Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Попов, А. П. Солодов, Оценки снизу положительных и отрицательных частей мер и расположение особенностей их преобразований Лапласа, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 1, 84–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3756>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 16:22:01

Оценки снизу положительных и отрицательных частей мер и расположение особенностей их преобразований Лапласа

А. Ю. Попов, А. П. Солодов

Для действительнзначной меры с вариацией $V(x)$, допускающей оценку $V(x) \leq c_0 \exp(Cx)$, и преобразованием Лапласа, голоморфным в круге $\{|s-C| \leq C\}$ и имеющем хотя бы один полюс порядка m , получены оценки снизу для положительной и отрицательной части меры $V_{\pm}(x) > cx^m$, $x > x_0$. Установлены оценки снизу для $V_{\pm}(x)$ на “коротких” отрезках. Рассматриваются приложения полученных результатов в теории чисел.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Публикация посвящена изучению связи роста положительных и отрицательных частей действительнзначных мер на $\mathbb{R}_+$ и расположения особенностей в комплексной плоскости их преобразований Лапласа. Полученные оценки находят применение в аналитической теории чисел. Предполагается, что на $\mathbb{R}_+$ задана действительнзначная, вообще говоря не монотонная функция μ , имеющая на каждом отрезке $[0, x]$, $x > 0$, ограниченную вариацию $V(x)$, допускающую оценку

$$V(x) \leq c_0 \exp(Cx) \quad \forall x > 0, \quad (1)$$

с некоторыми положительными постоянными c_0 и C . Положим

$$V_+(x) = \frac{V(x) + \mu(x)}{2}, \quad V_-(x) = \frac{V(x) - \mu(x)}{2} \quad (2)$$

(для удобства считаем $\mu(0) = 0$). Известно [1; гл. 8, § 3], что V_+ и V_- являются неубывающими функциями и имеет место разложение функции μ

$$\mu(x) = V_+(x) - V_-(x) \quad (3)$$

в виде разности двух неубывающих функций. Это разложение не является единственным; возможны другие разложения: $\mu(x) = 2V_+(x) - V(x)$, $\mu(x) = V(x) -$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00326, грант № 05-01-00192) и программы “Ведущие научные школы РФ” (грант № НШ-1657.2003.1).

$2V_-(x)$. Но мы отдадим предпочтение разложению (3), поскольку оно выглядит более естественным для абсолютно непрерывных мер. В этом случае

$$V_+(x) = \int_0^x (\mu'(t))^+ dt, \quad V_-(x) = \int_0^x (\mu'(t))^- dt, \quad (4)$$

где, как обычно, $A^+ = \max(A, 0)$, $A^- = -\min(A, 0)$, $A = A^+ - A^-$, $A \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим преобразование Лапласа меры $d\mu$:

$$F(s) = \int_0^\infty \exp(-st) d\mu(t). \quad (5)$$

Ввиду (1) интеграл (5) равномерно сходится в полуплоскостях $\operatorname{Re} s > C + \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0$) и, следовательно, представляет собой функцию, аналитическую в области $\operatorname{Re} s > C$. Через G_F обозначим в некотором смысле максимальную односвязную компоненту области голоморфности функции F , содержащую полуплоскость $\operatorname{Re} s > C$, называемую в литературе (см., например, [2; гл. 2, § 2]) звездой голоморфизма F и определяемую следующим образом. Для каждого $t \in \mathbb{R}$ через $p(t)$ обозначим точную нижнюю грань таких σ , что функция F допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность отрезка $[\sigma + it, C + it]$. Если таких σ не существует, то полагаем $p(t) = C$, а в случае аналитической продолжимости $F(s)$ в какую-либо область, содержащую всю прямую $\operatorname{Im} s = t$, имеем $p(t) = -\infty$. Звезда голоморфизма G_F задается равенством $G_F = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > p(\operatorname{Im} s)\}$, в нее $F(s)$ допускает однозначное аналитическое продолжение и каждая граничная точка G_F является для $F(s)$ особой.

Цель работы – получить, вообще говоря, неумлучшаемые оценки снизу вариаций компонент разложения (3) меры $d\mu$ в случае, когда среди особенностей функции F имеются полюсы.

2. Пример меры, преобразование Лапласа которой имеет в $\mathbb{C}$ конечное число полюсов, лежащих на мнимой оси, а вариация меры экспоненциально растет на некоторой последовательности точек. Если мера $d\mu$ положительна, а функция $F(s)$ имеет в точке $s = 0$ степенную особенность $F(s) \sim As^{-\alpha}$ ($s \rightarrow +0$), $\alpha > 0$, $A > 0$, то согласно тауберовой теореме Фрейда [3], [4; гл. 1, § 2] имеем $V(x) \sim Ax^\alpha / \Gamma(1 + \alpha)$. Этот результат показывает, что степенная особенность в точке $s = 0$ преобразования Лапласа положительной меры определяет порядок роста вариации этой меры, а другие особенности $F(s)$ (даже если они есть), существенного вклада в асимптотику $V(x)$ не вносят.

Возникает естественный вопрос. Остается ли справедливым заключение цитированной теоремы Фрейда (хотя бы при целых α и в более слабом виде $V(x) \asymp x^m$ при $x \rightarrow +\infty$), если снять условие положительности меры $d\mu$? Ответ отрицателен. Для знакопеременных мер аналоги подобного утверждения отсутствуют. Каково бы ни было конечное множество точек E на мнимой оси, симметричное относительно $\mathbb{R}$, существует действительная мера, удовлетворяющая условию (1), преобразование Лапласа которой имеет полюсы в E , допускает аналитическое продолжение в $\mathbb{C} \setminus E$, а вариация этой меры на некоторой последовательности точек, стремящихся к $+\infty$, имеет экспоненциальный рост.

