Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Рыбаков, Пространство Асплунда: еще один критерий, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 1, 118–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3759>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 06:25:13

Пространство Асплунда: еще один критерий

В. И. Рыбаков

В работе доказывается теорема, устанавливающая условия, при которых банахово пространство X является пространством Асплунда (т.е. его сопряженное есть пространство со свойством RN). Теорема формулируется в терминах существования суперсеквенциально компактного множества в $(B(X^{**}), \omega^*)$, где $B(X^{**})$ – единичный шар второго сопряженного к X , а ω^* – слабая топология на нем. Пример, приводимый в работе, показывает, что, вообще говоря, в теореме от некоторых ограничительных условий отказаться нельзя.

Библиография: 14 названий.

Условимся через X обозначать банахово пространство, а через X^* – его сопряженное (линейные пространства рассматриваем над $\mathbb{R}$). Результат действия элемента $x^* \in X^*$ на $x \in X$ обозначаем $\langle x^*, x \rangle$. Если S – какое-либо множество, а F – какое-либо семейство вещественных функций на S , то $\sigma(S, F)$ – слабая топология на S , при которых все функции из F непрерывны. Желая обратить внимание на то, что норма элемента $z \in X$ вычисляется в пространстве $(X, \|\cdot\|)$, пишем $\|z\|_X$.

Также обозначаем:

- топологию $\sigma(X, X^*)$ на X и на его подмножествах через w (топологию w называют *слабой*);
- топологию $\sigma(X^*, X)$ на X^* и на его подмножествах через w^* ;
- единичный шар в X , т.е. $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ через $B(X)$.

Банахово пространство X имеет *свойство RN* [1; с. 61], если для всякого пространства с конечной полной мерой (S, Σ, μ) и для всякой μ -непрерывной векторной меры конечной вариации $\mathbf{m}: \Sigma \rightarrow X$ существует μ -интегрируемая по Бохнеру функция $f: S \rightarrow X$ такая, что $\mathbf{m}(E) = \int_E f d\mu$, $E \in \Sigma$, где интеграл в смысле Бохнера (в этом случае говорят, что векторная мера $\mathbf{m}$ представима интегралом Бохнера). Отметим, что в работе [2] (на результаты, содержащиеся в которой, будем нередко ссылаться) о пространстве X , имеющем свойство RN , говорят, что X имеет RNP . Банахово пространство X является *пространством Асплунда* тогда и только тогда, когда X^* имеет свойство RN [2; 5.2.12] (определение и иные свойства пространства Асплунда приведены, например, в [2], [3]).

Хаусдорфово пространство T называют *суперсеквенциально компактным* [4; § 4], если замыкание всякого счетного подмножества $A \subset T$ компактно и метризуемо. Пусть K – хаусдорфово компактное пространство; назовем $D \subset K$ *предсуперсеквенциально* (короче: пр.с.секвенциально) *компактным*, если для всякого счетного $A \subset D$ замыкание A (в K) метризуемо (и, конечно, компактно).

ТЕОРЕМА. Пусть X – банахово пространство. Следующие условия эквивалентны:

- 1) для всякого линейного подпространства $Y \subset X$ в $(B(Y^{**}), \sigma(Y^{**}, Y^*))$ существует плотное пр.с.секвенциально компактное подмножество;
- 2) для всякого сепарабельного линейного подпространства $Y \subset X$ в $(B(Y^{**}), \sigma(Y^{**}, Y^*))$ существует плотное пр.с.секвенциально компактное подмножество;
- 3) X является пространством Асплунда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна.

2) $\Rightarrow$ 3) *Первый этап.* Установим на этом этапе доказательства, что X не содержит подпространства, изоморфного l_1 . Допустим противное, и пусть Y – подпространство в X , изоморфное l_1 , а A – плотное пр.с.секвенциально компактное в $(B(Y^{**}), w^*)$ множество. Обозначим через B секвенциальное замыкание A в $(B(Y^{**}), w^*)$, т.е. $F \in B$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{y_n^{**}, n \in \mathbb{N}\} \subset A$, сходящаяся в $(B(Y^{**}), w^*)$ к F . Очевидно, $B \supset A$ и $(B, \sigma(Y^{**}, Y^*))$ суперсеквенциально компактно.

