Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Прохорович, Размерность Хаусдорфа множества Лебега для классов W_α^p на метрических пространствах, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 1, 99–107

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3757>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:21:35

УДК 517.5

Размерность Хаусдорфа множества Лебега для классов W_α^p на метрических пространствах

М. А. Прохорович

Пусть (X, μ, d) – пространство однородного типа, где d – метрика, μ – мера, связанные условием удвоения с показателем $\gamma > 0$, $W_\alpha^p(X)$ – обобщенные классы Соболева, $\text{Car}_{\alpha,p}$ – соответствующая емкость ($p > 1$, $0 < \alpha \leq 1$) и $\dim_H$ – размерность Хаусдорфа.

Мы покажем связь $\text{Car}_{\alpha,p}$ -емкости с размерностью Хаусдорфа, а также докажем, что для любой функции $u \in W_\alpha^p(X)$, $p > 1$, $0 < \alpha < \gamma/p$, существует такое множество $E \subset X$, что $\dim_H(E) \leq \gamma - \alpha p$ и для любого $x \in X \setminus E$ существует предел

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} u d\mu = u^*(x),$$

более того,

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |u - u^*(x)|^q d\mu = 0, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Библиография: 18 названий.

1. Введение. Пусть X – метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ . Через $L^p = L^p(X)$, $1 \leq p < \infty$, обозначаем обычные лебеговы пространства, порожденные мерой μ . Всюду ниже предполагаем выполненным условие удвоения порядка $\gamma > 0$

$$\mu(B(x, s)) \leq c \left(\frac{s}{t} \right)^\gamma \mu(B(x, t)), \quad x \in X, \quad 0 < t \leq s. \quad (1)$$

В таком случае тройку (X, d, μ) обычно называют пространством однородного типа [1], [2]. Здесь и всюду ниже через c мы обозначаем различные положительные постоянные, зависящие, возможно, только от γ из (1), p и α .

Пусть $\alpha > 0$ и $1 \leq p < \infty$. Для функции $u \in L^p(X)$ обозначим через $D_\alpha(u)$ класс всех неотрицательных μ -измеримых функций на X , для каждой из которых существует такое множество $E \subset X$, $\mu(E) = 0$, что

$$|u(x) - u(y)| \leq [d(x, y)]^\alpha [g(x) + g(y)],$$

где $x, y \in X \setminus E$.

Введем шкалу пространств Соболева следующим образом:

$$W_\alpha^p(X) = \{u \in L^p(X) : D_\alpha(u) \cap L^p(X) \neq \emptyset\},$$

$$\|u\|_{W_\alpha^p(X)} = (\|u\|_{L^p(X)}^p + [\inf\{\|g\|_{L^p(X)} : g \in D_\alpha(u) \cap L^p(X)\}]^p)^{1/p}.$$

Эти классы при $\alpha = 1$ были введены Хайлашем в работе [3] (см. также [4], [5]). Отметим, что в случае $X = \mathbb{R}^n$ класс $W_1^p(X)$ совпадает с классическим пространством Соболева первого порядка [3]. Далее в работах [6], [7] пространства $W_\alpha^p(X)$ рассматривались при всех $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$. В частности в [7] были приведены различные описания этих пространств (см. также [8], где рассматривались более общие шкалы).

Напомним, что $x \in X$ называется *точкой Лебега* для функции $u \in L_{\text{loc}}^1(X)$, если

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_{B(x,r)} u \, d\mu = u(x).$$

Множество всех таких точек будем называть *множеством Лебега* функции u . Здесь использовано стандартное обозначение

$$u_E = \int_E u \, d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E u \, d\mu$$

для среднего значения функции u по множеству $E \subset X$ с $\mu E > 0$; если $\mu E = 0$, то считаем $u_E = 0$.

В работе [9] были определены и изучены соответствующие емкости для $W_1^p(X)$, а в [10] в терминах этих емкостей исследована массивность множества Лебега для функций из $W_1^p(X)$. В терминах мер Хаусдорфа эти вопросы рассматривались в [11]. Позднее в работе [12] результаты из [9], [10] были распространены на $W_\alpha^p(X)$ при $0 < \alpha \leq 1$.