ТЕОРЕМА 1. Для любого заданного конечного множества пар чисел $\{(y_k, m_k)\}_{k=0}^N$, $N \in \mathbb{N}_0$, $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_N$, $m_k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq N$, $m_0 \in \mathbb{N}_0$, а также для любого $C > 0$ найдется действительнoзначная мера $d\mu$ на $[0, \infty)$, удовлетворяющая условию (1) такая, что для ее вариации $V(x)$ справедливы предельные соотношения

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{\lim} V(x) e^{-Cx} > 0, \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) x^{-M} < +\infty, \quad \text{где } M = \max_{0 \leq k \leq N} m_k, \quad (7)$$

а преобразование Лапласа (5) меры $d\mu$ является мероморфной функцией в $\mathbb{C}$ и имеет полюсы в точках $\pm i y_k$ порядков m_k для всех k от 0 до N и не имеет никаких других особенностей. (Если $m_0 = 0$, то считается, что в точке 0 функция $F(s)$ аналитична.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мету $d\mu$ получим в виде суммы мер $d\mu_0$, $d\mu_1$ и $d\mu_2$. Начнем с построения меры $d\mu_1$. Имеем

$$\int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-st} dt = \frac{(m-1)!}{s^m} \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Следовательно, при любых $\eta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ справедливо тождество, получающееся из (8) переходом от s к $s - i\eta$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{i\eta t} e^{-st} dt = \frac{1}{(s - i\eta)^m}, \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Положим $\mu_1(x) \equiv 0$, если $N = 0$,

$$\mu_1(x) = \int_0^x \sum_{k=1}^N \frac{t^{m_k-1}}{(m_k-1)!} \cos(y_k t) dt, \quad N \geq 1. \quad (10)$$

Из (9) и (10) видно, что преобразование Лапласа $F_1(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} d\mu_1(t)$ имеет полюсы порядка m_k в точках $\pm i y_k$, $1 \leq k \leq N$, и не имеет в $\mathbb{C}$ никаких других особенностей. Обозначим также

$$\mu_0(x) = \frac{x^{m_0}}{m_0!}, \quad m_0 \in \mathbb{N}_0, \quad F_0(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} d\mu_0(t) = \begin{cases} 0, & m_0 = 0, \\ s^{-m_0}, & m_0 \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (11)$$

Построим меру $d\mu_2$. Зададим последовательность $\{\lambda_n\}$ рекуррентными соотношениями

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{n+1} = \exp(\lambda_n^2), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_n = 1/\lambda_{n+1}. \quad (12)$$

Возьмем произвольное положительное число C и положим

$$F_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{C\lambda_n} (e^{-\lambda_n s} - e^{-(\lambda_n + \varepsilon_n)s}). \quad (13)$$

Ряд экспонент (13) является преобразованием Лапласа дискретной меры $d\mu_2$, порожденной функцией, имеющей скачки в точках λ_n величины $e^{C\lambda_n}$ и в точках $\lambda_n + \varepsilon_n$

величины $-e^{C\lambda_n}$. Вариация меры $d\mu_2$ на отрезке $[0, x]$ (обозначим ее $V_2(x)$) равна сумме абсолютных величин скачков $\mu_2(t)$ в точках, лежащих на отрезке $[0, x]$, а именно

$$V_2(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} e^{C\lambda_n} + \sum_{\lambda_n + \varepsilon_n \leq x} e^{C\lambda_n} \leq 2 \sum_{\lambda_n \leq x} e^{C\lambda_n}. \quad (14)$$

Через $n(x)$ обозначим наибольшее из чисел n таких, что $\lambda_n \leq x$. Если $n(x) = 1$, то $V_2(x) \leq 2e^{C\lambda_1}$. Если $n(x) > 1$, то согласно (12) имеем $\lambda_{n(x)-1} = \sqrt{\ln \lambda_{n(x)}} \leq \sqrt{\ln x}$. А так как $k \leq \lambda_k$ при любом $k \geq 1$, откуда получаем неравенство

$$\sum_{n=1}^{n(x)-1} e^{C\lambda_n} \leq (n(x) - 1) \exp(C\sqrt{\ln \lambda_{n(x)}}) \leq \sqrt{\ln x} \exp(C\sqrt{\ln x}) = o(x) \quad (15)$$

при $x \rightarrow +\infty$. Из (14) и (15) находим

$$V_2(x) \leq o(x) + 2e^{C\lambda_n} = O(e^{C\lambda_n}), \quad (16)$$

т.е. условие (1) для меры $d\mu_2$ выполнено. Из доказанных неравенств вытекают также оценки

$$V_2(\lambda_n - 1) = o(\lambda_n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (17)$$

$$V_2(\lambda_n) \geq e^{C\lambda_n}. \quad (18)$$

Действительно, вариация меры $d\mu_2$ на отрезке $[0, \lambda_n - 1]$ такая же, как и на отрезке $[0, \lambda_{n-1} + \varepsilon_{n-1}]$, т.е.

$$O(e^{C(\lambda_{n-1} + \varepsilon_{n-1})}) = O(e^{C\lambda_{n-1}}) = O(\exp(C\sqrt{\ln \lambda_n})) = o(\lambda_n)$$

при $n \rightarrow \infty$ (см. (16)), а вариация меры $d\mu_2$ на отрезке $[0, \lambda_n]$ не меньше ее скачка в точке λ_n .

