Следовательно, $n(1, T(z_0)) = n(1, T(z_0 + \varepsilon))$, $\varepsilon \in [-\rho, \rho]$, т.е. функция $n(1, T(\cdot))$ непрерывна в точке $z = z_0$.

Достаточность. Пусть функция $n(1, T(\cdot))$ непрерывна в точке z_0 . Следовательно, для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$n(1, T(z_0 - \varepsilon)) = n(1, T(z_0)) = n(1, T(z_0 + \varepsilon)). \quad (2.1)$$

Учитывая монотонность квадратичной формы $(T(z) \cdot, \cdot)$ при $z \in (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$ и рассуждая как при доказательстве теоремы 2 работы [4], можно показать, что функции $\Lambda_1(\cdot), \Lambda_2(\cdot) \dots$ монотонно возрастают на $(z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$. Отсюда $\Lambda_i(z_0) < \Lambda_i(z_0 + \varepsilon)$, $i = 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$\Lambda_i(z_0) < \Lambda_i(z_0 + \varepsilon) \leq 1 \quad \forall i \in \{i : \Lambda_i(z_0 + \varepsilon) \leq 1\}.$$

Согласно (2.1) выполняется равенство

$$\{i : \Lambda_i(z_0 + \varepsilon) > 1\} = \{i : \Lambda_i(z_0 - \varepsilon) > 1\}.$$

Поэтому

$$\Lambda_i(z_0) > \Lambda_i(z_0 - \varepsilon) > 1 \quad \forall i \in \{i : \Lambda_i(z_0 + \varepsilon) > 1\}.$$

Таким образом, для каждого натурального i получим неравенство $\Lambda_i(z_0) \neq 1$, т.е. точка 1 не является собственным значением оператора $T(z_0)$. Согласно лемме 1 точка z_0 является регулярной точкой оператора H .

Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По лемме 2 число $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{cont}}(H)$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда функция $n(1, T(\cdot))$ имеет разрыв в точке $z = z_0$.

Пусть $\Lambda_{n_i}(z_0) = 1$, $i = 1, \dots, k$. Поскольку для некоторого $\delta > 0$ функции $\Lambda_{n_1}(\cdot), \dots, \Lambda_{n_k}(\cdot)$ монотонно возрастают на $(z_0 - \delta, z_0 + \delta)$, получим

$$\begin{aligned} \Lambda_{n_i}(z) < 1, & \quad z \in (z_0 - \delta, z_0), \quad i \in \{1, \dots, k\}, \\ \Lambda_{n_i}(z) > 1, & \quad z \in (z_0, z_0 + \delta), \quad i \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Следовательно, $k = n(1, T(z_0 + \xi)) - n(1, T(z_0))$ при $\xi \in (0, \delta)$.

3. Приложение к одной модели Фридрикса. Рассмотрим случай, когда оператор

$$H = H_0 - K \quad (3.1)$$

действует в $L_2[0, 2]$, где H_0 – оператор умножения на функцию

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in [0, 1], \\ -x^2 & \text{при } x \in (1, 2], \end{cases}$$

K – интегральный оператор с ядром

$$K(x, y) = \frac{\mu xy}{x^2 + y^2},$$

где μ – положительное число.

При этом $\sigma_{\text{cont}}(H) = \overline{\text{Im } u(x)} = [-4, -1] \cup [0, 1]$. Другими словами, существенный спектр оператора H имеет лауну $(-1, 0)$.

ТЕОРЕМА 2. а) Пусть $\mu > 2/\pi$. Тогда оператор H , определенный по формуле (3.1), имеет бесконечное число собственных значений, лежащих на $(-1, 0)$, и для числа $N_{(-1,z)}(H)$, $z < 0$, имеет место

$$\lim_{z \rightarrow -0} \frac{N_{(-1,z)}(H)}{-\ln(-z)} = \frac{\mathcal{U}_0}{\pi^2},$$

где $\mathcal{U}_0$ – единственное положительное решение уравнения

$$1 = \frac{\pi}{2} \frac{\mu}{\operatorname{ch} x}.$$

б) Пусть $\mu < 2/\pi$. Тогда оператор H на интервале $(-1, 0)$ может иметь лишь конечное число собственных значений.