Всюду ниже в работе мы предполагаем, что $0 < \alpha \leq 1$. Наш основной результат содержится в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p > 1$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$ и задана функция $u \in W_\alpha^p(X)$. Тогда существует такое множество $E \subset X$, что размерность Хаусдорфа $\dim_H(E) \leq \gamma - \alpha p$ и для любого $x \in X \setminus E$ существует предел

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_{B(x,r)} u \, d\mu = u^*(x);$$

более того,

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_{B(x,r)} |u - u^*(x)|^q \, d\mu = 0. \quad (2)$$

При $\alpha = 1$ этот результат был частично получен в [11] (равенство (2) в [11] не рассматривалось). Отметим, что показатель q в (2) является точным. Его нельзя улучшить уже в случае $X = \mathbb{R}^n$.

Кроме того, в теоремах 2 и 3 мы изучаем связь между $\text{Cap}_{\alpha,p}$ -емкостями и мерами Хаусдорфа (см. [9] для $\alpha = 1$). При доказательствах мы используем схемы рассуждений из работ [9], [11], видоизменяя их соответствующим образом.

Результаты работы докладывались на Саратовской зимней математической школе [13].

2. $\text{Car}_{\alpha,p}$ -емкости и меры Хаусдорфа. Рассмотрим емкости, соответствующие классам $W_\alpha^p(X)$, $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$,

$$\text{Car}_{\alpha,p}(E) = \inf \{ \|u\|_{W_\alpha^p(X)}^p : u \in W_\alpha^p(X), u \geq 1 \text{ в окрестности } E \}.$$

При $\alpha = 1$ они были введены и изучены в [9], а в случае $0 < \alpha \leq 1$ – в [12]. Там же формулируются нужные нам свойства $\text{Car}_{\alpha,p}$ -емкостей, которые приведены в следующей лемме. Поскольку при $0 < \alpha \leq 1$ доказательство соответствующих утверждений почти не меняется по сравнению со случаем $\alpha = 1$, мы не будем его приводить.

ЛЕММА 1. 1) Емкость $\text{Car}_{\alpha,p}$ является внешней мерой и

$$\text{Car}_{\alpha,p}(E) = \inf \{ \text{Car}_{\alpha,p}(O) : E \subset O, O - \text{открыто} \}.$$

2) Пусть $x_0 \in X$; тогда

$$\text{Car}_{\alpha,p}(B(x_0, r)) \leq cr^{-\alpha p} \mu(B(x_0, r)), \quad 0 < r < 1, \quad \gamma > \alpha p,$$

$$\text{Car}_{\alpha,p}(B(x_0, r)) \leq c \left(\lg \frac{1}{r} \right)^{1-p} r^{-\alpha p} \mu(B(x_0, r)), \quad 0 < r \leq \frac{1}{2}, \quad \gamma = \alpha p.$$

3) Пусть $1 < p < \infty$, $g \in L^p(X)$, $g \geq 0$. Тогда

$$\text{Car}_{\alpha,p} \left(\left\{ x \in X : \lim_{r \rightarrow 0} r^{\alpha p} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} g^p d\mu > 0 \right\} \right) = 0.$$

Далее напомним определение меры Хаусдорфа (см., например, § 2.10 в [14]). Пусть $E \subset X$ и $h: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – неубывающая функция со свойствами $\lim_{r \rightarrow 0} h(r) = h(0) = 0$.

Для $0 < \delta \leq \infty$ и $E \subset X$ определим

$$H_\delta^h(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} h(r_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i), r_i \leq \delta \right\},$$

$$H^h(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^h(E) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^h(E);$$

$H^h(E)$ называется h -мерой Хаусдорфа множества E . Если $h(t) = t^s$ для $0 < s < \infty$, мы получим меру Хаусдорфа размерности s , которую будем обозначать H^s . Отметим для дальнейшего, что мера Хаусдорфа $H^s(E) = 0$ тогда и только тогда, когда $H_\infty^s(E) = 0$, где

$$H_\infty^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^s : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i) \right\}$$

– хаусдорфова вместимость.

