Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Куракин, Алгебра Хопфа, дуальная к алгебре многочленов над коммутативным кольцом, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 5, 677–685

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm376>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:42:14

УДК 512.66

АЛГЕБРА ХОПФА, ДУАЛЬНАЯ К АЛГЕБРЕ МНОГОЧЛЕНОВ НАД КОММУТАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ

В. Л. Куракин

Для алгебры многочленов $A = R[X]$ или $R[X, X^{-1}]$ от нескольких переменных над коммутативным кольцом R , на которой задана структура алгебры Хопфа $(A, m, e, \Delta, \varepsilon, S)$, доказывается существование дуальной алгебры Хопфа $(A^\circ, \Delta^\circ, \varepsilon^\circ, m^\circ, e^\circ, S^\circ)$.

Библиография: 14 названий.

Пусть R – коммутативное кольцо с единицей. Мы предполагаем известными определения алгебры (A, m, e) , коалгебры (A, Δ, ε) , биалгебры $(A, m, e, \Delta, \varepsilon)$ и алгебры Хопфа $(A, m, e, \Delta, \varepsilon, S)$ над кольцом R (см. [1]–[4]) с умножением $m: A \otimes A \rightarrow A$, единицей $e: R \rightarrow A$, коумножением $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$, коединицей $\varepsilon: A \rightarrow R$ и антиподом $S: A \rightarrow A$. Произведение $m(a \otimes b)$ элементов алгебры A будем обозначать ab , а единичный элемент $e(1)$ алгебры A – тем же символом 1 , что и единицу кольца R . Термин отображение в дальнейшем означает R -линейное отображение, а $\otimes$ – тензорное произведение модулей или алгебр над кольцом R . Отображение, дуальное к отображению $\varphi \in \text{Hom}_R(A, B)$, определяется как $\varphi^*: B^* \rightarrow A^*$, $\varphi^*(f) = f\varphi$, $f \in B^*$, где $A^* = \text{Hom}_R(A, R)$ – модуль, дуальный к модулю A .

Как известно [2], если (A, Δ, ε) – коалгебра, то на модуле A^* можно задать структуру алгебры. Рассмотрим канонический гомоморфизм

$$\sigma: A^* \otimes A^* \rightarrow (A \otimes A)^*, \quad \sigma(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a)g(b),$$

где $f, g \in A^*$, $a, b \in A$. Таким образом, $\sigma(f \otimes g) = m_R(f \otimes g)$, где $m_R: R \otimes R \rightarrow R$ – умножение в кольце R , причем $\sigma(f \otimes g)$ есть значение σ в точке $f \otimes g$, тогда как $m_R(f \otimes g)$ есть композиция отображений. Пусть

$$*: A^* \otimes A^* \xrightarrow{\sigma} (A \otimes A)^* \xrightarrow{\Delta^*} A^*$$

– композиция отображений Δ^* и σ . Тогда $(A^*, \Delta^*, \varepsilon^*)$ – алгебра, называемая дуальной к коалгебре (A, Δ, ε) .

Двойственная ситуация оказывается более сложной. Пусть (A, m, e) – алгебра. Тогда дуальное отображение $m^*: A^* \rightarrow (A \otimes A)^*$ в общем случае нельзя естественным образом (с использованием отображения σ) превратить в коумножение на A^* , поскольку, во-первых, образ $m^*(A^*)$ не всегда лежит в $\sigma(A^* \otimes A^*)$ и, во-вторых, отображение σ может быть не инъективным (и тем более не сюръективным). Поэтому коалгебру, дуальную к алгебре A , задают на некотором подмодуле $A^\circ \subseteq A^*$.

Если R – поле, то A° определяется как множество отображений $f \in A^*$, ядро которых содержит идеал конечной коразмерности (см. [1]):

$$A^\circ = \{f \in A^* : \exists I \triangleleft A, I \subseteq \text{Ker } f, \dim A/I < \infty\}.$$

Для алгебр над коммутативным кольцом R , следуя [2], определим

$$A^\circ = \{f \in A^* : \exists I \triangleleft A, I \subseteq \text{Ker } f, A/I \in P(R)\},$$

где $P(R)$ – категория конечно порожденных проективных R -модулей. Тогда при условии, что кольцо R нётерово, ограничение отображения σ на $A^\circ \otimes A^\circ$ является изоморфизмом $A^\circ \otimes A^\circ \cong (A \otimes A)^\circ$ и $m^*(A^\circ) \subseteq (A \otimes A)^\circ$. Рассмотрим ограничения дуальных отображений m^* и e^* на A° :

$$m^\circ : A^\circ \xrightarrow{m^*} (A \otimes A)^\circ \xrightarrow{\sigma^{-1}} A^\circ \otimes A^\circ, \quad e^\circ : A^\circ \xrightarrow{e^*} R^* = R.$$

