Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Рацеев, Рост многообразий алгебр Лейбница
с нильпотентным коммутантом, *Матем. заметки*, 2007,
том 82, выпуск 1, 108–117

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3758>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:24:35

Рост многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом

С. М. Рацеев

В данной работе доказывается, что экспоненты многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом существуют и являются целыми числами.

Библиография: 9 названий.

Алгебры Лейбница определяются тождеством

$$(xy)z = (xz)y + x(yz) \quad (1)$$

и являются обобщениями алгебр Ли. Если в алгебре Лейбница выполняется тождество $x^2 = 0$, то она является алгеброй Ли. Одно из первых упоминаний алгебр Лейбница встречается в работе Блоха [1]. Алгебры Лейбница начали активно изучаться в 90-х годах.

В данной работе, если это специально не оговорено, основное поле K является полем нулевой характеристики. В элементах скобки опускаются при их левонормированной расстановке, т.е. $a_1 a_2 \dots a_n = (\dots (a_1 a_2) \dots a_n)$. Все необходимые определения можно найти в монографии [2].

Пусть V – многообразие алгебр Лейбница, $L(X) = K(X, V)$ – относительно свободная алгебра данного многообразия, где $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ – счетное множество свободных образующих. С помощью тождества (1) любой элемент из $L(X)$ можно представить в виде линейной комбинации полиномов из этой же алгебры, имеющих левонормированный вид. Известно, что в случае поля нулевой характеристики вся информация о многообразии V содержится в его полилинейных компонентах $P_n = P_n(V)$, $n = 1, 2, \dots$, где $P_n(V)$ – это линейное подпространство в пространстве $L(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \dots, x_n$. Важную роль при изучении V играет последовательность $c_n(V) = \dim P_n(V)$, $n = 1, 2, \dots$, асимптотическое поведение которой называют *ростом* многообразия V . Например, если $c_n(V) \leq a^n$ и $c_n(V)$ не ограничена никаким полиномом, то V называют многообразием экспоненциального роста.

Полилинейную компоненту P_n степени n можно рассматривать как модуль над групповым кольцом KS_n , где S_n – симметрическая группа порядка n , со следующим действием перестановки σ : $\sigma \cdot (x_{i_1} \dots x_{i_n}) = x_{\sigma(i_1)} \dots x_{\sigma(i_n)}$. Хорошо известно, что этот S_n -модуль является вполне приводимым. Число слагаемых в разложении полилинейной части степени n многообразия V на неприводимые подмодули называется *кодлинной* многообразия ($l_n(V)$). Неприводимые представления S_n можно описывать

на языке разбиений и диаграмм Юнга. Последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ называют *разбиением* числа n и обозначают $\lambda \vdash n$, если $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$ и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$. По каждому разбиению λ строится диаграмма Юнга, которая представляет собой таблицу из k строк, а i -я строка состоит из λ_i клеток. Известно, что каждой диаграмме Юнга соответствует неприводимый S_n -модуль из разложения полилинейной части, и два модуля изоморфны тогда и только тогда, когда они соответствуют одной диаграмме.

Под понятием “размерность диаграммы d ”, имеющей степень n , понимается размерность неприводимого S_n -модуля, соответствующего данной диаграмме, которая определяется следующей формулой:

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in d} h_{ij}(d)},$$

где $h_{ij}(d) = (\lambda_i - i) + (\mu_j - j) + 1$, λ_i – длина i -й строки, μ_j – длина j -го столбца диаграммы d .

Следуя монографии [2], пусть τd – некоторая таблица Юнга степени n , $R_{\tau d}$ и $C_{\tau d}$ – подгруппы симметрической группы S_n , оставляющие инвариантными символы соответственно строк и столбцов таблицы τd , $e_{\tau d}$ – элемент групповой алгебры, пропорциональный идемпотенту, построенный по таблице τd . Элемент

$$f_{\tau d} = e_{\tau d} \cdot (x_1 \dots x_n) = \sum_{\pi \in R_{\tau d}, \sigma \in C_{\tau d}} (-1)^\sigma x_{\pi\sigma(1)} \dots x_{\pi\sigma(n)}$$

порождает неприводимый KS_n -модуль. В элементе $f_{\tau d}$ отождествим между собой переменные, индексы которых принадлежат одним и тем же строкам таблицы τd и поделим на порядок группы $R_{\tau d}$. В результате получим полином $g_{\tau d}$, зависящий от m переменных, где m – число строк диаграммы d . Заметим, что тождества $f_{\tau d} = 0$ и $g_{\tau d} = 0$ являются эквивалентными между собой.