Хаусдорфова размерность множества $E \subset X$ определяется следующим образом:

$$\dim_H(E) = \inf \{ s : H^s(E) = 0 \} = \sup \{ s : H^s(E) = \infty \}.$$

Ниже в теореме 2 мы докажем оценку сверху хаусдорфовой размерности множеств нулевой $\text{Car}_{\alpha,p}$ -емкости. На произвольных метрических пространствах это

было доказано в [9] для случая $\alpha = 1$ при более жестком условии (7) на меру. Для случая $X = \mathbb{R}^n$ аналогичные результаты были известны гораздо раньше (см., например, главу 5.1 в [15]).

Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений. Сначала приведем неравенства типа Пуанкаре.

ЛЕММА 2. Пусть $u \in W_\alpha^p(X)$ и $g \in D_\alpha(u) \cap L^p(X)$. Тогда

1) для любого шара $B = B(x, r) \subset X$ выполнено неравенство

$$\int_B |u - u_B| d\mu \leq cr^\alpha \int_B g d\mu; \quad (3)$$

2) для любого μ -измеримого множества $E \subset X$, $0 < \mu(E) < \infty$ выполнено неравенство

$$\int_E |u - u_E|^p d\mu \leq c[\text{diam}(E)]^{\alpha p} \int_E g^p d\mu. \quad (4)$$

Доказательство неравенств (3) и (4) для случая $\alpha = 1$ приведено в [9]. Переход к произвольному $0 < \alpha \leq 1$ тривиален.

ЛЕММА 3. Пусть $f \in L_{\text{loc}}^1(X)$, $p > 0$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$. Тогда для любого шара $B = B(x, r)$

$$\left(\int_{B(x, r)} |f - f_B|^q d\mu \right)^{1/q} \leq cr^\alpha \left(\int_{B(x, c_2 r)} (\mathcal{S}_\alpha f)^p d\mu \right)^{1/p}. \quad (5)$$

Неравенство (5) является частным случаем результатов работы [16]. Здесь

$$\mathcal{S}_\alpha u(x) = \sup_{B \ni x} r^{-\alpha} \int_B |u - u_B| d\mu$$

– максимальная функция Кальдерона–Скотта ($\sup$ берется по всем шарам B , содержащим точку x).

Приведем также стандартную лемму о покрытиях (см., например, [1]).

ЛЕММА 4. Пусть $\mathcal{B} = \{B\}$ – некоторое семейство шаров, причем $E \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ и $\sup\{r(B) : B \in \mathcal{B}\} < \infty^1$. Тогда существует не более чем счетное подсемейство попарно непересекающихся шаров $\{B(x_i, r_i)\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{B}$ такое, что

$$E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, 6r_i), \quad \sum_{i=1}^\infty \chi_{B(x_i, 6r_i)} \leq c.$$

Наконец отметим, что если $x_0 \in X$ и $R > 0$ фиксированы, то в силу условия (1) неравенство

$$\mu(B(x, t)) \geq ct^\gamma \quad (6)$$

выполнено для всех $x \in B(x_0, R)$ и $0 < t < 2R$ с постоянной $c = c(R, x_0)$, зависящей от центра и радиуса шара $B(x_0, R)$.

¹ $r(B)$ обозначает радиус шара B .

ТЕОРЕМА 2. Пусть множество $E \subset X$ таково, что $\text{Car}_{\alpha,p}(E) = 0$. Тогда $H^t(E) = 0$ для всех $t > \gamma - \alpha p$; в частности, $\dim_H(E) \leq \gamma - \alpha p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что если $\{u_i\}$ – последовательность μ -измеримых функций, $g_i \in D_\alpha(u_i)$ и $\sup_i u_i < +\infty$ μ -почти всюду, то $\sup_i g_i \in D_\alpha(\sup_i u_i)$.