Возьмем произвольную последовательность $\{y_n^{**}, n \in \mathbb{N}\}$ в B ; так как (B, w^*) суперсеквенциально компактно, то из $\{y_n^{**}, n \in \mathbb{N}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{y_{n_k}^{**}, k \in \mathbb{N}\}$, w^* -сходящуюся к элементу из B . В таком случае (так как (Y^{**}, w^*) и (l_∞^*, w^*) изоморфны, ввиду изоморфности Y^* и l_∞) подпоследовательность $\{y_{n_k}^{**}, k \in \mathbb{N}\}$ будет слабо сходящейся в Y^{**} [5; теорема 15, с. 103] (очевидно, к элементу из B). Это доказывает, что B слабо компактно в Y^{**} [6; следствие, с. 292]; следовательно, компактно в $(B(Y^{**}), \sigma(Y^{**}, Y^*))$. Вследствие плотности B в $(B(Y^{**}), w^*)$ (ибо $B \supset A$), имеем: $B = B(Y^{**})$, что устанавливает рефлексивность пространства Y^{**} и, значит, Y – рефлексивное пространство. Это противоречит условию, что Y изоморфно l_1 . Полученное противоречие доказывает, что X не содержит подпространства, изоморфного l_1 .

Второй этап. Докажем теперь, что X – пространство Асплунда. Для этого достаточно установить (как отмечено в начале заметки), что X^* – пространство со свойством RN . Последнее утверждение эквивалентно следующему свойству: если Σ – совокупность измеримых по Лебегу множеств в $[0, 1]$ и λ – мера Лебега, заданная на Σ , то всякая λ -непрерывная векторная мера конечной вариации $\mathbf{m}: \Sigma \rightarrow X^*$ представима интегралом Бохнера [1; следствие 8, с. 138].

Пусть $([0, 1], \Sigma, \lambda)$ – отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега и $\mathbf{m}: \Sigma \rightarrow X^*$ – λ -непрерывная векторная мера конечной вариации. Множество $\{\mathbf{m}(E), E \in \Sigma\}$ сепарабельно в X^* ; тогда будет сепарабельным и V – линейное подпространство, порожденное $\{\mathbf{m}(E), E \in \Sigma\}$. Пусть Y – такое сепарабельное линейное подпространство в X , что для каждого $v \in V$ $\|v\|_{X^*} = \sup\{|\langle v, y \rangle| : y \in B(Y)\}$. Обозначим сужение значений $\mathbf{m}$ на Y через $\mathbf{n}$ (т.е. $\mathbf{n}: \Sigma \rightarrow Y^*$ – такая векторная мера, что $\langle \mathbf{n}(E), y \rangle = \langle \mathbf{m}(E), y \rangle$, $E \in \Sigma$, $y \in Y$). По условию имеется плотное в $(B(Y^{**}), w^*)$ пр.с.секвенциально компактное множество A . Если Z – линейное подпространство в Y^* , порожденное $\{\mathbf{n}(E), E \in \Sigma\}$, то ввиду плотности A в $(B(Y^{**}), w^*)$ и сепарабельности Z найдется счетное множество $B \subset A$ такое, что $\|z\|_{Y^*} = \sup\{|\langle y^{**}, z \rangle| : y^{**} \in B\}$, $z \in Z$. Пусть $B = \{y_i^{**}, i \in \mathbb{N}\}$.

Обозначим замыкание B в $(B(Y^{**}), \sigma(Y^{**}, Y^*))$ через K ; по условию $K = (K, \sigma(Y^{**}, Y^*))$ – метризуемый компакт. Тогда $C(K)$ сепарабельно ($C(K)$ – пространство вещественных непрерывных на K функций с $\sup$ -нормой).