Тогда $(A^\circ, m^\circ, e^\circ)$ – коалгебра, называемая дуальной к алгебре (A, m, e) . Более того, если $(A, m, e, \Delta, \varepsilon)$ – биа́лгебра, то $*(A^\circ \otimes A^\circ) \subseteq A^\circ$, $\varepsilon^*(R) \subseteq A^\circ$ и $(A^\circ, \Delta^\circ, \varepsilon^\circ, m^\circ, e^\circ)$ – биа́лгебра, называемая дуальной к биа́лгебре A . Если, к тому же, A – алгебра Хопфа с антиподом S , то $S^*(A^\circ) \subseteq A^\circ$ и A° – алгебра Хопфа с антиподом S° . Здесь через Δ° , ε° и S° обозначаются ограничения отображений $*, \varepsilon^*$ и S^* на A° .

Отметим, что в [2] пропущено условие нётеровости кольца R при определении коалгебры, дуальной к алгебре. Таким образом, для алгебр над кольцом R , не являющимся нётеровым, канонические дуальные коалгебра, биа́лгебра и алгебра Хопфа не определены.

В данной работе доказывается, что если A – алгебра многочленов над коммутативным кольцом R с единицей, то указанные выше канонические конструкции приводят к корректно определенным дуальным коалгебре и биа́лгебре на A° . Под алгеброй (биа́лгеброй, алгеброй Хопфа) многочленов мы понимаем алгебру $R[X]$ или $R[X, X^{-1}]$, где $X = (x_1, \dots, x_k)$, $X^{-1} = (x_1^{-1}, \dots, x_k^{-1})$, $k \geq 1$, в которой умножением является обычное умножение многочленов, а коумножение, коединица и антипод заданы произвольно. Излагаемые ниже результаты являются доказательством и продолжением результатов, аннотированных в [5].

Алгебры Хопфа, дуальные к алгебре многочленов над полем, рассматривались в [6]–[11]. Над коммутативными кольцами такие алгебры, помимо [5], рассматривались в [12], где среди других результатов доказана корректность определения алгебры Хопфа, дуальной к алгебре Хопфа многочленов $R[x]$ от одной переменной над нётеровым кольцом R . При этом для A° использовалось другое определение: вместо условия $A/I \in P(R)$ требовалась лишь конечная порожденность R -модуля A/I . В следующем утверждении мы докажем, что для алгебр многочленов эти определения A° эквивалентны.

Идеал I кольца $R[X]$ назовем унитарным, если он содержит систему унитарных многочленов $F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)$ от одной переменной. Идеал I кольца $R[X, X^{-1}]$ назовем унитарным, если он содержит систему унитарных многочленов $F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)$ таких, что свободные члены $F_1(0), \dots, F_k(0)$ являются обратимыми элементами кольца R . Указанные многочлены будем называть системой элементарных многочленов унитарного идеала.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть R – коммутативное кольцо с единицей, K – левый R -подмодуль в алгебре многочленов $A = R[X]$ или $R[X, X^{-1}]$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (а) $\exists I \subseteq K, I \triangleleft A, A/I$ – конечно порожденный свободный R -модуль;
- (б) $\exists I \subseteq K, I \triangleleft A, A/I$ – конечно порожденный проективный R -модуль;
- (в) $\exists I \subseteq K, I \triangleleft A, A/I$ – конечно порожденный R -модуль;
- (г) $\exists I \subseteq K, I \triangleleft A, I$ унитарен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации (а) $\implies$ (б) $\implies$ (в) очевидны.