Далее, пусть $E \subset X$ и $\text{Car}_{\alpha,p}(E) = 0$. Тогда для любого $i = 1, 2, \dots$ существуют функция $u_i \in L^p(X)$, $u_i \geq 1$ в окрестности множества E , и функция $g_{u_i} \in D_\alpha(u_i) \cap L^p(X)$ такие, что

$$\|u_i\|_{L^p(X)}^p + \|g_{u_i}\|_{L^p(X)}^p \leq 2^{-i}.$$

Определим функции $u = \sum_{i=1}^\infty u_i$ и $g = \sum_{i=1}^\infty g_i$. Тогда $u, g \in L^p(X)$ и $u \in W_\alpha^p(X)$, $g \in D_\alpha(u)$.

Зафиксируем $x_0 \in E$, $n \in \mathbb{N}$ и возьмем произвольно точку $x \in E \cap B(x_0, n)$. Предположим, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} r^{-t} \int_{B(x,r)} g^p d\mu = c_0 < +\infty.$$

Затем выберем $0 < R < 2n$ так, чтобы для любого $0 < r < R$

$$\int_{B(x,r)} g^p d\mu \leq 2c_0 r^t.$$

Обозначим $B_i = B(x, 2^{-i}R)$, $i = 1, 2, \dots$. Используя неравенства (4), (6) и неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} |u_{B_{i+1}} - u_{B_i}| &\leq \frac{\mu(B_i)}{\mu(B_{i+1})} \left[\int_{B_i} |u - u_{B_i}|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c[2^{-i}R]^\alpha \left[\int_{B_i} g^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \leq c[2^{-i}R]^{(\alpha p - \gamma + t)/p}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве постоянная c зависит от шара $B(x_0, n)$, но это не существенно. Используя эту оценку, получаем для $k > j$

$$|u_{B_k} - u_{B_j}| \leq \sum_{i=j}^{k-1} |u_{B_{i+1}} - u_{B_i}| \leq c \sum_{i=j}^{k-1} [2^{-i}R]^{(\alpha p - \gamma + t)/p},$$

т.е. $\{u_{B_i}\}_{i=1}^\infty$ – последовательность Коши, если $t > \gamma - \alpha p$.

С другой стороны, все $u_i \geq 1$ μ -почти всюду в окрестности множества E . Обозначим

$$G_i(x) = \{y \in X : u_i(y) \geq 1 \text{ в окрестности } x\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Множества $G_i(x)$ можно выбрать открытыми; тогда $\bigcap_{i=1}^k G_i(x)$ – открытое множество; следовательно, существует номер i_k такой, что μ -почти каждая точка шара B_{i_k} принадлежит множеству $\bigcap_{i=1}^k G_i(x) \subset \{x \in X : u(x) \geq k\}$ и поэтому $\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} u_{B_i} = \infty$, хотя $\{u_{B_i}\}_{i=1}^\infty$ – последовательность Коши. Это противоречие показывает, что

$$E \cap B(x_0, n) \subset \left\{ x \in B(x_0, n) : \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} r^{-t} \int_{B(x,r)} g^p d\mu = \infty \right\}.$$

Отсюда

$$E \subset \left\{ x \in X : \lim_{r \rightarrow 0} r^{-t} \int_{B(x,r)} g^p d\mu = \infty \right\}.$$

Зафиксируем теперь $\lambda > 0$ и обозначим

$$E_\lambda = \left\{ x \in X : \lim_{r \rightarrow 0} r^{-t} \int_{B(x,r)} g^p d\mu > \lambda \right\}.$$

Так как $E \subset E_\lambda$, для любой точки $x \in E$ существует такое число $r(x) \in (0, 1)$, что

$$[6r(x)]^{-t} \int_{B(x,6r(x))} g^p d\mu > \lambda.$$

Из покрытия $E \subset \bigcup_{x \in E} B(x, r(x))$ по лемме 4 выделим подпокрытие $\{B(x_i, r(x_i))\}_{i=1}^\infty$ такое, что

$$E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, 6r(x_i)), \quad \sum_{i=1}^\infty \chi_{B(x_i, 6r(x_i))} \leq c.$$