Обозначим через χ_λ характер неприводимого представления симметрической группы, соответствующий разбиению λ числа n . Тогда в силу вполне приводимости модуля $P_n(V)$, для многообразия V имеет место разложение $\chi_n(V) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$, где m_λ – степени неприводимых представлений, соответствующих разбиению λ числа n .

Для более точного изучения экспоненциального роста произвольного многообразия V вводятся понятия нижней и верхней экспоненты:

$$\underline{\text{EXP}}(V) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(V)}, \quad \overline{\text{EXP}}(V) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(V)}.$$

Если эти два числовые значения совпадают, то мы говорим $\text{EXP}(V)$. В ассоциативном случае Зайцев и Джамбруно [3] доказали целочисленность экспоненты произвольного многообразия. В случае многообразий алгебр Ли построен пример разрешимого многообразия (см. [4]), верхняя и нижняя экспоненты которого находятся в интервале $(3,4)$, т.е. экспоненты данного многообразия либо не существует, либо она является дробной. В работе [5] Мищенко показал, что не существует многообразий алгебр Ли с экспонентой, принадлежащей интервалу $(1,2)$, и приведены примеры многообразий экспоненциального роста с экспонентой 2. Пусть $N_s A$ – многообразие алгебр Ли, определяемое тождеством

$$(x_1 x_2) \dots (x_{2s+1} x_{2s+2}) = 0. \quad (2)$$

В работе [6] с использованием техники диаграмм Юнга показано, что экспоненты подмногообразий многообразия $N_s A$ являются целочисленными. Позже Петроградский доказал, что этот результат верен в случае основного поля произвольной характеристики (см. [7]).

Введем некоторые обозначения. Пусть $f(n)$ и $g(n)$ – функции натурального аргумента. Запись $f(n) \leq^a g(n)$ означает существование такого N , что для любого $n \geq N$ выполняется неравенство $f(n) \leq g(n)$. Элементы, содержащие кососимметрический набор из n переменных, будем записывать без знака суммирования, пометая переменные этого набора чертой, волной или двумя чертами сверху. Например,

$$y_1 \bar{x}_1 y_2 \bar{x}_2 \dots y_n \bar{x}_n = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma y_1 x_{\sigma(1)} y_2 x_{\sigma(2)} \dots y_n x_{\sigma(n)}.$$

Определим многообразие алгебр Лейбница $\widetilde{N_s A}$ тождеством (2).

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ и $Y = \{y_{i_1}, \dots, y_{i_n}\} \subset X$. Через $P_n(Y)$ обозначим пространство полилинейных элементов от переменных Y степени n . Предположим, что для подпространства $U \subset L(X)$ размерность $U \cap P_n(Y)$ не зависит от множества Y , а зависит только от n . В этом случае в качестве Y берем множество $\{x_1, \dots, x_n\}$ и обозначаем

$$P_n(U) = U \cap P_n(Y), \quad c_n(U) = \dim_K P_n(U).$$

Если подпространство U инвариантно относительно действия симметрической группы S_n на $Y = \{x_1, \dots, x_n\}$, то $P_n(U)$ будет также S_n -модулем. Мы будем иметь дело со следующими векторными пространствами:

$$R_{c,n} = P_n((L^2)^c / (L^2)^{c+1}), \quad c = 1, 2, \dots$$

Заметим, что $P_n(\widetilde{N_s A}) \cong \bigoplus_{c=1}^s R_{c,n}$. Данный изоморфизм имеет место в силу того, что $L / (L^2)^{s+1} \cong K(X, \widetilde{N_s A})$.

ЛЕММА 1. Если в диаграмме Юнга d будет больше, чем $4s^2$ клеток вне первых s строк, то элемент, соответствующий такой диаграмме, будет равен нулю в многообразии $\widetilde{N_s A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что если диаграмма Юнга d содержит больше чем $4c^2$ клеток вне первых c строк, то соответствующий неприводимый S_n -модуль не входит в $R_{c,n}$. Более точно, клетки диаграммы не должны выходить за квадрат $2c \times 2c$, расположенный вне первых c строк.