(в) $\implies$ (г). Пусть R -модуль A/I порождается элементами $\overline{F}_1, \dots, \overline{F}_n$, где $\overline{F} = F + I$. Тогда $\overline{x}_1 \overline{F}_j(X) = \sum_i b_{ij} \overline{F}_i$ для некоторых $b_{ij} \in R, 1 \leq i, j \leq n$. Рассмотрим матрицу $B = (b_{ij}) \in R_{n,n}$. Если $c = (c_1, \dots, c_n) \in R^n$ – вектор коэффициентов разложения элемента $\overline{G} \in A/I$ в системе образующих $\overline{F}_1, \dots, \overline{F}_n$, то cB – вектор коэффициентов разложения элемента $\overline{x}_1 \overline{G}$. Пусть c – вектор коэффициентов разложения элемента $\overline{1}$. Тогда последовательность векторов $c, cB, cB^2, \dots$, являющихся векторами коэффициентов разложений элементов $\overline{1}, \overline{x}_1, \overline{x}_1^2, \dots$, аннулируется характеристическим многочленом $\chi_B(t)$ матрицы B . Следовательно, $\chi_B(\overline{x}_1) = 0$, т.е. $\chi_B(x_1) \in I$. Таким образом, идеал I содержит унитарный многочлен от переменной x_1 . Аналогично доказывается, что I содержит унитарный многочлен от $x_s, 1 \leq s \leq k$. Таким образом, в случае, когда $A = R[X]$, доказано, что идеал I унитарен. Если $A = R[X, X^{-1}]$, то пусть $\overline{x}_1^{-1} \overline{F}_j(X) = \sum_i b'_{ij} \overline{F}_i, b'_{ij} \in R, 1 \leq i, j \leq n$, и пусть $B' = (b'_{ij})$. Равенства $\overline{x}_1^{-1} \overline{x}_1 \overline{F}_j(X) = \overline{F}_j(X), 1 \leq j \leq n$, показывают, что $BB' = E$. Поэтому матрица B обратима, и $\chi_B(0)$ – обратимый элемент кольца R . Таким образом, и в случае $A = R[X, X^{-1}]$ идеал I унитарен.

(г) $\implies$ (а). Пусть $I \subseteq K$ – унитарный идеал и $F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)$ – система элементарных многочленов идеала I степеней $m_1, \dots, m_k$ соответственно. Тогда любой многочлен $F(X) \in A$ можно однозначно разделить с остатком на многочлены $F_1, \dots, F_k$, т.е. представить в виде

$$F(X) = F_1(x_1)Q_1(X) + \dots + F_k(x_k)Q_k(X) + r(X),$$

где $Q_j(X) \in A, r(X) \in R[X]$ и степень многочлена $r(X)$ по переменной x_j меньше $m_j, 1 \leq j \leq k$. Отсюда следует, что $A/(F_1, \dots, F_k)$ – свободный R -модуль ранга $m_1 \dots m_k$.

Построение биалгебры A° будем по возможности проводить в общем случае, вначале не предполагая, что A – алгебра многочленов. Доказательство в целом проводится по той же схеме, что и для алгебр над полем [1]. Следующее утверждение хорошо известно и легко доказывается непосредственно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для произвольных R -модулей A и B справедливо соотношение $(A \oplus B)^* \cong A^* \oplus B^*$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если A и B – конечно порожденные проективные R -модули, то $A^* \otimes B^* \cong (A \otimes B)^*$ и

$$\sigma: A^* \otimes B^* \rightarrow (A \otimes B)^*, \quad \sigma(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a)g(b),$$

где $f \in A^*, g \in B^*, a \in A, b \in B$, – изоморфизм R -модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале A и B – свободные модули, $A = R^m$, $B = R^n$. По утверждению 1 $A^* = \text{Hom}(R^m, R) = \text{Hom}(R, R)^m \cong R^m$. Тогда $A^* \otimes B^* \cong R^m \otimes R^n \cong R^{mn} \cong (A \otimes B)^*$. Пусть $e_1, \dots, e_m$ – базис модуля A и $f_1, \dots, f_m$ – дуальный базис модуля A^* , т.е. $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. Аналогично, пусть $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ – базис B и $g_1, \dots, g_n$ – дуальный базис B^* . Непосредственно проверяется, что отображение σ переводит базис $f_i \otimes g_j$ модуля $A^* \otimes B^*$ в базис модуля $(A \otimes B)^*$, дуальный к базису $e_i \otimes \varepsilon_j$ модуля $A \otimes B$. Следовательно, σ – изоморфизм.

Пусть теперь A и B проективны. Тогда $A \oplus A_1 = R^m$ и $B \oplus B_1 = R^n$ для некоторых R -модулей A_1 и B_1 и по доказанному

$$\sigma: (A \oplus A_1)^* \otimes (B \oplus B_1)^* \rightarrow ((A \oplus A_1) \otimes (B \oplus B_1))^*$$

– изоморфизм. С учетом утверждения 2

$$\sigma: (A^* \oplus A_1^*) \otimes (B^* \oplus B_1^*) \rightarrow ((A \oplus A_1) \otimes (B \oplus B_1))^*$$

или

$$\begin{aligned} \sigma: (A^* \otimes B^*) \oplus (A^* \otimes B_1^*) \oplus (A_1^* \otimes B^*) \oplus (A_1^* \otimes B_1^*) \\ \rightarrow (A \otimes B)^* \oplus (A \otimes B_1)^* \oplus (A_1 \otimes B)^* \oplus (A_1 \otimes B_1)^*. \end{aligned}$$