Так как Y не содержит подпространства, изоморфного l_1 , существует функция $f: [0, 1] \rightarrow Y^*$, для которой при всяком $y^{**} \in Y^{**}$ вещественная функция $\langle y^{**}, f(\cdot) \rangle$ λ -измерима и удовлетворяет условию $\langle y^{**}, \mathbf{n}(E) \rangle = \int_E \langle y^{**}, f(t) \rangle d\lambda$, $E \in \Sigma$ [7; теорема 12.1, определение 11.2].

Возьмем произвольные $\varepsilon > 0$ и $F \in \Sigma$ с $\lambda(F) > 0$. Покроем множество $\{f(t), t \in [0, 1]\} \subset Y^* \subset C(K)$ счетным числом множеств U_j , $j \in \mathbb{N}$, имеющих вид $U_j = Y^* \cap U(y_j^*, \varepsilon/3)$, где $U_j(y_j^*, \varepsilon/3)$ – замкнутый шар в $C(K)$ с центром $y_j^* \in Y^*$ и радиусом $\varepsilon/3$. Положим $F_j = f^{-1}(U_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Легко проверяется, что

$$F_j = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left\{ t \in [0, 1] : |\langle y_i^{**}, f(t) - y_j^* \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right\};$$

следовательно, множества F_j λ -измеримы и, очевидно, $[0, 1] = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$. Найдется такое $j_0 \in \mathbb{N}$, что (положив $M = F \cap F_{j_0}$) имеем $\lambda(M) > 0$.

Для $t \in M$ выполняется

$$\langle y_i^{**}, y_{j_0}^* \rangle - \frac{\varepsilon}{3} \leq \langle y_i^{**}, f(t) \rangle \leq \langle y_i^{**}, y_{j_0}^* \rangle + \frac{\varepsilon}{3}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Из (1) следует, что для всякого $E \in \Sigma$, $E \subset M$ с $\lambda(E) > 0$ выполнено

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(E)} \langle y_i^{**}, \mathbf{n}(E) \rangle &= \frac{1}{\lambda(E)} \int_E \langle y_i^{**}, f(t) \rangle d\lambda \leq \frac{1}{\lambda(E)} \int_E \left[\langle y_i^{**}, y_{j_0}^* \rangle + \frac{\varepsilon}{3} \right] d\lambda \\ &\leq \frac{1}{\lambda(E)} \left[\langle y_i^{**}, y_{j_0}^* \rangle + \frac{\varepsilon}{3} \right] \lambda(E) = \langle y_i^{**}, y_{j_0}^* \rangle + \frac{\varepsilon}{3}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается, что для $E \in \Sigma$, $E \subset M$ с $\lambda(E) > 0$

$$\frac{1}{\lambda(E)} \langle y_i^{**}, \mathbf{n}(E) \rangle \geq \langle y_i^{**}, y_{j_0}^* \rangle - \frac{\varepsilon}{3}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Отсюда

$$\left\| \frac{\mathbf{n}(E_1)}{\lambda(E_1)} - \frac{\mathbf{n}(E_2)}{\lambda(E_2)} \right\|_{Y^*} \leq \frac{2\varepsilon}{3},$$

$E_k \in \Sigma$, $E_k \subset M$ с $\lambda(E_k) > 0$, $k = 1, 2$. Из выбора Y заключаем

$$\left\| \frac{\mathbf{n}(E_1)}{\lambda(E_1)} - \frac{\mathbf{n}(E_2)}{\lambda(E_2)} \right\|_{Y^*} = \left\| \frac{\mathbf{m}(E_1)}{\lambda(E_1)} - \frac{\mathbf{m}(E_2)}{\lambda(E_2)} \right\|_{X^*}$$

для любых $E_k \in \Sigma$ с $\lambda(E_k) > 0$, $k = 1, 2$. Следовательно, вышепостроенное множество $M \in \Sigma$ таково, что $M \subset F$, $\lambda(M) > 0$ и диаметр (в пространстве X^*) множества

$$\left\{ \frac{\mathbf{m}(E)}{\lambda(E)} : E \in \Sigma, E \subset M, \lambda(E) > 0 \right\}$$

меньше ε . Это доказывает представимость векторной меры $\mathbf{m}: \Sigma \rightarrow X^*$ интегралом Бохнера [1; лемма 6, с. 135]. Как выше отмечалось, тем самым устанавливается, что X – пространство Асплунда.