Для доказательства теоремы 2 приведем сначала несколько вспомогательных утверждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Оператор K является положительным оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K_n – интегральный оператор с ядром, определенным по формуле $K_n(x, y) = \chi_{[1/n, 2]}(x)K(x, y)\chi_{[1/n, 2]}(y)$, где $\chi_M(\cdot)$ – характеристическая функция множества M . Учитывая равенство

$$\frac{\pi}{2x^2y^2(x^2 + y^2)} = \int_0^\infty \frac{ds}{(x^4 + s^2)(y^4 + s^2)},$$

квадратичную форму $(K_n f, f)$, $f \in L_2(0, 2)$, представим в виде

$$(K_n f, f) = \frac{2\mu}{\pi} \int_0^\infty \int_{1/n}^2 \int_{1/n}^2 \frac{x^3 y^3 f(y) \overline{f(x)} dy dx}{(x^4 + s^2)(y^4 + s^2)} ds = \frac{2\mu}{\pi} \int_0^\infty |g(s)|^2 ds,$$

$$g(s) = \int_{1/n}^2 \frac{x^3 f(x) dx}{(x^4 + s^2)}.$$

Следовательно, $K_n \geq 0$. Отсюда и из равномерной сходимости K_n к оператору K при $n \rightarrow \infty$ получим доказательство предложения 3.

Пусть $T(z; x, y)$ – ядро интегрального оператора $T(z) = K^{1/2}R_0(z)K^{1/2}$, где $z \notin \sigma_{\text{cont}}(H)$, и $T_1(z)$ – интегральный оператор, действующий в $L_2[0, 2]$, с ядром $\chi_{[0,1]}(x)T(z; x, y)\chi_{[0,1]}(y)$.

Легко доказывается следующая

ЛЕММА 3. Оператор-функция $T(\cdot) - T_1(\cdot)$ является непрерывной на $(-1, 0]$ в смысле равномерной операторной топологии и $T(z) - T_1(z)$ при каждом $z \in (-1, 0)$ является компактным оператором.

Пусть $\tilde{T}_1(z)$, $z < 0$ – оператор, определенный в $L_2[0, 1]$ по формуле

$$\tilde{T}_1(z) = \tilde{K}^{1/2} \tilde{R}_0(z) \tilde{K}^{1/2},$$

где операторы $\tilde{R}_0(z)$ и $\tilde{K}$ действуют в $L_2[0, 1]$ соответственно по формулам

$$(\tilde{R}_0(z)f)(x) = \frac{f(x)}{x - z}, \quad (\tilde{K}f)(x) = \mu \int_0^1 \frac{xy}{x^2 + y^2} f(y) dy.$$

При этом $\sigma(T_1(z)) = \sigma(\tilde{T}_1(z))$.

Отметим, что каждое ненулевое собственное значение оператора $\tilde{T}_1(z)$, $z < 0$, является собственным значением и оператора $T_2(z) = [\tilde{R}_0(z)]^{1/2} \tilde{K} [\tilde{R}_0(z)]^{1/2}$ с той же кратностью (см. доказательство леммы 1).

Обозначим через $T_3(z)$, $z < 0$, интегральный оператор, действующий в $L_2[0, 1]$, с ядром $\chi_{\Omega(z)}(x)T_2(z; x, y)\chi_{\Omega(z)}(y)$, где $\Omega(z) = (|z|, 1]$, $T_2(z; x, y)$ – ядро оператора $T_2(z)$.