Так как справедливы включения $\sigma(A^* \otimes B^*) \subseteq (A \otimes B)^*$ и т.д., мы получаем, что ограничение σ на $A^* \otimes B^*$ является изоморфизмом между $A^* \otimes B^*$ и $(A \otimes B)^*$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если I и J – идеалы в алгебрах A и B соответственно, то $A \otimes B / (A \otimes J + I \otimes B) \cong A/I \otimes B/J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как отображение $(a, b) \rightarrow [a]_I \otimes [b]_J$ является R -сбалансированным, то определено отображение $A \otimes B \rightarrow A/I \otimes B/J$, $a \otimes b \rightarrow [a]_I \otimes [b]_J$. Идеал $K = A \otimes J + I \otimes B$ содержится в его ядре, поэтому корректно определено отображение

$$\varphi: (A \otimes B)/K \rightarrow A/I \otimes B/J, \quad [a \otimes b]_K \rightarrow [a]_I \otimes [b]_J.$$

С другой стороны, отображение $([a]_I, [b]_J) \rightarrow [a \otimes b]_K$ корректно определено и R -сбалансировано. Следовательно, существует гомоморфизм

$$\psi: A/I \otimes B/J \rightarrow (A \otimes B)/K, \quad [a]_I \otimes [b]_J \rightarrow [a \otimes b]_K.$$

Так как $\varphi\psi = 1$ и $\psi\varphi = 1$, то φ – изоморфизм.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Если A и B – алгебры, то $\sigma(A^\circ \otimes B^\circ) = (A \otimes B)^\circ$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in A^\circ$, $g \in B^\circ$, и пусть I, J – идеалы, содержащиеся соответственно в $\text{Ker } f$ и $\text{Ker } g$, такие, что $A/I, B/J \in P(R)$. Рассмотрим идеал $K = A \otimes J + I \otimes B$ алгебры $A \otimes B$. Понятно, что $K \subseteq \text{Ker } f \otimes g$. Ввиду утверждения 4 $(A \otimes B)/K \in P(R)$. Следовательно, $f \otimes g \in (A \otimes B)^\circ$.

Обратно, пусть $h \in (A \otimes B)^\circ$ и K – идеал, содержащийся в $\text{Ker } h$, такой, что $(A \otimes B)/K \in P(R)$. Положим

$$I = \{a \in A: a \otimes 1 \in K\}, \quad J = \{b \in B: 1 \otimes b \in K\}.$$

Тогда I и J – идеалы в A и B соответственно, причем $A \otimes J + I \otimes B \subseteq K \subseteq \text{Ker } h$. Следовательно, отображение h может быть пропущено через $A \otimes B / (A \otimes J + I \otimes B) \cong A/I \otimes B/J$, т.е. $h(a \otimes b) = \bar{h}([a]_I \otimes [b]_J)$ для некоторого отображения $\bar{h}: A/I \otimes B/J \rightarrow R$. Тогда $\bar{h} \in (A/I \otimes B/J)^*$ или по утверждению 3 $\bar{h} \in (A/I)^* \otimes (B/J)^*$. Поэтому

$$\bar{h} = \sum_i \bar{f}_i \otimes \bar{g}_i, \quad \text{где } \bar{f}_i \in (A/I)^*, \bar{g}_i \in (B/J)^*.$$

Положим $f_i: A \rightarrow A/I \xrightarrow{\bar{f}_i} R$ и $g_i: B \rightarrow B/J \xrightarrow{\bar{g}_i} R$. Тогда $f_i \in A^*$, $I \subseteq \text{Ker } f_i$, $A/I \in P(R)$, откуда $f_i \in A^\circ$ и аналогично $g_i \in B^\circ$. Имеем

$$h(a \otimes b) = \bar{h}([a]_I \otimes [b]_J) = \sum_i \bar{f}_i([a]_I) \bar{g}_i([b]_J) = \sum_i f_i(a) g_i(b),$$

т.е. $h = \sigma(\sum f_i \otimes g_i) \in \sigma(A^\circ \otimes B^\circ)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Если (A, m, e) – алгебра, то $m^*(A^\circ) \subseteq (A \otimes A)^\circ$. Если $(A, m, e, \Delta, \varepsilon)$ – биалгебра, то $\varepsilon^*(R^*) \subseteq A^\circ$. Если A – алгебра Хопфа с сюръективным антиподом S , то $S^*(A^\circ) \subseteq A^\circ$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in A^\circ$, и пусть I – идеал, содержащийся в $\text{Ker } f$, такой, что $A/I \in P(R)$. Рассмотрим идеал $K = A \otimes I + I \otimes A$ алгебры $A \otimes A$. Тогда $m^*(f)(K) = fm(K) = f(I) = 0$ и $(A \otimes A)/K \in P(R)$ ввиду утверждения 4. Следовательно, $m^*(f) \in (A \otimes A)^\circ$.