Пространство $R_{c,n}$ представимо в виде линейной оболочки следующих элементов:

$$R_{c,n} = \langle (x_{11} \dots x_{1a_1})(x_{21} \dots x_{2a_2}) \dots (x_{c1} \dots x_{ca_c}) \mid a_i \geq 2, i = 1, \dots, c; a_1 + \dots + a_c = n; \{x_{ij}\} = \{x_1, \dots, x_n\} \rangle_K.$$

Заметим, что в элементах пространства $R_{c,n}$ можно менять местами переменные в любой i -й скобке, $i = 1, \dots, c$, начиная с 3-й позиции, поскольку, меняя местами две рядом стоящие переменные, мы дополнительно получаем элемент из $(L^2)^{c+1}$. Данное свойство назовем (*). Это свойство следует из следующего следствия тождества (1), выполняющегося в произвольной алгебре Лейбница:

$$xyz_1 \dots z_m = \sum_{t=0}^m \sum_{\substack{i_1, \dots, i_t \in \{1, \dots, m\} \\ i_1 < \dots < i_t, j_1 < \dots < j_{m-t}}} (xz_{i_1} \dots z_{i_t})(yz_{j_1} \dots z_{j_{m-t}}).$$

Пространство $R_{c,n}$ можно разложить в прямую сумму следующих подпространств, которые также являются S_n -модулями:

$$R_{c,n} = \bigoplus_{a_1+\dots+a_c=n, a_i \geq 2} \langle \sigma \cdot f_{a_1\dots a_c} \mid \sigma \in S_n \rangle_K, \quad (3)$$

где $f_{a_1\dots a_c} = (x_1 \dots x_{a_1})(x_{a_1+1} \dots x_{a_1+a_2}) \dots (x_{a_1+a_2+\dots+a_{c-1}+1} \dots x_n)$.

Пусть диаграмма Юнга d содержит более чем $4c^2$ клеток вне первых c строк. Элемент $e_{\tau d} \cdot f_{a_1\dots a_c}$ представим в виде суммы слагаемых, каждое из которых содержит t кососимметрических наборов, где t – длина первой строки, и i -й набор содержит μ_i переменных, $i = 1, \dots, t$, где μ_i – длина i -го столбца диаграммы d (см. [8]). Если в диаграмме d более чем $3c$ клеток в первом столбце, то в одну скобку элемента $f_{a_1\dots a_c}$ попадут не менее четырех переменных из одного кососимметрического набора. Но по свойству (*) этот элемент равен нулю в $R_{c,n}$. Если в диаграмме d более чем $2c$ клеток в $(c+1)$ -й строке, то в одну скобку элемента $f_{a_1\dots a_c}$ попадут не менее трех пар кососимметрических переменных, а это, опять, нуль в $R_{c,n}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Последовательность координат многообразия $\widetilde{N_s A}$ ограничена полиномом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем оценивать количество неприводимых S_n -модулей в разложении пространств $R_{c,n}$, где $1 \leq c \leq s$, при фиксированном c .

Число прямых слагаемых в разложении (3) не превосходит числа $(n+1)^c$. Фиксируем $a_1, \dots, a_c$. Пусть τd – некоторая таблица Юнга. Отождествим в элементе $e_{\tau d} \cdot f_{a_1\dots a_c}(x_1, \dots, x_n)$ переменные, соответствующие одним и тем же строкам таблицы τd . После такого отождествления данный элемент можно представить в виде линейной комбинации элементов $g_{a_1\dots a_c}(y_1, \dots, y_m)$, каждый из которых зависит от m переменных, где m – число строк диаграммы d , и содержит k наборов кососимметричных переменных, расположенных на определенных местах, где k – число столбцов диаграммы d , причем i -й набор состоит из такого количества переменных, сколько клеток в i -м столбце диаграммы d (см. [8]). Заметим, что $m \leq 3c$ (лемма 1). Оценив количество ненулевых элементов вида $g_{a_1\dots a_c}(y_1, \dots, y_m)$, соответствующих различным таблицам Юнга, построенных по различным диаграммам Юнга при фиксированном n , мы, тем самым, оценим количество неприводимых модулей из разложения пространства $\langle \sigma \cdot f_{a_1\dots a_c} \mid \sigma \in S_n \rangle_K$.