ЛЕММА 4. *Оператор-функция $T_3(\cdot) - T_2(\cdot)$ является непрерывной на $(-1, 0]$ в смысле равномерной операторной топологии и $T_3(z) - T_2(z)$ при каждом $z \in (-1, 0)$ является компактным оператором.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При каждом $z \in (-1, 0)$ оператор $T_3(z) - T_2(z)$ является интегральным оператором. Операторы $T_3(\cdot)$ и $T_2(\cdot)$ являются непрерывными на $(-1, 0)$ в смысле равномерной операторной топологии. Отсюда следует непрерывность $T_3(\cdot) - T_2(\cdot)$ на $(-1, 0)$ в смысле равномерной операторной топологии. Покажем, что ядро $T_{32}(z; x, y)$ оператора $T_3(z) - T_2(z)$ квадратично-интегрируемо на $(0, 1) \times (0, 1)$ при $z \in (-1, 0]$. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 |T_{32}(z; x, y)|^2 dx dy &= \int_0^{-z} \int_0^{-z} \frac{\mu^2 x^2 y^2 dx dy}{(x-z)(x^2+y^2)^2(y-z)} \\ &\quad + \int_{-z}^1 \int_0^{-z} \frac{2\mu^2 x^2 y^2 dx dy}{(x-z)(x^2+y^2)^2(y-z)} \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mu^2 x^2 y^2 dx dy}{(x+1)(x^2+y^2)^2(y+1)} \\ &\quad + \int_{-z}^1 dx \int_0^1 \frac{2\mu^2 z^2 x^2 y^2 dy}{(x-z)(x^2+z^2 y^2)^2(y+1)}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что

$$\begin{aligned} \int_{-z}^1 dx \int_0^1 \frac{x}{x-z} \frac{xz^2 y^2}{(x^2+z^2 y^2)^2} \frac{dy}{y+1} &\leq \int_{-z}^1 dx \int_0^1 \frac{xz^2 y^2}{(x^2+z^2 y^2)^2} dy \\ &= \int_0^1 \frac{z^2 y^2}{2} \left(\frac{1}{z^2+z^2 y^2} - \frac{1}{1+z^2 y^2} \right) dy, \end{aligned}$$

получим

$$\int_0^1 \int_0^1 |T_{32}(z; x, y)|^2 dx dy < \infty$$

для всех $z \in (-1, 0]$. Лемма 4 доказана.

Пусть $T_{\Omega(z)}$, $z \in (-1, 0)$, – оператор, определенный в $L_2(\Omega(z))$ по формуле

$$(T_{\Omega(z)}\varphi)(x) = \mu \int_{\Omega(z)} \frac{xy\varphi(y) dy}{(x-z)^{1/2}(x^2+y^2)(y-z)^{1/2}}.$$

По определению $T_{\Omega(z)}$ имеет место равенство

$$\sigma(T_{\Omega(z)}) = \sigma(T_3(z)), \quad z \in (-1, 0).$$

Отметим, что оператор $T_{\Omega(z)}$, $z \in (-1, 0)$, унитарно эквивалентен оператору $T_{R(z)}$, $R(z) = -\ln |z|$, где $T_{R(z)}$ – интегральный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(-\pi, \pi)$, порожденный ядром

$$T_{R(z)}(x, y) = \frac{\mu R(z)}{2\pi} \frac{1}{2 \operatorname{ch}(R(z)/2\pi)(x - y)} \frac{e^{(R(z)/4\pi)(x+\pi)}}{(e^{(R(z)/2\pi)(x+\pi)} + 1)^{1/2}} \frac{e^{(R(z)/4\pi)(y+\pi)}}{(e^{(R(z)/2\pi)(y+\pi)} + 1)^{1/2}}.$$

Эквивалентность осуществляется с помощью унитарного оператора

$$U: L_2(\Omega(z)) \rightarrow L_2(-\pi, \pi),$$

$$(Uf)(x) = \sqrt{\frac{R(z)}{2\pi}} (|z|e^{(R(z)/2\pi)(x+\pi)})^{1/2} f(|z|e^{(R(z)/2\pi)(x+\pi)}),$$

$$U^{-1}: L_2(-\pi, \pi) \rightarrow L_2(\Omega(z)),$$

$$(U^{-1}f)(p) = \sqrt{\frac{2\pi}{R(z)}} |x|^{-1/2} f\left(\frac{2\pi}{R(z)} \ln \frac{|x|}{|z|} - \pi\right).$$