Теперь докажем, что функция $F_2(s)$ является целой. Возьмем произвольный компакт $K \subset \mathbb{C}$ и обозначим $a = \sup\{|s| \mid s \in K\}$. Расширим K (если потребуется) так, чтобы выполнялось неравенство $a > C$. Тогда при всех $s \in K$ модуль общего члена ряда (13), равный

$$e^{C\lambda_n} |e^{-s\lambda_n} - e^{-s(\lambda_n + \varepsilon_n)}| = \exp(\lambda_n(C - \operatorname{Re} s)) |1 - e^{-s\varepsilon_n}|,$$

не превосходит

$$\begin{aligned} \exp(2\lambda_n|a|) |1 - e^{-s\varepsilon_n}| &\leq |a|\varepsilon_n \exp(|a|\varepsilon_n + 2\lambda_n|a|) \\ &= |a| \exp(|a|\varepsilon_n + 2\lambda_n|a| - \lambda_n^2) = O(\exp(2\lambda_n|a| - \lambda_n^2)). \end{aligned}$$

Ввиду сходимости ряда из мажорант $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(b\lambda_n - \lambda_n^2)$ (при любом $b > 0$) ряд (13) на любом компакте в $\mathbb{C}$ равномерно сходится, а это влечет за собой аналитичность его суммы $F_2(s)$ во всей комплексной плоскости.

Покажем, что функция $\mu(t) = \mu_0(t) + \mu_1(t) + \mu_2(t)$ искомая. Рассмотрим преобразование Лапласа меры $d\mu$

$$F(s) = F_0(s) + F_1(s) + F_2(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} d\mu(t).$$

Поскольку $F_2(s)$ – целая функция, то $F(s)$ имеет в $\mathbb{C}$ те же особенности, что и сумма $F_0(s) + F_1(s)$, т.е. полюс в точке 0 порядка m_0 (если $m_0 = 0$, то голоморфна в точке 0) и полюсы в точках $\pm i y_k$, $1 \leq k \leq N$, порядков m_k . Ввиду того, что $F_0(s) + F_1(s)$ – рациональная функция, функция $F(s)$ является мероморфной. Осталось доказать соотношения (6), (7), (1). Из (10) и (11) сразу же следует оценка

$$V_0(x) + V_1(x) = O(x^M) \quad (19)$$

(напомним, что $M = \max\{m_k \mid 0 \leq k \leq N\}$). Из (19) и (16) вытекает неравенство (1), а из (19) и (17) находим $V(\lambda_n) \geq \exp(C\lambda_n) + O(\lambda_n^M)$, что влечет за собой (6). Из (19) и (17) сразу следует (7). Теорема 1 доказана.

3. Основные результаты. Теорема 1 показывает, что если о действительной мере $d\mu$ не известно ничего, кроме информации о полюсах ее преобразования Лапласа, то получение одинаковых по порядку двусторонних оценок вариации меры $d\mu$ невозможно. Тем не менее, оценки снизу $V(x)$, такие же по порядку, как и в теореме Фрейда, сохраняются.

ТЕОРЕМА А ([5]). *Если на границе звезды G_F имеется хотя бы один полюс функции F с неотрицательной действительной частью, то существуют такие положительные постоянные x_1 и c_1 , что при всех $x > x_1$ справедливо неравенство*

$$V(x) > c_1 x^m, \quad (20)$$

где m – порядок полюса.

В этой работе при дополнительных ограничениях на $F(s)$ выводятся оценки снизу $V_+(x)$ и $V_-(x)$, такие же, как и (20).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В формулировке теоремы А в [5] предполагалось, что действительная часть полюса равна нулю. Но общий случай выводится из этого частного. Докажем сделанное утверждение. Обозначим $s_0 + it_0$ полюс в теореме А. Выведем из ее справедливости при $s_0 = 0$ оценку (20) в случае $s_0 > 0$. Рассмотрим функцию

$$F_0(s) = F(s + s_0) = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{-s_0 t} d\mu(t) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-st} d\mu_0(t),$$

где

$$\mu_0(x) = \int_0^x e^{-s_0 t} d\mu(t), \quad \mu(x) = \int_0^x e^{s_0 t} d\mu_0(t). \quad (21)$$

Функция $F_0(s)$ имеет на границе своей звезды голоморфности полюс порядка m с нулевой вещественной частью. Поэтому

$$\text{Var } \mu_0(t)|_0^x \geq c_1 x^m. \quad (22)$$

Из (21) видно, что вариация функции μ на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ не меньше $e^{as_0} \text{Var } \mu_0(t)|_a^b$. Отсюда и из (22) получаем требуемую оценку снизу для $V(x)$.

ТЕОРЕМА 2. Если на границе звезды G_F имеется хотя бы один полюс функции F с неотрицательной действительной частью, а круг $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - C| \leq C\}$ лежит внутри G_F , то существуют такие положительные постоянные x_2 и c_2 , что при всех $x > x_2$ справедливы неравенства

$$V_+(x) > c_2 x^m, \quad V_-(x) > c_2 x^m, \quad (23)$$

где m – порядок полюса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция F аналитична в замкнутом круге $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - C| \leq C\}$, можно выбрать число $R > C$ так, чтобы круг $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - R| \leq R\}$ также лежал внутри звезды G_F . Положим $\delta = (1 - C/R)/2$. Очевидно, что для всех $\tau > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{p \leq xR\delta^2} \frac{\tau^p}{p!} < \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\tau^p}{p!} = e^{\tau}.$$

Следовательно,

$$V_{\pm}(x) = \int_0^{xR} dV_{\pm}\left(\frac{\tau}{R}\right) > \int_0^{xR} \left(\sum_{p \leq xR\delta^2} \frac{\tau^p}{p!} \right) e^{-\tau} dV_{\pm}\left(\frac{\tau}{R}\right). \quad (24)$$