Сначала в элементе $f_{a_1\dots a_c}$ заполним скобки переменными $y_1, \dots, y_{3c}$, не ограничивая количество экземпляров каждой переменной y_i , $i = 1, \dots, 3c$. Подсчитаем сколькими способами можно заполнить данными переменными каждую из c скобок. Пусть a_j – длина произвольной скобки, $2 \leq a_j \leq n - 2(c-1)$. Первые два места заполняются $(3c)^2$ способами. Для заполнения оставшихся $a_j - 2$ мест учтем свойство (*), т.е. порядок следования переменных уже не важен. Поэтому число различных заполнений оставшиеся $a_j - 2$ мест выглядит следующим образом: $C_{a_j-2+3c-1}^{a_j-2} \leq C_{n-2c+3c-1}^{m-2c} = C_{n+c-1}^{m-2c}$, где C_n^k – число сочетаний из n по k . Общее число заполнений всех c скобок переменными $y_1, \dots, y_{3c}$ не превосходит числа $(9c^2 C_{n+c-1}^{m-2c})^c$.

Далее, пусть $\widetilde{f}_{a_1\dots a_c}(x_1, \dots, x_m)$ – некоторый фиксированный элемент степени n , полученный после заполнения всех c скобок переменными $y_1, \dots, y_m$, $m \leq 3c$. Будем

альтернировать переменные в этом элементе. Кососимметрических наборов должно быть не более n штук. Заметим, что любой кососимметрический набор может содержать только попарно различные переменные, иначе элемент равен 0. Число различных возможностей, при которых переменные, стоящие на первых двух местах в каждой скобке элемента $\tilde{f}_{a_1 \dots a_c}(x_1, \dots, x_m)$, принадлежат каким-либо наборам, не превосходит числа n^{2c} . Теперь будем учитывать только оставшиеся места. По свойству (*) кососимметрический набор может иметь не более одной переменной в каждой из скобок и переменные этого набора должны быть различными. Поэтому имеется не более

$$\sum_{i=0}^c C_c^i m(m-1) \cdots (m-i+1) \leq m! 2^c \leq (3c)! 2^c$$

реализаций каждого кососимметрического набора. Так как есть не более n кососимметрических наборов, то всего имеется не более $C_{(3c)!}^n 2^{c+n-1}$ возможностей их распределения.

Таким образом, последовательность координат многообразия $\widetilde{N_s A}$ ограничена некоторым полиномом. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Размерность диаграммы d , соответствующей разбиению $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ числа n , имеет вид*

$$d_\lambda = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_k!} \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{k-i} \frac{\lambda_i + j - \lambda_{i+j}}{\lambda_i + j}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя индукцию по k покажем, что произведение длин крюков диаграммы d имеет следующий вид:

$$\prod_{(i,j) \in d} h_{ij}(d) = \lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_k! \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{k-i} \frac{\lambda_i + j}{\lambda_i + j - \lambda_{i+j}}.$$

Пусть $k = 1$. Тогда $\prod_{j=1}^{\lambda_1} h_{1j}(d) = \lambda_1!$. Предположим, что формула имеет место для всех диаграмм, имеющих число строк $\leq k-1$. Пусть диаграмма d имеет $k \geq 2$ строк и i -я строка имеет длину λ_i , $i = 1, \dots, k$. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то определим число $m = 0$, иначе $m = \max\{i \mid \lambda_i - \lambda_k > 0, i = 1, \dots, k-1\}$. Тогда

$$\prod_{(i,j) \in d} h_{ij}(d) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{\lambda_i} h_{ij}(d) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{\lambda_k} h_{ij}(d) \right) \left(\prod_{i=1}^m \prod_{j=\lambda_k+1}^{\lambda_i} h_{ij}(d) \right) \left(\prod_{j=1}^{\lambda_k} h_{kj}(d) \right).$$

Произведение в третьей скобке равно $\lambda_k!$. Обозначим произведения в первой и второй скобках через P и Q соответственно.