3) $\Rightarrow$ 1) Это можно вывести из [8; следствие 3.5 (а)], но докажем требуемое более прямым путем. Пусть X – пространство Асплунда, Y – произвольное замкнутое подпространство (линейное) в X ; Y – также пространство Асплунда [2; 5.8.1 (с)]. Покажем, что $B(Y)$ является пр.с.секвенциально компактным множеством в $(B(Y^{**}), \sigma(Y^{**}, Y^*))$. С этой целью возьмем произвольное счетное $\{y_n, n \in \mathbb{N}\} \subset B(Y)$ и обозначим через Z замкнутое линейное подпространство (в Y), порожденное $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$. Пространство Z^{**} можно отождествить с $Z^{\perp\perp} \subset Y^{**}$, где для $Z \subset Y$ $Z^\perp = \{y^* \in Y^* : \langle y^*, z \rangle = 0, z \in Z\}$. Пространство Z^* сепарабельно [3; 1.5.7], поэтому $(B(Z^{**}), \sigma(Z^{**}, Z^*))$ метризуемо.

На $B(Z^{**}) \subset Z^{\perp\perp} \subset Y^{**}$ топология $\sigma(Z^{**}, Z^*)$ совпадает с топологией, индуцируемой $\sigma(Y^{**}, Y^*)$; следовательно, $(B(Z^{**}, Z^*), \sigma(Y^{**}, Y^*))$ метризуемо. В таком случае $\sigma(Y^{**}, Y^*)$ -замыкание множества $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ также метризуемо. Это доказывает, что в $(B(Y^{**}), w^*)$ существует плотное пр.с.секвенциально компактное множество (именно, таковым является $B(X)$).

Возникает вопрос: нельзя ли в вышедоказанной теореме (в условии 1)) потребовать существования плотного пр.с.секвенциально компактного множества лишь в $(B(X^{**}), w^*)$ (и не требовать подобного для подпространств пространства X)? Интерес к такому вопросу увеличивается при рассмотрении характеристики RN компакта K , приведенной в [4; теорема 4.3], где требуется существование одного суперсеквенциально компактного множества T (правда, при этом K должен быть гомеоморфен множеству, компактному в топологии поточечной сходимости на плотном в T подмножестве). Приведем пример, показывающий, что ответ на этот вопрос отрицателен.

ПРИМЕР 1. Пусть $X = C[0, 1]$. Известно, что X^* может быть представлено как l_1 -прямая сумма $X^* = [l_1[0, 1] \oplus (\sum_\alpha L_1(\mu_\alpha))_1]_1$, где μ_α – непрерывные радоновы меры на метризуемых компактах без изолированных точек [9; теорема 5, с. 175]. Напомним, что

$$\left(\sum_{\alpha \in \Delta} X_\alpha\right)_1 = \left\{ (x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha : (\|x_\alpha\|_{X_\alpha})_{\alpha \in \Delta} \in l_1(\Delta) \right\}$$

с нормой $\|(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta}\| = \sum_{\alpha \in \Delta} \|x_\alpha\|_{X_\alpha}$. Выберем в единичном шаре пространства $X^{**} = [l_1^*[0, 1] \oplus (\sum_\alpha L_1^*(\mu_\alpha))_\infty]_\infty$ элементы вида $(f_0, \dots, f_\alpha, \dots)$, где $f_0 \in B(l_1^*[0, 1])$, $f_\alpha \in B(L_1^*(\mu_\alpha))$, у которых не более счетного числа координат отлично от нуля (соответствующего пространства) и чтобы носитель функции $f_0 \in B(l_1^*[0, 1])$ был не более чем счетен. Множество таких элементов в X^{**} обозначим через A . Так как элементы из X^* вида $(x_0^*, \dots, x_\alpha^*, \dots)$, где $x_0^* \in l_1[0, 1]$, $x_\alpha^* \in L_1(\mu_\alpha)$, у которых отличны от нуля лишь конечное число координат, образуют плотное в X^* множество, построенное множество A плотно в $(B(X^{**}), w^*)$.