Исходя из (2), оценим интеграл в правой части (24) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_0^{xR} \left(\sum_{p \leq xR\delta^2} \frac{\tau^p}{p!} \right) e^{-\tau} dV_{\pm}\left(\frac{\tau}{R}\right) \\ &= \sum_{p \leq xR\delta^2} \int_0^{+\infty} \frac{\tau^p}{p!} e^{-\tau} dV_{\pm}\left(\frac{\tau}{R}\right) - \int_{xR}^{+\infty} \left(\sum_{p \leq xR\delta^2} \frac{\tau^p}{p!} \right) e^{-\tau} dV_{\pm}\left(\frac{\tau}{R}\right) \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{p \leq xR\delta^2} \int_0^{+\infty} \frac{\tau^p}{p!} e^{-\tau} dV\left(\frac{\tau}{R}\right) - \frac{1}{2} \sum_{p \leq xR\delta^2} \left| \int_0^{+\infty} \frac{\tau^p}{p!} e^{-\tau} d\mu\left(\frac{\tau}{R}\right) \right| \\ &\quad - \int_{xR}^{+\infty} \left(\sum_{p \leq xR\delta^2} \frac{\tau^p}{p!} \right) e^{-\tau} dV\left(\frac{\tau}{R}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Покажем, что второе и третье слагаемые правой части (25) ограничены и, стало быть, достаточно вывести требуемую оценку снизу первого слагаемого. Ограниченность второго слагаемого сразу следует из аналитичности $F(s)$ в круге $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - R| \leq R\}$. Действительно, согласно представлению (5) для каждого $p \in \mathbb{N}_0$ выполняется равенство

$$\frac{R^p F^{(p)}(R)}{p!} = \int_0^{+\infty} \frac{(-Rt)^p}{p!} e^{-Rt} d\mu(t) = \int_0^{+\infty} \frac{(-\tau)^p}{p!} e^{-\tau} d\mu\left(\frac{\tau}{R}\right). \quad (26)$$

В силу аналитичности $F(s)$ в круге $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - R| \leq R\}$ найдутся числа $c_3 > 0$ и $\xi \in (0, 1)$ такие, что

$$\frac{R^p |F^{(p)}(R)|}{p!} < c_3 \xi^p. \quad (27)$$

Из (26) и (27) получаем неравенство

$$\sum_{p \leq x R \delta^2} \left| \int_0^{+\infty} \frac{\tau^p}{p!} e^{-\tau} d\mu\left(\frac{\tau}{R}\right) \right| \leq \frac{c_3}{1-\xi}. \quad (28)$$

Третье слагаемое

$$\int_{xR}^{+\infty} \left(\sum_{p \leq x R \delta^2} \frac{\tau^p}{p!} \right) e^{-\tau} dV\left(\frac{\tau}{R}\right)$$

было оценено сверху в работе [5] в лемме 1 даже при меньших ограничениях на функции μ и F . Было доказано неравенство

$$\int_{xR}^{+\infty} \left(\sum_{p \leq x R \delta^2} \frac{\tau^p}{p!} \right) e^{-\tau} dV\left(\frac{\tau}{R}\right) < c_4 \exp\left(-\frac{xR\delta}{2}\right). \quad (29)$$

Таким образом, из (24), (25), (28) и (29) выводим асимптотическое неравенство

$$V_{\pm}(x) > \frac{1}{2} \sum_{p \leq x R \delta^2} \int_0^{+\infty} \frac{\tau^p}{p!} e^{-\tau} dV\left(\frac{\tau}{R}\right) + O(1). \quad (30)$$

Первое слагаемое в (30) оценим снизу, пользуясь наличием полюса порядка m у функции $F(s)$ на мнимой оси или правее, скажем, в точке $s_0 + it_0$, где $s_0 \geq 0$. Рассмотрим функцию $\Phi(s) = F(R + it_0 - R_1 s)$, где $R_1 = R - s_0$. По условию теоремы $\Phi(s)$ аналитична на полуинтервале $[0, 1)$ и в точке $s = 1$ имеет полюс порядка m . Так как $\Phi(s)$ голоморфна в точке $s = 0$, найдется такое положительное число r , что $\Phi(s)$ аналитична в круге $\{s \in \mathbb{C} \mid |s| \leq e^{-r}\}$. Разложим функцию $\Phi(s)$ в ряд Маклорена в круге $\{s \in \mathbb{C} \mid |s| \leq e^{-r}\}$:

$$\Phi(s) = F(R + it_0 - R_1 s) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p s^p, \quad \limsup_{p \rightarrow \infty} |a_p|^{1/p} < e^r. \quad (31)$$

Введем еще функцию $f(w) = \Phi(e^{-w})$. Она аналитична в полуплоскости $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w > r\}$, и имеет в точке $w = 0$ полюс порядка m , лежащий на границе звезды G_f . Напишем представление функции $f(w)$ в виде преобразования Лапласа в полосе $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w > r\}$

$$f(w) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p e^{-wp} = \int_0^{+\infty} e^{-wt} d\nu(t).$$

Функция $\nu(t)$ постоянна на интервалах $n-1 < t < n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет скачки в $\mathbb{N}_0$, а величина скачка в точке $p \in \mathbb{N}_0$ равна a_p . Для $V_{\nu}(x)$ – вариации меры $d\nu$ на отрезке $[0, x]$, которая равна $\sum_{p \leq x} |a_p|$, в силу (31) выполнена оценка (1) с $C = r$. Применяя к $f(w)$ теорему 1 работы [5], получим оценку снизу для $V_{\nu}(x)$. А именно, найдутся постоянные $c_5, x_3 > 0$ такие, что для всех $x > x_3$ выполняется неравенство

$$V_{\nu}(x) = \sum_{p \leq x} |a_p| > c_5 x^m. \quad (32)$$

С другой стороны, из (31) и (5) находим

$$a_p = \frac{\Phi^{(p)}(0)}{p!} = (-R_1)^p F^{(p)}(R + it_0) = \int_0^{+\infty} \frac{(-R_1 t)^p}{p!} e^{-(R+it_0)t} d\mu(t).$$