Если $m > 0$, то

$$Q = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{\lambda_i - \lambda_k} [(\lambda_i - i) + (\mu_{j+\lambda_k} - j - \lambda_k) + 1] = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{\lambda_i - \lambda_k} [(\lambda_i - \lambda_k - i) + (\tilde{\mu}_j - j) + 1],$$

где $\tilde{\mu}_j = \mu_{j+\lambda_k}$. Поэтому Q есть произведение длин крюков диаграммы, соответствующей разбиению $(\lambda_1 - \lambda_k, \dots, \lambda_m - \lambda_k)$. Используя предположение индукции,

ВЫВОДИМ, ЧТО

$$\begin{aligned} Q &= (\lambda_1 - \lambda_k)! \cdots (\lambda_m - \lambda_k)! \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1}^{m-i} \frac{\lambda_i - \lambda_k + j}{\lambda_i - \lambda_k + j - (\lambda_{i+j} - \lambda_k)} \\ &= (\lambda_1 - \lambda_k)! \cdots (\lambda_{k-1} - \lambda_k)! \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{k-i} \frac{\lambda_i - \lambda_k + j}{\lambda_i + j - \lambda_{i+j}}. \end{aligned}$$

Произведение $PQ\lambda_k!$ даст нам требуемый вид.

Если $m = 0$, то $\lambda_i = \lambda_k$, $i = 1, \dots, k$. Следовательно,

$$\begin{aligned} P &= \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{\lambda_i} [(\lambda_i - i) + (k - j) + 1] \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} \left[\lambda_i! \prod_{j=1}^{k-i} \frac{\lambda_i + j}{j} \right] = \lambda_1! \cdots \lambda_{k-1}! \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{k-i} \frac{\lambda_i + j}{\lambda_i + j - \lambda_{i+j}}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $p \geq 1$, $C \geq 0$ – некоторые целые константы. Тогда существуют такие α и β , что для всех достаточно больших n будет выполняться следующее неравенство для размерностей диаграмм Юнга степени n , содержащих прямоугольник $p \times r_n$, где $n - pr_n \leq C$:

$$n^\beta p^n \leq d_\lambda \leq n^\alpha p^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ – некоторое разбиение числа n . Рассмотрим формулу (4). Так как $\lambda_{i+j} \leq \lambda_i \leq n$, то

$$\frac{\lambda_i + j - \lambda_{i+j}}{\lambda_i + j} = 1 - \frac{\lambda_{i+j}}{\lambda_i + j} \geq 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_i + j} \geq 1 - \frac{n}{n+1}.$$

Поэтому будет выполняться следующее неравенство для размерности диаграммы, соответствующей разбиению λ :

$$\frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_k!} \left(\frac{1}{n+1} \right)^{(k-1)k/2} \leq d_\lambda \leq \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_k!}. \quad (5)$$

Разбиение λ числа n , соответствующего условию, можно записать как

$$\lambda = (r_n + a_1, \dots, r_n + a_p, b_1, \dots, b_m),$$

где $n - pr_n = a_1 + \dots + a_p + b_1 + \dots + b_m \leq C$ и $m \leq C$. Исходя из неравенства (5), имеем следующую оценку снизу для размерностей диаграмм Юнга, соответствующих данному разбиению:

$$\begin{aligned} (n+1)^{(p+C-1)(p+C)/2} d_\lambda &\geq \frac{n!}{(r_n + a_1)! \cdots (r_n + a_p)! b_1! \cdots b_m!} \\ &\geq \frac{n!}{[(r_n + a_1 + \dots + a_p + b_1 + \dots + b_m)!]^p} \end{aligned}$$

$$\geq \frac{n!}{[(r_n + C)!]^p} \geq \frac{n!}{[(n/p + C)!]^p}.$$

Применяя к последнему выражению формулу Стирлинга, получим, что существует такое β , не зависящее от n , что $d_\lambda \geq n^\beta p^n$ для всех n , начиная с некоторого номера.

Верхняя оценка для d_λ получается аналогичным образом:

$$d_\lambda \leq \frac{n!}{(r_n + a_1)! \cdots (r_n + a_p)! b_1! \cdots b_m!} \leq \frac{n!}{[(r_n)!]^p} \leq \frac{n!}{[(n/p - C/p)!]^p}.$$

Формула Стирлинга, примененная к последнему выражению, показывает существование такого α , что выполняется неравенство $d_\lambda \leq n^\alpha p^n$ для всех достаточно больших n . Предложение доказано.

ЛЕММА 3. Для последовательности размерностей $c_n(\widetilde{N_s A})$ выполняются следующие неравенства:

$$n^\beta s^n \leq c_n(\widetilde{N_s A}) \leq A n^\alpha s^n$$

для некоторых A , α и β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [9] показано, что для многообразия алгебр Ли $N_s A$ выполняется следующая оценка размерности полилинейной части $P_n(N_s A)$:

$$c_n(N_s A) \approx s^{n-s-1} n^s,$$

где запись $f(n) \approx g(n)$ означает $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 1$. Поскольку $N_s A$ является подмногообразием многообразия $\widetilde{N_s A}$, выполняется неравенство $c_n(\widetilde{N_s A}) \geq n^\beta s^n$ для некоторого β и всех n , начиная с некоторого номера. Покажем, что существуют такие A и α , что $c_n(\widetilde{N_s A}) \leq A n^\alpha s^n$ для всех n .