Пусть $S_{R(z)}$ – интегральный оператор, действующий в $L_2[-\pi, \pi]$, порожденный ядром

$$S_{R(z)}(x - y) = \frac{\mu R(z)}{2\pi} \frac{1}{2 \operatorname{ch}(R(z)/2\pi)(x - y)}.$$

Ясно, что оператор-функция $T_{R(\cdot)} - S_{R(\cdot)}$ является непрерывной на $(-1, 0]$ в смысле равномерной операторной топологии и $T_{R(z)} - S_{R(z)}$ при каждом $z \in (-1, 0)$ является компактным оператором. Так как $S_{R(z)}$ является оператором типа свертки, можно вычислить все его собственные значения. По теореме Гильберта–Шмидта оператор $S_{R(z)}$ представляется в виде

$$S_{R(z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(z) (\varphi_n, \cdot) \varphi_n,$$

где $\varphi_n(x) = \sqrt{1/2\pi} e^{inx}$ – собственная функция, соответствующая собственному значению

$$u_n(z) = \frac{\mu R(z)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{int} dt}{2 \operatorname{ch}((R(z)/2\pi)t)}.$$

Пользуясь формулой

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos at dt}{\operatorname{ch} t} = \frac{\pi}{2 \operatorname{ch}(a\pi/2)},$$

представим $u_n(z)$, $z \in (-1, 0)$, в виде

$$u_n(z) = \frac{\mu R(z)}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos nt dt}{\operatorname{ch}((R(z)/2\pi)t)} = \frac{\mu\pi}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}(n\pi^2/R(z))} - \frac{\mu}{2\pi} \int_{R(z)/2}^{\infty} \frac{\cos(2nt/R(z)) dt}{\operatorname{ch}(t/2\pi)}.$$

Поэтому

$$\lim_{z \rightarrow -0} \|S(z) - S_{R(z)}\| = 0,$$

где $S(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k(z) (\varphi_k, \cdot) \varphi_k$, $\lambda_k(z) = (\mu\pi/2) 1/(\operatorname{ch}(k\pi^2/R(z)))$.

Заметим, что согласно равенству $\lambda_n(z) = \lambda_{-n}(z)$ при $n \neq 0$ число $\lambda_n(z_n) = 1$ является двукратным собственным значением оператора $S(z)$.

В работе [5], пользуясь неравенством Вейля и свойствами непрерывной функции, доказана

ЛЕММА 5. Пусть $T(z) = T_0(z) - T_1(z)$, где оператор $T_0(z)$ ($T_1(z)$), $z < 0$ ($z \leq 0$), компактный и непрерывный по z при $z < 0$ ($z \leq 0$). Предположим, что для некоторого f , $f(z) \rightarrow 0$, $z \rightarrow -0$, существует предел

$$\lim_{z \rightarrow -0} f(z)n(\lambda, T_0(z)) = l(\lambda),$$

где $l(\lambda)$ непрерывна при $\lambda > 0$. Тогда

$$\lim_{z \rightarrow -0} f(z)n(\lambda, T(z)) = l(\lambda).$$

Так как уравнение

$$1 = \frac{\mu\pi}{2} \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

имеет единственное положительное решение $x = \mathcal{U}_0$ при $\mu > 2/\pi$, для каждого натурального числа n уравнение

$$\lambda_n(z) = \frac{\mu\pi}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}(k\pi^2/R(z))} = 1$$

имеет единственное решение $z_n = -e^{-(2n/\mathcal{U}_0)}$ при $\mu > 2/\pi$. Отсюда и из двукратности каждого собственного значения $\lambda_n(z_n) = 1$, $n \neq 0$, оператора $S(z)$ имеем

$$n(1, S(z_k)) = 2k - 1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n(1, S(z_k))}{-\ln(-z_k)} = \mathcal{U}_0.$$

Из непрерывности и монотонности $\lambda_k(\cdot)$ следует, что существует

$$\lim_{z \rightarrow -0} \frac{n(\lambda, S(z))}{-\ln(-z)} = l(\lambda), \quad \lambda > 0,$$