Возьмем счетное подмножество $F_n = (f_{0,n}, \dots, f_{\alpha,n}, \dots)$, $n \in \mathbb{N}$, из построенного A . Найдутся счетное $\Delta \subset [0, 1]$ и счетное семейство T индексов $\alpha \neq 0$ такие, что для каждого $F_n = (f_{0,n}, \dots, f_{\alpha,n}, \dots)$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется $f_{0,n}(t) = 0$ при $t \in [0, 1] \setminus \Delta$, $f_{\alpha,n} = 0$ при $\alpha \notin T$.

Так как $l_1(\Delta)$ и $L_1(\mu_\alpha)$, $\alpha \in T$, – сепарабельные пространства и их счетное число, $\sigma(X^{**}, X^*)$ -замыкание множества $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ метризуемо в $(B(X^{**}), w^*)$ и, очевидно, содержится в A .

Итак, A – плотное суперсеквенциально компактное множество в $(B(X^{**}), w^*)$. Однако X не является пространством Асплунда (ибо X сепарабельно, а X^* несепарабельно и тогда X^* не имеет свойства RN).

В некоторых случаях все же для установления того, что X – пространство Асплунда, бывает достаточно доказать существование плотного пр.с.секвенциально компактного множества лишь в $(B(X^{**}), w^*)$. Это показывает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть банахово пространство X не содержит подпространства, изоморфного l_1 . Если в $(B(X^{**}), w^*)$ существует плотное пр.с.секвенциально компактное множество, то X – пространство Асплунда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится подобно тому, которое проделано на втором этапе доказательства выполнимости импликации 2) $\Rightarrow$ 3) в вышеприведенной теореме, сделав только соответствующие изменения. Опустив выкладки, укажем необходимые изменения.

Обозначаем теперь через A плотное пр.с.секвенциально компактное множество в $(B(X^{**}), w^*)$; пространство Y теперь отсутствует; отсутствует тогда и векторная мера $\mathbf{n}: \Sigma \rightarrow Y^*$; Z – линейное подпространство в X^* , порожденное множеством $\{\mathbf{m}(E), E \in \Sigma\}$; B – счетное подмножество в A со свойством

$$\|z\|_{X^*} = \sup\{|\langle x^{**}, z \rangle| : x^{**} \in B\},$$

где $z \in Z$; $K - \sigma(X^{**}, X^*)$ -замыкание B (по условию, $(K, \sigma(X^{**}, X^*))$ – метризуемый компакт); функция $f: [0, 1] \rightarrow X^*$ теперь такова, что для всякого $x^{**} \in X^{**}$ функция $\langle x^{**}, f(\cdot) \rangle$ λ -измерима и $\langle x^{**}, \mathbf{m}(E) \rangle = \int_E \langle x^{**}, f(t) \rangle d\lambda$, $E \in \Sigma$; и $U_j = X^* \cap U(x_j^*, \varepsilon/3)$, $x_j^* \in X^*$, $j \in \mathbb{N}$.

При рассмотрении вышеизложенного предложения естественен вопрос: если X не содержит подпространства, изоморфного l_1 , и единичный шар $(B(X^{**}), w^*)$ сам является суперсеквенциально компактным, то не будет ли $(B(X^{**}), w^*)$ компактом Корсона? (Определение компакта Корсона см., например, в [10], [11].) К такому же вопросу подводят, в некоторой степени, и результаты, установленные в [11; следствие 8], [12; теорема III-4]. Ответ на этот вопрос отрицателен, как показывает

ПРИМЕР 2. При построении существенно используем свойства пространства $J(\omega_1)$ (определение $J(\omega_1)$ и исследование его свойств дано в [13] и [2; гл. 7, § 7]). Приведем краткое описание пространства $J(\omega_1)$.