Обозначим через M_1 – множество разбиений $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ числа n , для которых $k \leq s$, а через M_2 – множество разбиений λ числа n , для которых $s+1 \leq k \leq 3s$ и $\lambda_i \leq 2s$ при $s+1 \leq i \leq 3s$. Тогда с учетом леммы 1 размерность полилинейной части $P_n(N_s A)$ будет иметь следующий вид:

$$c_n(\widetilde{N_s A}) = \sum_{\lambda \in M_1} m_\lambda(\widetilde{N_s A}) d_\lambda + \sum_{\lambda \in M_2} m_\lambda(\widetilde{N_s A}) d_\lambda \leq l_n(\widetilde{N_s A}) \left(\sum_{\lambda \in M_1} d_\lambda + \sum_{\lambda \in M_2} d_\lambda \right).$$

Используя неравенство (5), имеем

$$\sum_{\lambda \in M_1} d_\lambda \leq \sum_{\lambda \in M_1} \frac{n!}{\lambda_1! \cdots \lambda_k!} \leq \sum_{k_1 + \cdots + k_s = n, k_i \geq 0} \frac{n!}{k_1! \cdots k_s!} = s^n.$$

Далее, пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_{s+t})$. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$d_\lambda \leq \frac{n!}{\lambda_1! \cdots \lambda_s! \lambda_{s+1}! \cdots \lambda_{s+t}!} \leq \frac{n! (\lambda_1 + 1)(\lambda_1 + 2) \cdots (\lambda_1 + \lambda_{s+1} + \cdots + \lambda_{s+t})}{(\lambda_1 + \lambda_{s+1} + \cdots + \lambda_{s+t})! \lambda_2! \cdots \lambda_s!}.$$

Так как $\sum \lambda_i = n$, $t \leq 2s$ и $\lambda_{s+j} \leq 2s$ при $1 \leq j \leq 2s$, то

$$d_\lambda \leq \frac{n! n^{4s^2}}{(\lambda_1 + \lambda_{s+1} + \cdots + \lambda_{s+t})! \lambda_2! \cdots \lambda_s!}.$$

Заметим также, что разбиение $(\lambda_1 + \lambda_{s+1} + \dots + \lambda_{s+t}, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \in M_1$. Зафиксируем значения $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_{s+t}$ для некоторого $1 \leq t \leq 2s$. Тогда

$$\sum_{\substack{\lambda \in M_2 \\ \lambda = (\dots, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_{s+t})}} d_\lambda \leq n^{4s^2} \sum_{k_1 + \dots + k_s = n, k_i \geq 0} \frac{n!}{k_1! \dots k_s!} = n^{4s^2} s^n.$$

С учетом того, что количество различных значений $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_{s+t}$, $1 \leq t \leq 2s$, разбиения $\lambda \in M_2$ строго меньше, чем $(2s+1)^{2s}$, то

$$\sum_{\lambda \in M_2} d_\lambda < (2s+1)^{2s} n^{4s^2} s^n.$$

Поскольку кодлина многообразия $\widetilde{N_s A}$ является полиномиальной (лемма 2), существуют такие A и α , что $c_n(\widetilde{N_s A}) \leq A n^\alpha s^n$. Лемма доказана.

Для произвольного многообразия $V \subseteq \widetilde{N_s A}$ определим следующие значения:

$$q_n(i, V) = \max\{\lambda_i \mid \lambda \vdash n, m_\lambda(V) > 0\}, \quad q_n(i, V) \geq 0,$$

$$p(V) = \max\{i \mid \varinjlim_{n \rightarrow \infty} q_n(i, V) = +\infty, i = 1, \dots, s\}.$$

Если $\varinjlim_{n \rightarrow \infty} q_n(1, V) < +\infty$, то в качестве $p(V)$ возьмем 0. Из определения $p(V)$ и леммы 1 следует, что ненулевые неприводимые модули многообразия V соответствуют только тем диаграммам Юнга, у которых число клеток вне первых $p(V)$ строк ограничено некоторой константой, зависящей только от V .