и функция $l(\cdot)$ является непрерывной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. а) Из следствия 1 следует, что для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется равенство

$$N_{(-1, z)}(H) = n(1, T(z)) - n(1, T(-1 + \varepsilon)), \quad z \in (-1 + \varepsilon, 0). \quad (3.2)$$

В силу лемм 5 и 3, 4, учитывая (3.2), получим

$$\lim_{z \rightarrow -0} \frac{N_{(-1, z)}(H)}{-\ln(z)} = \lim_{z \rightarrow -0} \frac{n(1, T(z))}{-\ln(z)} = \lim_{z \rightarrow -0} \frac{n(1, S(z))}{-\ln(-z)} = \mathcal{U}_0.$$

б) Пусть $\mu < 2/\pi$, $\eta_0 = \mu\pi/2$.

Из неравенства Вейля [7] для компактных операторов V_1, V_2

$$n(a_1 + a_2, V_1 + V_2) \leq n(a_1, V_1) + n(a_2, V_2)$$

имеем следующие неравенства:

$$n(1, T(z)) \leq n(1 - \varepsilon, T_1(z)) + n(\varepsilon, T(z) - T_1(z)), \quad (3.3)$$

$$n(1 - \varepsilon, T_1(z)) = n(1, T_2(z)) \leq n(1 - 2\varepsilon, T_3(z)) + n(\varepsilon, T_2(z) - T_3(z)), \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} n(1 - 2\varepsilon, T_3(z)) &= n(1 - 2\varepsilon, T_{\Omega(z)}) = n(1 - 2\varepsilon, T_R) \\ &\leq n(1 - 3\varepsilon, S_R(z)) + n(\varepsilon, T_R - S_R), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$n(1 - 3\varepsilon, S_R) \leq n(1 - 4\varepsilon, S(z)) + n(\varepsilon, S_R - S(z)), \quad (3.6)$$

где $\varepsilon = (1 - \eta_0)/4$. Из $\lambda_k(z) \leq 1$ при $z \in (-1, 0)$ вытекает

$$n(1 - 4\varepsilon, S(z)) = n(\eta_0, S(z)) = 0.$$

Поскольку операторы $T(z) - T_1(z)$, $T_2(z) - T_3(z)$, $T_R - S_R$, $S_R - S(z)$ являются компактными при $z \in (-1, 0]$, из (3.3)–(3.6) получим неравенство

$$n(1, T(z)) < \infty.$$

Следовательно, из следствия 1 вытекает утверждение b) теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждения теоремы 2 можно перенести для случая, когда ядро $K(\cdot, \cdot)$ – непрерывная функция в $(0, 2) \times (0, 2)$ с условием

$$K(x, y) - \frac{\mu xy}{x^2 + y^2} = o(x^\varepsilon) + o(y^\varepsilon) \quad \text{при } x^2 + y^2 \rightarrow 0 \quad \text{для некоторого } \varepsilon \in (0, 1).$$

Автор выражает глубокую благодарность Р. А. Минлосу и рецензенту за полезные советы и замечания по данной работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Д. Фаддеев, “О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра”, *Краевые задачи математической физики*, 2, Тр. МИАН, **73**, Наука, М., 1964, 292–313.
- [2] Р. А. Минлос, Я. Г. Синай, “Исследование спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа”, *ТМФ*, **2:2** (1970), 230–243.
- [3] Е. М. Дынкин, С. Н. Набоко, С. И. Яковлев, “Граница конечности сингулярного спектра в самосопряженной модели Фридрихса”, *Алгебра и анализ*, **3:2** (1991), 77–90.
- [4] А. А. Владимиров, “Оценки числа собственных значений самосопряженных оператор-функций”, *Матем. заметки*, **74:6** (2003), 839–848.
- [5] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: Анализ операторов, Мир, М., 1982.
- [6] П. Халмош, *Гильбертово пространство в задачах*, Мир, М., 1970.
- [7] A. V. Sobolev, “The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics”, *Comm. Math. Phys.*, **156:1** (1993), 101–126.

М. Э. Муминов

Самаркандский госуниверситет

E-mail: mmuminov@mail.ru

Поступило

11.01.2006

Исправленный вариант

12.02.2007