Пусть ω_1 – первый несчетный ординал; наделим $[0, \omega_1]$ порядковой топологией. Если функция $f: [0, \omega_1] \rightarrow \mathbb{R}$, то

$$\|f\| = \sup \left(\sum_{i=1}^n |f(\alpha_i) - f(\alpha_{i-1})|^2 \right)^{1/2}, \quad (2)$$

где супремум берется по всем конечным последовательностям $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ из $[0, \omega_1]$. Пространство $J(\omega_1) = \{f : f: [0, \omega_1] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ непрерывна}, \|f\| < \infty, f(0) = 0\}$. Наделим $J(\omega_1)$ нормой из (2). Если $h_\alpha = \mathbf{1}_{(\alpha, \omega_1]}$ – характеристическая функция множества $(\alpha, \omega_1]$, то, как показано в [2; 7.7.3], $\{h_\alpha, \alpha < \omega_1\}$ – базис (несчетный) пространства $J(\omega_1)$ (т.е. для всякого $f \in J(\omega_1)$ существует единственная трансфинитная последовательность вещественных чисел $\{c_\alpha, \alpha < \omega_1\}$ такая, что $f = \sum_{\alpha < \omega_1} c_\alpha h_\alpha$ (трансфинитный ряд сходится в $J(\omega_1)$, его сходимостъ определяется естественным образом)).

Для каждого $\alpha \in (0, \omega_1]$ определим функционал e_α на $J(\omega_1)$, положив $e_\alpha(f) = f(\alpha)$, $f \in J(\omega_1)$. Тогда $e_\alpha \in J(\omega_1)^*$, $\|e_\alpha\| = 1$ и семейство $\{e_\alpha, \alpha \in (0, \omega_1]\}$ образует базис $J(\omega_1)^*$ [2; 7.7.4].

Существует такое банахово пространство X , что X^* изометрически изоморфно $J(\omega_1)$ [2; 7.7.5]. Будем отождествлять $J(\omega_1)$ с X^* (и $J(\omega_1)^*$ с X^{**}).

Возьмем произвольное счетное множество $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ в $B(X^{**})$, его элементы имеют вид $\sum_{0 < \alpha \leq \omega_1} c_{\alpha, n} e_\alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\beta = \sup\{\alpha : c_{\alpha, n} \neq 0, \alpha < \omega_1, n \in \mathbb{N}\}$. Так как каждый трансфинитный ряд $\sum_{0 < \alpha \leq \omega_1} c_{\alpha, n} e_\alpha$ содержит не более, чем счетное множество отличных от нуля коэффициентов $c_{\alpha, n}$, то $\beta < \omega_1$.

Докажем замкнутость множества $T = \{\sum_{\alpha \in (0, \beta]} c_\alpha e_\alpha + c_{\omega_1} e_{\omega_1}\}$ в (X^{**}, w^*) . Пусть $F \in X^{**} \setminus T$; тогда

$$F = \sum_{0 < \alpha \leq \beta} c_\alpha e_\alpha + \sum_{\beta < \alpha < \omega_1} c_\alpha e_\alpha + c_{\omega_1} e_{\omega_1},$$

где $\sum_{\alpha \in (\beta, \omega_1)} c_\alpha e_\alpha \neq 0$.

Положив $L = F - \sum_{0 < \alpha \leq \beta} c_\alpha e_\alpha - c_{\omega_1} e_{\omega_1}$, найдем такой элемент h_γ указанного в X^* базиса, что $\langle L, h_\gamma \rangle \neq 0$ (можно считать, как и будем делать, что $\gamma \geq \beta$). Если δ – супремум тех α , для которых коэффициенты c_α в разложении L в трансфинитный ряд отличны от нуля (очевидно, $\gamma < \delta < \omega_1$), то положим $h = h_\gamma - h_\delta$. Имеем: для $x^{**} \in T$

$$\langle x^{**}, h \rangle = \langle x^{**}, h_\gamma - h_\delta \rangle = \langle x^{**}, \mathbf{1}_{[\gamma+1, \delta]} \rangle = 0$$