Оценим размерность Хаусдорфа множества E :

$$\begin{aligned} H^t(E) &\leq \sum_{i=1}^\infty [6r(x_i)]^t \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^\infty \int_{B(x_i, 6r(x_i))} g^p d\mu \\ &\leq \frac{c}{\lambda} \int_{\bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, 6r(x_i))} g^p d\mu \leq \frac{c}{\lambda} \int_X g^p d\mu. \end{aligned}$$

Это верно для любого $\lambda > 0$; значит, $H^t(E) = 0$. Теорема доказана.

Докажем теперь результат, в некотором смысле обратный утверждению теоремы 2. Для этого нам понадобятся более жесткие условия на меру. Говорят, что μ — *регулярная* мера размерности $\gamma > 0$, если существует постоянная $c \geq 1$ такая, что

$$c^{-1}r^\gamma \leq \mu(B(x, r)) \leq cr^\gamma \quad (7)$$

для каждого $x \in X$ и $0 < r \leq \text{diam}(X)$. Если μ удовлетворяет условию (7), то она удовлетворяет условию удвоения (1) с тем же показателем. Более того, X имеет размерность Хаусдорфа γ и существует константа $c > 0$ такая, что $c^{-1}H^\gamma(E) \leq \mu(E) \leq cH^\gamma(E)$ для любого $E \subset X$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнено условие (7) и задана функция

$$h(t) = \begin{cases} t^{\gamma-\alpha p}, & \gamma > \alpha p, \\ \left[\lg \frac{1}{t} \right]^{1-p}, & \gamma = \alpha p. \end{cases}$$

Тогда для любого множества $E \subset X$ справедливо неравенство

$$\text{Cap}_{\alpha,p}(E) \leq cH^h(E).$$

Это утверждение следует из леммы 1 и условия регулярности (7) с помощью предельного перехода. При $\alpha = 1$ утверждение теоремы 3 доказано в [9].

3. Точки Лебега. Здесь мы оценим массивность множества Лебега для классов $W_\alpha^p(X)$ в терминах хаусдорфовой размерности. Случай $X = \mathbb{R}^n$ см., например, в [15; глава 6.2]. Соответствующий результат на пространствах однородного типа был получен в [11] для $\alpha = 1$. В приведенном там доказательстве имеется неточность, которую удалось исправить. Она состояла в следующем: при доказательстве того, что x является точкой Лебега, использовалась оценка

$$|u(x) - u_{B(x,r)}| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |u_{B(x,2^{-(j+1)}r)} - u_{B(x,2^{-j}r)}|,$$

справедливая только в точке Лебега (см. неравенства (4.2) и (3.8), в теореме 4.4 [11]).

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение. Для $0 \leq \beta < \infty$ и $R > 0$ введем усеченную дробную максимальную функцию

$$\mathcal{M}_{\beta,R}g(x) = \sup_{0 < r < R} r^\beta \int_{B(x,r)} |g| d\mu.$$

Если $g \in L^1(X)$ и $0 < \beta < \gamma$, то (см. теорему 3.3 в [17], лемму 3.2 в [18])

$$H_\infty^{\gamma-\beta}(\{x \in B(x,R) : \mathcal{M}_{\beta,R}g(x) > \lambda\}) \leq \frac{c}{\lambda} \int_X |g| d\mu. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $g \in D^\alpha(u) \cap L^p(X)$. Зафиксируем точку $x \in X$ и рассмотрим разность интегральных средних $|u_{B(x,r)} - u_{B(x,R)}|$. Для любых $0 < r < R$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{-(n+1)}r < R \leq 2^{-n}r$. Воспользуемся неравенством треугольника