В нижеследующей теореме докажем следующее свойство многообразий $V \subseteq \widetilde{N_s A}$, у которых $p(V) \geq 1$: существует такая константа $C \leq 3s-1$, что для любого n найдется диаграмма Юнга степени n , содержащая прямоугольник с боковой стороной $p(V)$, число клеток вне прямоугольника $\leq C$ и эта диаграмма соответствует ненулевому неприводимому S_n -модулю многообразия V .

ТЕОРЕМА 1. Пусть V – подмногообразие многообразия $\widetilde{N_s A}$ и $p(V) \geq 1$. Тогда для любого n будет выполняться следующее неравенство:

$$n - p(V)q_n(p(V), V) \leq 2s + p(V) - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть существует такое число N , что $N - pq_N(p) \geq 2s + p$, где $p = p(V)$, $q_N(p) = q_N(p(V), V)$. Покажем, что в этом случае $\varinjlim_{n \rightarrow \infty} q_n(p, V) < +\infty$ и тем самым приходим к противоречию.

Обозначим $\tilde{L} = K(X, V)$. Тогда

$$P_n(V) \cong \bigoplus_{c=1}^s \tilde{R}_{c,n}, \quad \tilde{R}_{c,n} = P_n((\tilde{L}^2)^c / (\tilde{L}^2)^{c+1}), \quad c = 1, 2, \dots, s.$$

Пусть d – некоторая диаграмма Юнга степени N , содержащая прямоугольник $p \times r$, где $r = q_N(p) + 1$. Заметим, что $N - pr \geq 2s$. Неприводимые S_N -модули, соответствующие диаграмме d , будут нулевыми в многообразии V по свойству значения $q_N(p)$. Покажем, что для всех $c = p, \dots, s$ в $(\tilde{L}^2)^c / (\tilde{L}^2)^{c+1}$ будут выполняться все полилинейные тождества степени N вида

$$(t_1) \dots (t_{i_1} \bar{x}_{11} \tilde{x}_{12} \dots \bar{x}_{1r}) \dots (t_{i_2} \bar{x}_{21} \tilde{x}_{22} \dots \bar{x}_{2r}) \dots (t_{i_p} \bar{x}_{p1} \tilde{x}_{p2} \dots \bar{x}_{pr}) \dots (t_c) = 0, \quad (6)$$

где в левой части стоит произведение c скобок, $\{x_{ij} \mid i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, r\} = \{x_1, x_2, \dots, x_{pr}\}$ и t_j , $j = 1, \dots, c$, зависят от двух и более переменных. Элементы (6) по свойству (*) симметричны относительно $\bar{x}_{i1}, \bar{x}_{i2}, \dots, \bar{x}_{ir}$, $i = 1, \dots, p$. Пусть группа S_{pr} действует на переменные, принадлежащие кососимметрическим наборам. Тогда S_{pr} -модуль, порожденный элементами из (6), есть сумма неприводимых S_{pr} -модулей, соответствующих прямоугольнику $p \times r$. Действительно, если в диаграмме Юнга степени N первая строка $\lambda_1 > r$, то в элементе, соответствующем такой диаграмме, как минимум, две симметрические переменные попадут в один из r кососимметрических наборов, что даст нуль. Если же первый столбец диаграммы степени N $\mu_1 > p$, то в элементе, соответствующем такой диаграмме, попадут, по крайней мере, две кососимметрические переменные в симметрический набор, а это равно нулю. По правилу Литтлвуда–Ричардсона S_N -модуль, порожденный (6), раскладывается в сумму неприводимых S_N -модулей, соответствующих только тем диаграммам, которые содержат прямоугольник $p \times r$, т.е. будет нулевым.