и

$$\langle F, h \rangle = \langle F, \mathbf{1}_{[\gamma+1, \delta]} \rangle = \langle L, \mathbf{1}_{[\gamma+1, \delta]} \rangle = \langle L, h_\gamma \rangle \neq 0.$$

Это показывает, что T – замкнутое множество в (X^{**}, w^*) и, следовательно, $\sigma(X^{**}, X^*)$ -замыкание $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ содержится в $\sigma(X^{**}, X^*)$ -компактном множестве $T_1 = T \cap B(X^{**})$. Нетрудно проверить, что $(T_1, \sigma(X^{**}, X^*))$ метризуемо; тогда замыкание $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ в $(B(X^{**}), w^*)$ метризуемо и компактно. Ввиду произвольности выбора счетного множества $\{F_n, n \in \mathbb{N}\} \subset B(X^{**})$ заключаем: $(B(X^{**}), w^*)$ суперсеквенциально компактно.

Так как X^* имеет свойство RN [2; 7.7.7(3)], то X – пространства Асплунда и, значит, X не содержит подпространства, изоморфного l_1 . В то же время, X – такое пространство Асплунда, что в $(B(X^{**}), w^*)$ есть подмножество $\{e_\alpha : \alpha \in (0, \omega_1]\}$, которое (как легко проверить) w^* -гомеоморфно $[0, \omega_1]$ и, следовательно, $(B(X^{**}), w^*)$ не является компактом Корсона [12; теорема III-4].

Итак, построено банахово пространство X , которое не содержит подпространства, изоморфного l_1 , при этом $(B(X^{**}), w^*)$ суперсеквенциально компактно, но $(B(X^{**}), w^*)$ не является компактом Корсона.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пространство Асплунда X , построенное в примере 2, таково, что $(B(X^{**}), w^*)$ – компакт Валдивиа (определение компакта Валдивиа см. в [12]). Однако существуют пространства Асплунда X , для которых $(B(X^{**}), w^*)$ не является компактом Валдивиа; пример такого пространства приведен в [14; 4.10 (b)].

Благодарю А. Н. Пличко за предоставленную им возможность ознакомиться с работой О. Календы [14].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Diestel, J. J. Uhl, *Vector Measure*, Math Surveys, **15**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1977.
- [2] R. D. Bourgin, *Geometric Aspects of Convex Sets with Radon-Nikodým property*, Lecture Notes in Math, **993**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [3] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler, *Smoothness and Renormings in Banach Spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **64**, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.
- [4] I. Namioka, “Radon-Nikodým compact spaces and Fragmentability”, *Mathematika*, **34**:2 (1987), 258–281.
- [5] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Graduate Texts in Mathematics, **92**, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [6] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1984.
- [7] K. Musiał, “Topics in the theory of Pettis integration”, *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, **23**:1 (1991), 177–262.
- [8] B. Cascales, I. Namioka, J. Orihuela, “The Lindelöf property in Banach spaces”, *Studia Math.*, **154**:2 (2003), 165–192.
- [9] H. E. Lacey, *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **208**, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [10] А. В. Архангельский, *Топологические пространства функций*, Изд-во МГУ, М., 1989.
- [11] J. Orihuela, “On weakly Lindelöf Banach Spaces”, *Progress in Functional Analysis* (Pensicola, 1990), North-Holland Math. Stud., **170**, North-Holland, Amsterdam, 1992, 279–291.
- [12] R. Deville, G. Godefroy, “Some applications of projectional resolution of identity”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **67**:1 (1993), 183–199.
- [13] G. A. Edgar, “A long James space”, *Measure theory* (Oberwolfach, 1979), Lecture Notes in Math, **794**, Springer-Verlag, New York, 1980, 31–37.
- [14] O. Kalenda, “Valdivia compacta and bidual of Asplund spaces”, *General topology and Banach spaces*, Nova Sci. Publ., Huntington, NY, 2001, 115–125.

В. И. Рыбаков

Тульский государственный университет им. Л. Н. Толстого

Поступило

05.05.2006