Следовательно,

$$|a_p| \leq \int_0^{+\infty} \frac{(R_1 t)^p}{p!} e^{-Rt} dV(t). \quad (33)$$

Из (32) и (33) получаем, что для всех $x > x_3/(R\delta^2)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x R \delta^2} \int_0^{+\infty} \frac{\tau^p}{p!} e^{-\tau} dV\left(\frac{\tau}{R}\right) &= \sum_{p \leq x R \delta^2} \int_0^{+\infty} \frac{(Rt)^p}{p!} e^{-Rt} dV(t) \\ &\geq \sum_{p \leq x R \delta^2} \int_0^{+\infty} \frac{(R_1 t)^p}{p!} e^{-Rt} dV(t) \\ &\geq \sum_{p \leq x R \delta^2} |a_p| > c_5 (R\delta^2)^m x^m. \end{aligned} \quad (34)$$

Из (30) и (34) следует существование чисел $c_2 = (c_5/4)(R\delta^2)^m$, $x'_2 = x_3/(R\delta^2)$ таких, что для всех $x > x'_2$ выполнены оценки снизу $V_{\pm}(x) > 2c_2 x^m + O(1) > c_2 x^m$ при $x > x_2$. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оценка снизу (20) была получена в [5] при еще меньших условиях на функцию F . А именно, для справедливости (20) достаточно лишь наличие полюса с неотрицательной действительной частью на границе G_F . Для одновременного выполнения оценок (23) этого мало, поскольку при наличии полюса у функции F на $\mathbb{R}$ возможна ситуация $V_-(x) \equiv 0$. Таким образом, в теореме 2 отказаться от требования голоморфности $F(s)$ на отрезке $[0, C]$, вообще говоря, нельзя. Является ли излишним требование голоморфности $F(s)$ в круге $|s - C| \leq C$? Ответ авторам не известен.

В статье [5] рассматривалась также задача об оценке снизу вариации меры $d\mu$ на “коротких” отрезках. Была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА В. Пусть $R > C$, $t_0 \in \mathbb{R}$, функция $F(s)$ не имеет в некоторой окрестности круга $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - (R + it_0)| \leq R\}$ никаких особенностей, кроме полюсов, а в точке it_0 имеет полюс порядка m . Обозначим через α_1 и α_2 соответственно наименьший и наибольший корни уравнения $\alpha \ln(e/\alpha) = 1 - C/R$ на интервале $0 < \alpha < e$. Тогда существуют положительные постоянные c_6 и x_4 такие, что при любом $x > x_4$ выполняется неравенство

$$V(x) - V(\lambda x) > c_6 x^m, \quad \text{где } \lambda = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Мы дополняем теорему В в том же духе, в котором теорема 2 дополняет теорему А.

ЛЕММА. Если функция $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ аналитична в круге $|z| < 1$ и во всех точках окружности $|z| = 1$, исключая $z = 1$, и при некотором $p > 0$ удовлетворяет условию

$$\varphi(z) = o(|1 - z|^{-p}), \quad z \rightarrow 1, \quad |z| \leq 1, \quad (35)$$

то $\sum_{k=0}^n a_k = o(n^p)$, $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По условию (35) найдется такое N , что для всех $n > N$ неравенство

$$|\varphi(z)| < \varepsilon |1 - z|^{-p} \quad (36)$$

выполняется при всех z , $|z| \leq 1$, лежащих на прямой $\operatorname{Re} z = 1 - 1/n$. Обозначим через L_n дугу $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Re} z \leq 1 - 1/n\}$, а через l_n отрезок $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, \operatorname{Re} z = 1 - 1/n\}$. Положим $h_n = \sqrt{2n - 1}/n$. Согласно интегральной формуле Коши имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^n \int_{L_n \cup l_n} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n \cup l_n} \varphi(\zeta) \frac{1 - \zeta^{n+1}}{\zeta^{n+1}(1 - \zeta)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}(1 - \zeta)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_n} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}(1 - \zeta)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n \cup l_n} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{1 - \zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}(1 - \zeta)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_n} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}(1 - \zeta)}. \end{aligned} \quad (37)$$

Оценим сверху модуль каждого из интегралов. Первый из интегралов (37) оценим, используя непрерывность φ на дуге L_{N+1} и неравенство (36). Пусть $M = \max_{L_{N+1}} |\varphi(z)|$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{L_n} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}(1 - \zeta)} \right| &\leq \int_{L_n} \frac{M + \varepsilon |1 - \zeta|^{-p}}{|1 - \zeta|} |d\zeta| \\ &= \int_{\arcsin h_n}^{\pi} \frac{M + \varepsilon (2 \sin(\varphi/2))^{-p}}{\sin(\varphi/2)} d\varphi = O\left(M \ln n + \frac{\varepsilon n^{p/2}}{p}\right), \end{aligned} \quad (38)$$

где постоянная в O абсолютная. Для оценки второго интеграла (37) снова применим неравенство (36):

$$\begin{aligned} \left| \int_{l_n} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}(1 - \zeta)} \right| &\leq \int_{l_n} \frac{\varepsilon |1 - \zeta|^{-p}}{|\zeta|^{n+1} |1 - \zeta|} |d\zeta| \\ &= \varepsilon \int_{-h_n}^{h_n} \frac{dt}{((1 - 1/n)^2 + t^2)^{(n+1)/2} (n^{-2} + t^2)^{(p+1)/2}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Поскольку $((1 - 1/n)^2 + t^2)^{(n+1)/2} \geq (1 - 1/n)^{n+1} \geq 1/8 \quad \forall n \geq 2$, то

$$\left| \int_{l_n} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}(1 - \zeta)} \right| \leq 16\varepsilon \int_0^{h_n} \frac{dt}{(t^2 + n^{-2})^{(p+1)/2}}$$

$$< 16\varepsilon \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2 + n^{-2})^{(p+1)/2}} = 8\sqrt{\pi}\varepsilon \frac{\Gamma(p/2)}{\Gamma((p+1)/2)} n^p. \quad (40)$$