Пусть $n \geq N$, $R = 2s + (r-1)C_s^p + 1$ и d – диаграмма Юнга степени n , содержащая прямоугольник $p \times R$. Для доказательства того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(p, V) < +\infty$ достаточно доказать, что все неприводимые модули из разложения $P_n(V)$, соответствующие диаграмме d , являются нулевыми. В элементе $e_{\tau d} \cdot f_{a_1 \dots a_c}$ присутствуют, среди прочих, R кососимметрических наборов, каждый из которых содержит не менее p переменных. Через первые два места в каждой скобке данного элемента проходят не более $2s$ кососимметрических наборов. При распределении кососимметрических наборов по оставшимся местам учтем свойство (*), т.е. кососимметрический набор может иметь не более одного представителя в скобке. Если число скобок $c < p$, то данный элемент равен нулю, поэтому пусть $c \geq p$. Имеется C_c^p различных способов распределения переменных кососимметрического набора, содержащего p переменных, по c скобкам. Число R подобрано таким образом, что если в одну скобку не попадут две переменные одного кососимметрического набора, то обязательно найдутся p скобок и r кососимметрических наборов таких, что в каждой из p скобок присутствуют хотя бы по одному представителю из всех этих r наборов. По свойству (*) передвинем переменные данных r наборов в конец каждой из скобок, в которых они находятся, и упорядочим их по типу порядка (6). Таким образом, элемент $e_{\tau d} \cdot f_{a_1 \dots a_c}$ равен нулю в $\tilde{R}_{c,n}$ в силу тождеств (6). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $V \subseteq \widetilde{N_s A}$ и $p(V) \geq 1$. Тогда существуют такие константы A , α и β , что для последовательности $c_n(V)$ выполняются неравенства

$$n^\beta p(V)^n \leq^a c_n(V) \leq A n^\alpha p(V)^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку существует некоторая константа для многообразия V , ограничивающая число клеток вне первых $p(V)$ строк у диаграмм Юнга, которым соответствуют ненулевые неприводимые модули (лемма 1), то аналогично доказательству леммы 3 можно показать, что $c_n(C) \leq A n^\alpha p(V)^n$ для некоторых A , α и любого n .

По теореме 1 и предложению 2 следует выполнение неравенства $c_n(V) \geq n^\beta p(V)^n$ для некоторого β и всех n , начиная с некоторого номера. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. Не существует подмногообразий многообразия $\widetilde{N_s A}$, рост которых был бы промежуточным между полиномиальным и экспоненциальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V \subseteq \widetilde{N_s A}$. Если $p(V) \leq 1$, то с учетом леммы 1 рост $c_n(V)$ ограничен некоторым полиномом. Если $p(V) \geq 2$, то рост $c_n(V)$ является экспоненциальным в силу следствия 1. Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 2. Пусть V – подмногообразие многообразия $\widetilde{N_s A}$. Тогда

- 1) $\text{EXP}(V) = \overline{\text{EXP}}(V)$;
- 2) экспонента многообразия V является целым числом:

$$\text{EXP}(V) = p(V) \in \{1, \dots, s\};$$

- 3) если $\text{EXP}(V) = 1$, то последовательность $c_n(V)$ ограничена полиномом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы следует из леммы 3 и следствия 1.

Автор благодарит С. П. Мищенко за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Блох, “Об одном обобщении понятия алгебры Ли”, *Докл. АН СССР*, **165** (1965), 471–473.
- [2] Ю. А. Бахтурин, *Тождества в алгебрах Ли*, Наука, М., 1985.
- [3] A. Giambruno, M. V. Zaicev, “On codimension growth of finitely generated associative algebras”, *Adv. Math.*, **140**:2 (1998), 145–155.
- [4] M. V. Zaitcev, S. P. Mishchenko, “Example of variety of Lie algebras with fractional exponent”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **93**:6 (1999), 977–982.
- [5] С. П. Мищенко, “Нижние оценки размерностей неприводимых представлений симметрических групп и показателей экспоненты многообразий алгебр Ли”, *Матем. сб.*, **187**:1 (1996), 83–94.
- [6] S. P. Mishchenko, V. M. Petrogradsky, “Exponents of varieties of Lie algebras with a nilpotent commutator subalgebra”, *Comm. Algebra*, **27**:5 (1999), 2223–2230.
- [7] В. М. Петроградский, “О численных характеристиках подмногообразий трех многообразий алгебр Ли”, *Матем. сб.*, **190**:6 (1999), 111–126.
- [8] С. П. Мищенко, “О многообразиях полиномиального роста алгебр Ли над полем характеристики нуль”, *Матем. заметки*, **40**:6 (1986), 713–721.
- [9] В. М. Петроградский, “Рост полинильпотентных многообразий алгебр Ли и быстро растущие целые функции”, *Матем. сб.*, **188**:6 (1997), 119–138.

С. М. Рацеев

Ульяновский государственный университет
E-mail: RatseevSM@rambler.ru

Поступило

28.10.2005