$$|u_{B(x,r)} - u_{B(x,R)}| \leq |u_{B(x,r)} - u_{B(x,2^{-(n+1)}r)}| + |u_{B(x,2^{-(n+1)}r)} - u_{B(x,R)}|.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и оценим каждое слагаемое с помощью неравенства Пуанкаре (3):

$$\begin{aligned} |u_{B(x,r)} - u_{B(x,2^{-(n+1)}r)}| &\leq \sum_{j=2}^{n+2} |u_{B(x,2^{2-j}r)} - u_{B(x,2^{1-j}r)}| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B(x,2^{1-j}r)} |u - u_{B(x,2^{2-j}r)}| d\mu \\ &\leq c \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B(x,2^{2-j}r)} |u - u_{B(x,2^{2-j}r)}| d\mu \\ &\leq c \sum_{j=1}^{\infty} 2^{(2-j)\alpha} r^\alpha \int_{B(x,2^{2-j}r)} g d\mu \\ &\leq c \sum_{j=1}^{\infty} 2^{(2-j)\alpha} r^\varepsilon \left[r^{(\alpha-\varepsilon)p} \int_{B(x,2^{2-j}r)} g^p d\mu \right]^{1/p} \\ &\leq cr^\varepsilon [\mathcal{M}_{(\alpha-\varepsilon)p,1} g^p(x)]^{1/p}. \end{aligned}$$

Так как $R/(2^{-(n+1)}r) < 2^{-n}r/(2^{-(n+1)}r) = 2$, для второго слагаемого выполнено

$$\begin{aligned} |u_{B(x, 2^{-(n+1)}r)} - u_{B(x, R)}| &\leq \int_{B(x, 2^{-(n+1)}r)} |u - u_{B(x, R)}| d\mu \leq c2^\gamma \int_{B(x, R)} |u - u_{B(x, R)}| d\mu \\ &\leq cR^\alpha \int_{B(x, R)} g d\mu \leq cR^\varepsilon \left[R^{(\alpha-\varepsilon)p} \int_{B(x, R)} g^p d\mu \right]^{1/p} \\ &\leq cR^\varepsilon [\mathcal{M}_{(\alpha-\varepsilon)p, 1} g^p(x)]^{1/p}. \end{aligned}$$

Итак, $|u_{B(x, r)} - u_{B(x, R)}| \leq c[R^\varepsilon + r^\varepsilon][\mathcal{M}_{(\alpha-\varepsilon)p, 1} g^p(x)]^{1/p}$. Очевидно, что правая часть стремится к нулю $R \rightarrow +0$, если $\mathcal{M}_{(\alpha-\varepsilon)p, 1} g^p(x) < \infty$. Это означает, что в точке x существует предел

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_{B(x, r)} u d\mu = u^*(x).$$

Множество точек, в которых такой предел не существует, содержится во множестве

$$E_1 = \{x \in X : \mathcal{M}_{(\alpha-\varepsilon)p, 1} g^p(x) = \infty\}.$$

Вычислим размерность Хаусдорфа этого множества. Для этого зафиксируем $y \in X$ и $n \in \mathbb{N}$, а затем воспользуемся (8):

$$\begin{aligned} H_\infty^{\gamma-(\alpha-\varepsilon)p}(E_1 \cap B(y, n)) &\leq H_\infty^{\gamma-(\alpha-\varepsilon)p}(\{x \in B(y, n) : \mathcal{M}_{(\alpha-\varepsilon)p, 1} g^p(x) > \lambda\}) \\ &\leq \frac{c}{\lambda} \int_X g^p d\mu. \end{aligned}$$

Последнее неравенство верно для любого $\lambda > 0$; значит, $H_\infty^{\gamma-(\alpha-\varepsilon)p}(E_1 \cap B(y, n)) = 0$ для любого шара $B(y, n)$. Так как $E_1 = \bigcup_{n=1}^\infty (B(y, n) \cap E_1)$, то $\dim_H(E_1) \leq \gamma - \alpha p$.