Из (38), (39) и (40) заключаем, что при любом $\varepsilon > 0$ верно неравенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| n^{-p} \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq 8\sqrt{\pi}\varepsilon \frac{\Gamma(p/2)}{\Gamma((p+1)/2)}. \quad (41)$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из (41) получаем утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, 1)$, а функция $F(s)$, определенная интегралом (5) по действительнoзначной мере, удовлетворяющей условию (1), допускает аналитическое продолжение в прямоугольник $\Pi = \{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} s \leq C, |\operatorname{Im} s| < 4C/\varepsilon\}$ и верна оценка

$$F(s) = o(s^{-m}), \quad s \rightarrow 0, \quad s \in \Pi. \quad (42)$$

Предположим затем, что существует число $t_0 > 0$ такое, что в прямоугольнике $\Pi_1 = \{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} s \leq C, |\operatorname{Im}(s - it_0)| < 4C/\varepsilon\}$ функция $F(s)$ не имеет никаких особенностей кроме полюсов, допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность точки it_0 и в этой точке имеет полюс порядка m . Тогда при $\lambda = 1 - \varepsilon$ и всех достаточно больших x справедливы неравенства

$$V_+(x) - V_+(\lambda x) > c_7 x^m, \quad V_-(x) - V_-(\lambda x) > c_7 x^m. \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $R = 8C/\varepsilon^2$. Тогда часть замкнутого круга $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - (R + it_0)| \leq R\}$, лежащая в полосе $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} s \leq C\}$, содержится в прямоугольнике Π_1 . По условию теоремы функция $F(s)$ в некоторой окрестности замкнутого круга $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - (R + it_0)| \leq R\}$ не имеет никаких особенностей кроме полюсов, а в точке it_0 имеет полюс порядка m . Выберем $Q > R$ так, чтобы в некоторой окрестности замкнутого круга $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - (Q + it_0)| \leq Q\}$ не было никаких особенностей кроме полюсов.

Обозначим через α_1 и α_2 наименьший и наибольший корни уравнения $\alpha \ln(e/\alpha) = 1 - C/R$, а через β_1 и β_2 – наименьший и наибольший корни уравнения $\beta \ln(e/\beta) = 1 - C/Q$. Положим

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

$$y_1(x) = \bar{\lambda} Q \gamma_2 x, \quad y_2(x) = Q \gamma_1 x.$$

Тогда

$$y_2(x) - y_1(x) = \frac{\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1}{2\alpha_2} Q x > 0.$$

Оценим снизу вариацию $V_\pm$ по отрезку $[\bar{\lambda}x, x]$. Имеем

$$V_\pm(x) - V_\pm(\bar{\lambda}x) = \int_{\bar{\lambda}Qx}^{Qx} dV_\pm\left(\frac{\tau}{Q}\right)$$

$$\begin{aligned}
&> \int_{\bar{\lambda}Qx}^{Qx} \left(\sum_{y_1(x) \leq n \leq y_2(x)} \frac{\tau^n}{n!} \right) e^{-\tau} dV_{\pm} \left(\frac{\tau}{Q} \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\bar{\lambda}Qx}^{Qx} \left(\sum_{y_1(x) \leq n \leq y_2(x)} \frac{\tau^n}{n!} \right) e^{-\tau} dV \left(\frac{\tau}{Q} \right) \\
&\quad \pm \frac{1}{2} \int_{\bar{\lambda}Qx}^{Qx} \left(\sum_{y_1(x) \leq n \leq y_2(x)} \frac{\tau^n}{n!} \right) e^{-\tau} d\mu \left(\frac{\tau}{Q} \right). \quad (44)
\end{aligned}$$

В [5] на с. 153 доказано неравенство

$$\int_{\bar{\lambda}Qx}^{Qx} \left(\sum_{y_1(x) \leq n \leq y_2(x)} \frac{\tau^n}{n!} \right) e^{-\tau} dV \left(\frac{\tau}{Q} \right) > c_8 x^m, \quad x > x_4, \quad (45)$$

где c_8 и x_4 – некоторые постоянные. Оценим сверху второе слагаемое. Обозначив $E(x) = [0, \bar{\lambda}Qx] \cup [Qx, +\infty)$, находим

$$\begin{aligned}
&\int_{\bar{\lambda}Qx}^{Qx} \left(\sum_{y_1(x) \leq n \leq y_2(x)} \frac{\tau^n}{n!} \right) e^{-\tau} d\mu \left(\frac{\tau}{Q} \right) \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{y_1(x) \leq n \leq y_2(x)} \frac{\tau^n}{n!} \right) e^{-\tau} d\mu \left(\frac{\tau}{Q} \right) - \int_{E(x)} \left(\sum_{y_1(x) \leq n \leq y_2(x)} \frac{\tau^n}{n!} \right) e^{-\tau} d\mu \left(\frac{\tau}{Q} \right).
\end{aligned}$$

Ограниченность второго слагаемого следует из результатов [5]. В этой работе на с. 153 доказаны неравенства

$$(n!)^{-1} \int_{E(x)} \tau^n e^{-\tau} dV(x) = O(\xi^n), \quad \text{где } 0 < \xi < 1.$$

Суммируя их, получаем требуемое. Оценка первого интеграла непосредственно следует из леммы:

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{y_1(x) \leq n \leq y_2(x)} \frac{\tau^n}{n!} \right) e^{-\tau} d\mu \left(\frac{\tau}{Q} \right) = \sum_{y_1(x) \leq n \leq y_2(x)} \frac{F^{(n)}(Q)}{n!} (-Q)^n = o(x^m).$$