Пусть A – биалгебра. По определению $\varepsilon^*: R^* = R \rightarrow A^*$, $\varepsilon^*(1) = \varepsilon$. Поэтому достаточно доказать, что $\varepsilon \in A^\circ$. Так как A – биалгебра, то $\varepsilon: A \rightarrow R$ – гомоморфизм алгебр. Значит, $\text{Ker } \varepsilon$ – идеал в A , а также $\varepsilon(1) = 1$ и ε – эпиморфизм. Следовательно, $A/\text{Ker } \varepsilon \cong R \in P(R)$ и $\varepsilon \in A^\circ$.

Пусть A – алгебра Хопфа, $f \in A^\circ$, и пусть I – идеал, содержащийся в $\text{Ker } f$, такой, что $A/I \in P(R)$. Так как в алгебре Хопфа антипод является антиэндоморфизмом алгебр, то $S^{-1}(I)$ – идеал в A . При этом $S^{-1}(I) \subseteq \text{Ker } S^*(f)$. Так как отображение S сюръективно, то и отображение $\tau: A \xrightarrow{S} A \rightarrow A/I$ сюръективно. Следовательно, $A/S^{-1}(I) = A/\text{Ker } \tau \cong A/I \in P(R)$. Этим доказано, что $S^*(f) \in A^\circ$.

Дальнейшие свойства справедливы для алгебр A , удовлетворяющих следующему условию:

$$\begin{aligned} &\text{если } I, J \text{ – идеалы алгебры } A \text{ такие, что } A/I, A/J \in P(R), \\ &\text{то существует идеал } K \text{ такой, что } K \subseteq I \cap J \text{ и } A/K \in P(R). \end{aligned} \quad (1)$$

Отметим, что алгебры многочленов $R[X]$ и $R[X, X^{-1}]$ удовлетворяют этому условию. Действительно, если I, J – идеалы алгебры многочленов A такие, что $A/I, A/J \in P(R)$, то по утверждению 1 найдутся система элементарных многочленов $F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)$ в идеале I и система элементарных многочленов $G_1(x_1), \dots, G_k(x_k)$ в идеале J . Тогда идеал $K = (F_1 G_1, \dots, F_k G_k)$ содержится в $I \cap J$ и $A/K \in P(R)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Если алгебра A удовлетворяет условию (1), то A° является подмодулем в A^* . Если алгебры A и B удовлетворяют условию (1), то отображение $\sigma: A^\circ \otimes B^\circ \rightarrow (A \otimes B)^\circ$ является изоморфизмом модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f, g \in A^\circ$, и пусть I, J – идеалы, содержащиеся в $\text{Ker } f$ и $\text{Ker } g$ соответственно, такие, что $A/I, A/J \in P(R)$. Так как $\text{Ker } rf$ содержит I для любого $r \in R$, то $rf \in A^\circ$. Так как $I \cap J \subseteq \text{Ker}(f + g)$, то в силу условия (1) $f + g \in A^\circ$. Следовательно, A° – подмодуль в A^* .

Докажем, что отображение σ инъективно. Пусть $h = \sum f_i \otimes g_i \in A^\circ \otimes B^\circ$, где $f_i \in A^\circ, g_i \in B^\circ$. Предположим, что $\sigma(h) = 0$. Выберем идеалы $I_i \subseteq \text{Ker } f_i$ и $J_i \subseteq \text{Ker } g_i$ алгебр A и B соответственно такие, что $A/I_i, B/J_i \in P(R)$. В силу условия (1) существуют идеалы $I \subseteq \cap_i I_i$ и $J \subseteq \cap_i J_i$ такие, что $A/I, B/J \in P(R)$. Так как $I \subseteq \text{Ker } f_i$ и $J \subseteq \text{Ker } g_i$, то корректно определены отображения $\bar{f}_i \in (A/I)^*, \bar{f}_i([a]_I) = f_i(a)$ и $\bar{g}_i \in (B/J)^*, \bar{g}_i([b]_J) = g_i(b)$. При этом

$$\sum_i \bar{f}_i([a]_I) \bar{g}_i([b]_J) = \sum_i f_i(a) g_i(b) = \sigma(h)(a \otimes b) = 0.$$

Следовательно, $\bar{\sigma}(\bar{h}) = 0$, где отображение $\bar{\sigma}: (A/I)^* \otimes (B/J)^* \rightarrow (A/I \otimes B/J)^*$ определяется естественным образом (как в утверждении 3) и $\bar{h} = \sum \bar{f}_i \otimes \bar{g}_i \in (A/I)^* \otimes (B/J)^*$. По утверждению 3 $\bar{\sigma}$ – изоморфизм, поэтому $\bar{h} = 0$.