Для доказательства второго утверждения теоремы введем обозначение

$$E_2 = \left\{ x \in X : \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} r^{\alpha p} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} \mathcal{S}_\alpha u^p d\mu > 0 \right\}.$$

По лемме 3 в $X \setminus E_2$

$$\left(\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x, r)} |u - u_{B(x, r)}|^q d\mu \right)^{1/q} \leq \lim_{r \rightarrow 0} r^\alpha \left(\int_{B(x, cr)} (\mathcal{S}_\alpha u)^p d\mu \right)^{1/p} = 0.$$

Рассмотрим теперь множество $E = E_1 \cup E_2$. Для любого $x \in X \setminus E$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{B(x, r)} |u - u^*(x)|^q d\mu \right)^{1/q} \\ \leq \lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{B(x, r)} |u - u_{B(x, r)}|^q d\mu \right)^{1/q} + \lim_{r \rightarrow 0} |u_{B(x, r)} - u^*(x)| = 0. \end{aligned}$$

По лемме 1 $\text{Cap}_{\alpha, p}(E_2) = 0$. Тогда в силу теоремы 2 $\dim_H(E_2) \leq \gamma - \alpha p$. Это же неравенство верно и для размерности Хаусдорфа множества E : $\dim_H(E) \leq \gamma - \alpha p$. Теорема доказана.

Автор благодарит В. Г. Кротова, под руководством которого выполнена эта работа, за постоянное внимание.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. R. Coifman, G. Weiss, “Analyse harmonique non-commutative sur certain espaces homogenés”, *Lecture Notes in Math.*, v. 242, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971.
- [2] R. R. Coifman, G. Weiss, “Extensions of Hardy spaces and their use in analysis”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83**:4 (1977), 569–645.
- [3] P. Hajlasz, “Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces”, *Potential Anal.*, **5**:4 (1996), 403–415.
- [4] P. Hajlasz, P. Koskela, *Sobolev met Poincaré*, Mem. Amer. Math. Soc., **145**, 688, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [5] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [6] J. Hu, “A note on Hajlasz–Sobolev spaces on fractals”, *J. Math. Anal. Appl.*, **280**:1 (2003), 91–101.
- [7] D. Yang, “New haracterization of Hajlasz–Sobolev spaces on metric spaces”, *Sci. China Ser. A*, **46**:5 (2003), 675–689.
- [8] И. А. Иванишко, “Обобщенные классы Соболева на метрических пространствах с мерой”, *Матем. заметки*, **77**:6 (2005), 937–941.
- [9] J. Kinnunen, O. Martio, “The Sobolev capacity on metric spaces”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **21**:2 (1996), 367–382.
- [10] J. Kinnunen, V. Latvala, “Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **18**:3 (2002), 685–700.
- [11] P. Hajlasz, J. Kinnunen, “Hölder qasiccontinuity of Sobolev functions on metric spaces”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **14**:3 (1998), 601–622.
- [12] М. А. Прохорович, “Емкости и точки Лебега для дробных классов Хайлаша–Соболева на метрических пространствах с мерой”, *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*, 2006, № 1, 19–23.
- [13] М. А. Прохорович, “Емкости и размерность Хаусдорфа множества точек Лебега для функций из классов Соболева на пространствах однородного типа”, *Современные проблемы теории функций и их приложения*, Тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы, Саратов, 2006, 146–147.
- [14] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **153**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1969.
- [15] D. R. Adams, L. I. Hedberg, “Function spaces and potential theory”, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, **314**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1996.
- [16] И. А. Иванишко, В. Г. Кротов, “Обобщенное неравенство Пуанкаре–Соболева на метрических пространствах с мерой”, *Тр. Ин-та матем. НАН Беларусі*, **14**:1 (2006).
- [17] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton Mathematical Series, **43**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [18] T. Bagby, W. P. Ziemer, “Pointwise differentiability and absolute continuity”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **191** (1974), 129–148.

М. А. Прохорович

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

E-mail: prohorovich@mail.ru

Поступило

17.05.2006

Исправленный вариант

06.12.2006