Таким образом,

$$\int_{\bar{\lambda}Qx}^{Qx} \left(\sum_{y_1(x) \leq n \leq y_2(x)} \frac{\tau^n}{n!} \right) e^{-\tau} d\mu \left(\frac{\tau}{Q} \right) = o(x^m), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (46)$$

Из (44), (45) и (46) получаем оценку (43) с $\lambda = \bar{\lambda}$. В работе [5] установлено, что $\bar{\lambda} > 1 - \varepsilon + \varepsilon^2/8$. Следовательно, неравенства (43) справедливы, если взять $\lambda = 1 - \varepsilon$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$, функция $F(s)$ мероморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$, а в полуполосе $\operatorname{Re} s > 0$, $|\operatorname{Im} s| < 4C/\varepsilon$ не имеет особенностей. Тогда если у $F(s)$ есть хотя бы один полюс порядка m с неотрицательной вещественной частью, то при условии (42) выполняются неравенства (43) с $\lambda = 1 - \varepsilon$.

4. Приложения в теории чисел. Один из разделов аналитической теории чисел связан с изучением поведения сумм $A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$, где a – та или иная функция натурального аргумента. Если функция $a(n)$ достаточно часто меняет знак, то бывает, что и сумма $A(x)$ обладает тем же свойством и какой-либо асимптотики $A(x)$ указать нельзя. Тогда основными задачами становятся 1) оценка сверху модуля $|A(x)|$, 2) оценки снизу $A^\pm(x)$ на подпоследовательностях значений x или оценки снизу средних от этих функций по “коротким” отрезкам.

Наиболее часто встречающимся в математической литературе примером такой функции является функция Мёбиуса $\mu(n)$. Она равна 0, если n делится на квадрат простого числа, и равна $(-1)^s$, если число n разлагается в произведение s различных простых сомножителей, $\mu(1) = 1$. О сумме $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$ известно следующее. В [6] доказана оценка

$$M(x) = O(x \exp(-c \ln^{0.6} x (\ln \ln x)^{-0.2})), \quad x \rightarrow +\infty,$$

где c – некоторая положительная постоянная. Эта оценка при достаточно больших x до сих пор остается лучшей. С другой стороны, гипотеза “ $M(x) = O(\sqrt{x})$ ” пока не опровергнута. “В среднем” $|M(x)|$ не меньше $c\sqrt{x}$. В [7] при $x > x_0$ доказано неравенство

$$\int_{x/100 \ln x}^x |M(u)| du > \frac{x^{3/2}}{17\,000}. \quad (47)$$

Соотношения $M^+(x) = \Omega(\sqrt{x})$, $M^-(x) = \Omega(\sqrt{x})$, $x \rightarrow +\infty$ (запись $u(x) = \Omega(v(x))$, $x \rightarrow +\infty$, означает отрицание утверждения $u(x) = o(v(x))$, $x \rightarrow +\infty$; см., например, [8; гл. VII, § 8]) были известны еще в начале XX века. Затем в ряде работ, начиная с [9], доказывалось, что перемены знака и “не малые” по модулю положительные и отрицательные значения $M(x)$ встречаются достаточно часто. Наилучший результат принадлежит Пинцу [10]. Он доказал, что на отрезке $[Y \exp(-5(\ln \ln Y)^{3/2}), Y]$ $\forall Y > Y_0$ найдутся два числа x' и x'' такие, что

$$M(x') > \frac{\sqrt{x'}}{136\,000}, \quad M(x'') < -\frac{\sqrt{x''}}{136\,000}. \quad (48)$$

Аналоги неравенств (47) для положительных и отрицательных частей $M(x)$ не известны. Заметим, что в доказательстве неравенств (47) и (48) в значительной степени использовалось то обстоятельство, что производящей функцией для функции Мёбиуса является именно $1/\zeta(s)$. Не видно, как доказать подобные неравенства для других теоретико-числовых функций, производящие функции которых имеют вид $f(s)/\zeta(s)$, где $f(s)$ мероморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 1/2$ и не имеет нулей в некоторых точках, в которых $\zeta(s)$ обращается в нуль.

Следствие 1 из теоремы 3 позволяет вывести оценку снизу средних

$$\int_{Y^{1-\epsilon}}^Y u^{-3/2} A^+(u) du > c_9 \ln Y, \quad \int_{Y^{1-\epsilon}}^Y u^{-3/2} A^-(u) du > c_9 \ln Y \quad (49)$$

при “небольших” значениях ϵ для достаточно широкого класса функций натурального аргумента $\{a(n)\}$, содержащего в себе функцию Мёбиуса. Оценки вида (49), в которых вместо $A^\pm(u)$ стоит $|A(u)|$ были получены в [11].

В формулируемой ниже теореме предполагается, что T – произвольное положительное число, относительно которого известно, что в прямоугольнике $\mathcal{P}_T = \{s \in \mathbb{C} \mid |1/2 < \operatorname{Re} s < 1, |\operatorname{Im} s| < T\}$ нет нулей ζ функции Римана. Известно, что в качестве T можно взять $2 \cdot 10^{10}$, но с каждым годом находятся все большие значения T .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ – произвольная последовательность действительных чисел, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $b_n = O(n^\alpha)$, $\alpha > 0$;
- 2) функция $f(s) = \sum_{n=1}^\infty b_n n^{-s}$ мероморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 1/2$;
- 3) $f(s)$ не имеет полюсов в прямоугольнике $\mathcal{P}_T$;
- 4) существует нуль $\zeta(s)$, не являющийся нулем функции $f(s)$.

Положим $a_n = \sum_{d|n} b_d \mu(n/d)$, $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$, $\epsilon = (4\alpha + 2)/T$. (Если $A(x) = O(x)$, то берем $\epsilon = 2/T$.) Тогда существуют положительные постоянные c_9 и y_0 такие, что при любом $Y > y_0$ верны оценки (49).