Так как $A \rightarrow A/I$ и $B \rightarrow B/J$ – эпиморфизмы, то дуальные отображения $(A/I)^* \rightarrow A^*$ и $(B/J)^* \rightarrow B^*$ являются мономорфизмами. Будем рассматривать эти мономорфизмы как вложения. Тогда $(A/I)^* \subseteq A^\circ$, так как для любого отображения $f \in A^*$ такого, что $f \in (A/I)^*$, справедливы соотношения $I \subseteq \text{Ker } f$ и $A/I \in P(R)$. Аналогично $(B/J)^* \subseteq B^\circ$. Мы доказали, что $\bar{h} = 0$ в модуле $(A/I)^* \otimes (B/J)^*$. Тогда по определению тензорного произведения $h = 0$ в модуле $A^\circ \otimes B^\circ$. Поэтому σ инъективно. В силу утверждения 5 σ – изоморфизм.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (A, t, e) – алгебра, удовлетворяющая условию (1). Тогда $(A^\circ, t^\circ, e^\circ)$ – коалгебра с корректно определенными операциями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду утверждений 6 и 7 определение t° (данное в начале статьи) корректно. Коассоциативность t° и коунитарность e° следуют из ассоциативности t и унитарности e так же, как для алгебр над полем [1].

ТЕОРЕМА 2. Если $A = R[X]$ или $R[X, X^{-1}]$ – биалгебра многочленов, то $(A^\circ, \Delta^\circ, \varepsilon^\circ, t^\circ, e^\circ)$ – биалгебра. Если при этом A – алгебра Хопфа с антиподом S , то A° – алгебра Хопфа с антиподом S° .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как алгебра многочленов коммутативна, то S^2 – тождественное отображение (доказательство такое же, как для алгебр Хопфа над полем, см. [1, утверждение 4.0.1(6)]). Следовательно, S является биективным отображением. Ввиду утверждения 6 отображения ε° и S° заданы на A° корректно. Ассоциативность Δ° , унитарность ε° и аксиома антипода для S° , а также тот факт, что t° и e° – гомоморфизмы алгебры $(A^\circ, \Delta^\circ, \varepsilon^\circ)$, проверяется так же, как для алгебр над полем [1]. С учетом теоремы 1 остается лишь убедиться в корректности задания умножения Δ° , т.е. доказать включение $*(A^\circ \otimes A^\circ) \subseteq A^\circ$.

Пусть $f, g \in A^\circ$, и пусть I, J – идеалы алгебры A , содержащиеся соответственно в $\text{Ker } f$ и $\text{Ker } g$, такие, что $A/I, A/J \in P(R)$. Ввиду утверждения 1 можно считать, что A/I и A/J – конечно порожденные свободные R -модули. Пусть $\pi_1: A \rightarrow A/I$ и $\pi_2: A \rightarrow A/J$ – канонические проекции и $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$. Так как $I \subseteq \text{Ker } f$, то f пропущается через π_1 , т.е. $f = \bar{f}\pi_1$ для отображения $\bar{f}: A/I \rightarrow R$, заданного равенствами

$\bar{f}([a]_I) = f(a)$, $a \in A$. Аналогично $g = \bar{g}\pi_2$, где $\bar{g}: A/J \rightarrow R$, $\bar{g}([a]_J) = g(a)$. Согласно определению $*$ $= \Delta^* \sigma$ имеем

$$f * g = \Delta^* \sigma(f \otimes g) = m_R(f \otimes g) \Delta = m_R(\bar{f} \otimes \bar{g}) \pi \Delta = m_R(\bar{f} \otimes \bar{g}) \bar{\Delta},$$

где $\bar{\Delta} = \pi \Delta: A \rightarrow A/I \otimes A/J$. Пусть $e_1, \dots, e_t$ – базис свободного R -модуля $B = A/I \otimes A/J$ и M – матрица отображения $b \rightarrow \bar{\Delta}(x_s)b$, $b \in B$, в этом базисе. Здесь x_s , $1 \leq s \leq k$, – элемент алгебры многочленов A . Тогда характеристический многочлен $\chi_M(t)$ матрицы M аннулирует вектор $1 \in B$ относительно отображения $b \rightarrow \bar{\Delta}(x_s)b$. Это означает, что $\chi_M(\bar{\Delta}(x_s)) = 0$. Так как A – биалгебра, то Δ и $\bar{\Delta}$ – гомоморфизмы алгебр. Следовательно, $\bar{\Delta}(\chi_M(x_s)) = 0$, т.е. $\chi_M(x_s) \in \text{Ker } \bar{\Delta}$. Отсюда $\chi_M(x_s) \in \text{Ker}(f * g)$. В случае $A = R[X, X^{-1}]$ отображение $b \rightarrow \bar{\Delta}(x_s^{-1})b$ является обратным к рассмотренному выше, поэтому матрица M обратима и $\chi_M(0)$ – обратимый элемент кольца R . Тем самым доказано, что $\text{Ker}(f * g)$ содержит унитарный идеал. В силу утверждения 1 получаем, что $f * g \in A^\circ$.

Приведем одно приложение полученных результатов. *Последовательностью* над кольцом R назовем произвольную функцию $u: \mathbb{N}_0 \rightarrow R$. Последовательность $u = (u(0), u(1), \dots)$ называется *линейной рекуррентной последовательностью* (ЛРП) порядка m , если существуют элементы $c_0, \dots, c_{m-1} \in R$ такие, что

$$u(i+m) = c_{m-1}u(i+m-1) + \dots + c_1u(i+1) + c_0u(i), \quad i \geq 0.$$

Многочлен $F(x) = x^m - c_{m-1}x^{m-1} - \dots - c_1x - c_0 \in R[x]$ называется *характеристическим многочленом* ЛРП u .

Как известно, алгебра Хопфа, дуальная к алгебре многочленов $P[x]$ над полем P , является алгеброй линейных рекуррентных последовательностей [6]. Для алгебры $P[X]$ многочленов от нескольких переменных над полем см. [7], [11]. Это свойство верно и для алгебры многочленов $R[x]$ над коммутативным кольцом R (см. [5]; для нётерова кольца R см. [12]). Действительно, последовательность u можно отождествить с отображением $u \in R[x]^*$, $u(x^i) = u(i)$, $i \geq 0$. Тогда u – ЛРП в том и только в том случае, когда $\text{Ker } u$ содержит унитарный идеал $(F(x))$, т.е. когда $u \in R[x]^\circ$.

Покоординатное произведение и конволюция последовательностей u и v определяются равенствами

$$(uv)(i) = u(i)v(i), \quad (u * v)(i) = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} u(j)v(i-j), \quad i \geq 0.$$

Согласно [13] если u и v – ЛРП порядков m и n с характеристическими многочленами $F(x)$ и $G(x)$ соответственно, то uv – ЛРП порядка mn и характеристический многочлен матрицы $S(F) \otimes S(G)$ является характеристическим многочленом ЛРП uv . Здесь $S(F)_{m \times m}$ – сопровождающая матрица для многочлена $F(x)$ и $\otimes$ – тензорное произведение матриц. Мы докажем аналогичный результат для операции конволюции, которую будем понимать в следующем обобщенном смысле.

Пусть $(R[x], m, e, \Delta, \varepsilon)$ – биалгебра многочленов. Тогда операцию умножения $*$ $= \Delta^\circ$ в дуальной биалгебре $(R[x]^\circ, \Delta^\circ, \varepsilon^\circ, m^\circ, e^\circ)$ будем называть (*обобщенной*) *конволюцией* линейных рекуррентных последовательностей.

Если коумножение в алгебре $R[x]$ определить равенством $\Delta x = x \otimes x$ или $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, то обобщенная конволюция $*$ совпадает соответственно с покоординатным произведением и конволюцией, введенными выше. В общем случае пусть

$$\Delta x = \sum c_{ij} x^i \otimes x^j, \quad c_{ij} \in R.$$

ТЕОРЕМА 3. *Если u и v – ЛРП над кольцом R порядков m и n с характеристическими многочленами $F(x)$ и $G(x)$ соответственно, то их обобщенная конволюция $u * v$ есть ЛРП порядка mn и характеристический многочлен матрицы $M = \sum c_{ij} S(F)^i \otimes S(G)^j$ является характеристическим многочленом ЛРП $u * v$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что $u * v$ – ЛРП порядка mn , фактически установлен в доказательстве теоремы 2. Рассмотрим это доказательство более подробно.