Если положить $b_1 = 1$, $b_n = 0$ при $n \geq 2$, то $f(s) \equiv 1$ и получается

СЛЕДСТВИЕ 2. Неравенства (49) верны для $M^\pm(u)$ при $\epsilon = 10^{-10}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. До сих пор не известно, имеет ли дзета-функция Римана хотя бы один кратный нуль. Если выяснится, что кратный нуль существует, то при выполнении условия 4) теоремы 4 в оценке (49) вместо $\ln Y$ можно будет поставить $(\ln Y)^m$, где m – кратность нуля. Если выяснится, что существует нуль $\zeta(s)$, вещественная часть которого равна $1/2 + \kappa$, $\kappa > 0$, то тем же методом получится оценка

$$\int_{Y^{1-\epsilon}}^Y u^{\kappa-3/2} A^\pm(u) du > c_{10} \ln Y.$$

Справедлив более общий результат, чем теорема 4, хотя и более сложно формулируемый. Следствие 1 показывает, что от условия мероморфности $f(s)$ в некоторой окрестности полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 1/2$ можно отказаться.

ТЕОРЕМА 5. Утверждение теоремы 4 справедливо, если условие 2) в ее формулировке заменить на два следующих:

- 2а) функция $f(s)$ мероморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1/2$, и верна асимптотическая оценка $f(s) = o((s - 1/2)^{-1})$, $s \rightarrow 1/2$, $\operatorname{Re} s > 1/2$;
- 2б) $f(s)$ продолжается как мероморфная функция в окрестность хотя бы одного нуля ρ дзета-функции Римана, лежащего на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$, но вне прямоугольника $\mathcal{P}_T$, и не обращается в нуль в точке ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $F_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$. Из определений последовательности a_n , абсолютной сходимости ряда $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ при $\operatorname{Re} s > 1 + \alpha$, абсолютной сходимости ряда $1/\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s}$ при $\operatorname{Re} s > 1$, и правила перемножения рядов Дирихле [8; с. 426]

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n n^{-s} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n n^{-s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n n^{-s}, \quad U_n = \sum_{d|n} u_d v_{n/d},$$

выполняющегося в полуплоскости, в которой оба перемножаемых ряда сходятся абсолютно, следует тождество

$$F_1(s) = \frac{f(s)}{\zeta(s)}, \quad \operatorname{Re} s > 1 + \alpha. \quad (50)$$

Согласно [8; с. 421] наряду с (50) верно интегральное представление

$$F_1(s) = s \int_1^{+\infty} A(x) x^{-s-1} dx, \quad \operatorname{Re} s > 1 + \alpha. \quad (51)$$

Оценим сверху $|A(x)|$. В силу неравенства $|\mu(n)| \leq 1$ и условия 1 теоремы 4 имеем $|a_n| = O(\sum_{d|n} d^\alpha)$, $\alpha > 0$. Следовательно,

$$A(x) = O\left(\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} d^\alpha\right) = O\left(\sum_{d \leq x} d^\alpha \left[\frac{x}{d}\right]\right) = O\left(x \sum_{d \leq x} d^{\alpha-1}\right).$$

Отсюда находим $A(x) = O(x^{1+\alpha})$, $\alpha > 0$, а это влечет за собой оценку

$$W(x) \equiv \int_0^x |A(e^t)| e^{-t/2} dt = O(e^{(\alpha+0.5)x}), \quad x > 0. \quad (52)$$

Рассмотрим функцию $F(s) = (s + 0.5)^{-1} F_1(s + 0.5)$. Согласно (50) и (51) имеем

$$F(s) = \frac{f(s + 0.5)}{(s + 0.5)\zeta(s + 0.5)} = \int_0^{+\infty} (A(e^u) e^{-u/2}) e^{-us} du \equiv \int_0^{+\infty} e^{-us} d\nu(u),$$

где $\nu(u) = \int_0^u A(e^t) e^{-t/2} dt$, $\operatorname{Var} \nu(u)|_0^x = W(x)$. Отсюда заключаем, что функция F является преобразованием Лапласа действительной меры $d\nu$, удовлетворяющей условию (1) при $C = \alpha + 0.5$. Из условий теоремы 5 видно, что для функции F выполнены все условия следствия 1 из теоремы 3. Поэтому (см. (4)) верна оценка

$$W^\pm(x) - W^\pm(x(1 - \varepsilon)) = \int_{x(1-\varepsilon)}^x A^\pm(e^u) e^{-u/2} du > c_9 x. \quad (53)$$

Из (53) сразу получаем неравенства (49). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.
- [2] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.
- [3] G. Freud,, “Restglied eines Tauberscher Satzes. I”, *Acta Math. Hungar.*, **2**:3–4 (1951), 299–308.
- [4] А. Г. Постников, *Введение в аналитическую теорию чисел*, Наука, М., 1971.
- [5] А. Ю. Попов, Ю. С. Чайников, “Аналоги тауберовых теорем для преобразования Лапласа”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:6 (2002), 137–158.
- [6] A. Walfisz, *Weilsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, Mathematische Forschungsberichte, **16**, Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.
- [7] J. Pintz, “Oscillatory properties of $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$, I”, *Acta Arith.*, **42**:1 (1982), 49–55.
- [8] К. Прахар, *Теория распределения простых чисел*, Мир, М., 1967.
- [9] I. Kátai, “Comparative theory of prime numbers”, *Acta Math. Hungar.*, **18** (1967), 133–149.
- [10] J. Pintz, “Oscillatory properties of $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$. III”, *Acta Arith.*, **43**:2 (1984), 105–113.
- [11] С. В. Конягин, А. Ю. Попов, “О скорости расходимости некоторых интегралов”, *Матем. заметки*, **58**:2 (1995), 243–255.

А. Ю. Попов, А. П. Солодов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

13.06.2006