По условию $I = (F) \subseteq \text{Ker } u$ и $J = (G) \subseteq \text{Ker } v$. Пусть $e_1 = ([1]_F, [x]_F, \dots, [x^{m-1}]_F)$ – базис R -модуля A/I и $e_2 = ([1]_G, [x]_G, \dots, [x^{n-1}]_G)$ – базис R -модуля A/J . Тогда

$$e_1 S(F)^i = ([x^i]_F, [x^{i+1}]_F, \dots, [x^{i+m-1}]_F) = [x^i]_F e_1, \quad e_2 S(G)^j = [x^j]_G e_2.$$

Отождествим векторы e_1 и e_2 с векторами $([1]_F \otimes [1]_G, [x]_F \otimes [1]_G, \dots, [x^{m-1}]_F \otimes [1]_G)$ и $([1]_F \otimes [1]_G, [1]_F \otimes [x]_G, \dots, [1]_F \otimes [x^{n-1}]_G)$. Тогда $e = e_1 \otimes e_2$ (тензорное произведение матриц-строк) – базис R -модуля $B = A/I \otimes A/J$. Для $b \in B$ обозначим через b_e вектор коэффициентов элемента b в базисе e , так что $b = e b_e$. Тогда

$$e(M b_e) = (eM) b_e = (e_1 \otimes e_2) \left(\sum c_{ij} S(F)^i \otimes S(G)^j \right) b_e.$$

Воспользовавшись свойством тензорного произведения матриц: $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$, получим

$$e(M b_e) = \sum c_{ij} ([x^i]_F \otimes [x^j]_G) (e_1 \otimes e_2) b_e = \overline{\Delta} x \cdot b,$$

где отображение $\overline{\Delta} = \pi \Delta$ введено в доказательстве теоремы 2. Таким образом, M – матрица отображения, задающего умножение на элемент $\overline{\Delta} x \in B$. Ввиду доказательства теоремы 2 идеал $\chi_M(x)$ содержится в $\text{Ker}(u * v)$. Следовательно, $\chi_M(x)$ является характеристическим многочленом ЛРП $u * v$, в частности, $u * v$ есть ЛРП порядка mn .

Как видно из доказательства, характеристическим многочленом ЛРП $u * v$ будет не только характеристический многочлен матрицы M , но и любой унитарный многочлен, аннулирующий M , например, любой минимальный многочлен матрицы M . В качестве следствия также получаем, что характеристические (и минимальные) многочлены матриц $S(F) \otimes S(G)$ и $S(F) \otimes E_n + E_m \otimes S(G)$ являются характеристическими многочленами ЛРП uv и $u * v$ соответственно, где в данном случае $u * v$ – обычная конволюция последовательностей.

Более подробно рассмотреть алгебры Хопфа, дуальные к алгебрам многочленов, с точки зрения их свойств как алгебр линейных рекуррентных последовательностей, предполагается в [14].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sweedler M. F. Hopf Algebras. New York: Benjamin, 1969.
- [2] Артамонов В. А. Структура алгебр Хопфа // Итоги науки и техники. Алгебра, геометрия, топология. Т. 29. М.: ВИНТИ, 1991. С. 3–63.
- [3] Маклейн С. Гомология. М.: Мир, 1966.
- [4] Бахтурин Ю. А. Основные структуры современной алгебры. М.: Наука, 1990.
- [5] Куракин В. Л. Алгебры Хопфа линейных рекуррентных последовательностей над коммутативными кольцами // Труды вторых математических чтений МГСУ (Нахабино, 26 января–2 февраля 1994 г.). М., 1994. С. 67–69.
- [6] Peterson B., Taft E. Y. The Hopf algebra of linear recursive sequences // Aequat. Math. 1980. V. 20. P. 1–17.
- [7] Cerlienco L., Piras F. On the continuous dual of a polynomial bialgebra // Comm. Algebra. 1991. V. 19. № 10. P. 2707–2727.
- [8] Куракин В. Л. Конволюция линейных рекуррентных последовательностей // УМН. 1993. Т. 48. № 4. С. 235–236.
- [9] Куракин В. Л. Структура алгебр Хопфа линейных рекуррентных последовательностей // УМН. 1993. Т. 48. № 5. С. 177–178.
- [10] Chin W., Goldman J. Bialgebras of linearly recursive sequences // Comm. Algebra. 1993. V. 21. № 11. P. 3935–3952.
- [11] Kurakin V. L., Kuzmin A. S., Mikhalev A. V., Nechaev A. A. Linear recurring sequences over rings and modules // J. Math. Sci. 1995. V. 76. № 6. P. 2793–2915.
- [12] Abuhlail J. Y., Gómez-Torrecillas J., Wisbauer R. Dual coalgebras of algebras over commutative rings // J. Pure Appl. Algebra. 2000. V. 153. P. 107–120.
- [13] Lu P., Song G., Zhou J. Tensor product with application to linear recurring sequences // J. Math. Res. Exposition. 1992. V. 12. № 4. P. 551–558.
- [14] Куракин В. Л. Алгебры Хопфа линейных рекуррентных последовательностей над кольцами и модулями. Подготовлено для опубликования.

г. Москва

Поступило
02.10.2001