Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. С. Саркисян, Задача восстановления квазиоднородной струны по ее части, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 1, 125–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3760>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:58:54

Задача восстановления квазиоднородной струны по ее части

П. С. Саркисян

В работе рассматриваются квазиоднородные струны с кусочно постоянной плотностью. Приводится условие квазиоднородности; формулы восстановления струны по ее части даны в явном виде для малого числа звеньев. Для произвольного числа звеньев построена теория выделенных матриц, приведен алгоритм восстановления.

Библиография: 1 название.

1. Постановка задачи; краткое описание результатов. Предварительно воспроизведем некоторые результаты из статьи [1]; подчеркнем, что работы можно читать независимо.

Струне с кусочно-непрерывной плотностью ρ и закрепленными концами соответствует спектральная задача

$$-y''(x) = \lambda^{2\rho(x)y(x)}, \quad 0 \leq x \leq b, \quad (1)$$

$$y(0) = y(b) = 0. \quad (2)$$

Пусть ρ кусочно-постоянна. Это значит, что для некоторого натурального n задано разбиение $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$ такое, что $\rho(x) = a_k^2$ при $x \in [c_{k-1}, c_k]$.

Исследование задачи (1), (2) существенно упрощается, если наложить следующие ограничения:

$$a_k(c_k - c_{k-1}) = \alpha \quad (3)$$

для некоторого α . Мы будем считать, что $\alpha > 0$; тем самым $a_k > 0$ для любого $k = 1, \dots, n$. Заметим, что если условие (3) нарушено, но величины $a_k(c_k - c_{k-1})$ соизмеримы (т.е. становятся рациональными при умножении на одно и то же вещественное число), то условие (3) достигается таким подразбиением каждого отрезка $[c_{k-1}, c_k]$, что получившееся при этом новое разбиение удовлетворяет этому условию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем струну *квазиоднородной*, если ее спектр совпадает со спектром однородной струны.

Основной результат упомянутой статьи [1] содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. *Струна $a_1, \dots, a_n, \alpha$ квазиоднородна тогда и только тогда, когда для всех m таких, что $1 \leq m \leq n$, m нечетно, величины*

$$\frac{1}{C_n^m} \sum_{i_1 < \dots < i_m} \frac{a_{i_2} \dots a_{i_{m-1}}}{a_{i_1} \dots a_{i_m}} \quad (4)$$

равны одной и той же, не зависящей от m , константе.

Таким образом, числа $a_1, \dots, a_n$ подчинены $[(n-1)/2]$ ограничениям.

Перейдем к цели данной работы и краткому описанию результата.

Записав равенство величин (4) при $m = 1, 3, \dots, m \leq n$, и освободясь в этих равенствах от знаменателей, мы получаем системы из $[n-1/2]$ однородных полиномиальных уравнений.

Рассмотрим сначала эту систему уравнений для произвольных $a_1, \dots, a_n$ (не требуя положительности a_j).

Наш основной результат состоит в том, что величины $a_{n_1+1}, \dots, a_n$, $n_1 = [n/2] + 1$ можно выразить через величины $a_1, \dots, a_{n_1}$ посредством рациональных функций. Для произвольного n затруднительно явно выписать вид этих функций (ниже это будет сделано для $n = 3, 4, 5$), однако мы выразим $(a_{n_1+1}, \dots, a_n)$ через $(a_1, \dots, a_{n_1+1})$ при помощи композиции весьма простых рациональных отображений.

Здесь имеется некоторая тонкость. Знаменатели функций указанных рациональных отображений могут обращаться в нуль на некоторых векторах $(a_1, \dots, a_{n_1})$, определяющих левую часть струны. По этой причине решение системы невозможно для некоторого подмножества, представляющего собой множество нулей конечного фиксированного набора многочленов. Подмножество такого вида назовем *алгебраически пренебрежимым*.

Обратимся теперь к задаче восстановления квазиоднородной струны по ее “левой части”, заданной вектором $(a_1, \dots, a_{n_1})$; здесь $a_j > 0$ при $j = 1, \dots, n_1$. Если этот вектор не входит в упомянутое алгебраически пренебрежимое множество, то указанный алгоритм дает $(a_{n_1+1}, \dots, a_n)$. Если все числа a_k , $k = n_1 + 1, \dots, n$, положительны, то задача восстановления квазиоднородной струны по ее левой части решена; в противном случае такой квазиоднородной струны не существует.

Возникает следующий вопрос: как задать левую часть струны $(a_1, \dots, a_{n_1})$, где $a_k > 0$ для всех $k = 1, \dots, n_1$, чтобы полученная (упомянутым методом восстановления) правая часть $(a_{n_1+1}, \dots, a_n)$ тоже удовлетворяла условию $a_k > 0$, $k = n_1, \dots, n$. Ответ на этот вопрос (для любого n) не получен.

В заключение этого раздела выпишем явные формулы восстановления квазиоднородной струны, а также исследуем вопрос относительно положительности чисел a_k для случая $n = 3, 4, 5$.

В случае $n = 3, 4$ правая часть струны состоит из единственного звена и формулы восстановления имеют вид:

для трехзвенной струны

$$a_3 = a_2 \frac{3a_2 - a_1}{a_1 + a_2};$$

для четырехзвенной струны

$$a_4 = a_3 \frac{a_3(a_2 + a_1) + a_2(a_2 - a_1)}{a_3(a_2 + a_1) - a_2(a_2 - a_1)}.$$

Для пятизвенной струны ($n = 5$) правая часть задается числами a_4, a_5 ; они выражаются через левую часть a_1, a_2, a_3 по формулам

$$H_3^1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}, \quad H_3^2 = \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_3}{a_2}, \quad H_3^3 = \frac{a_2}{a_1 a_3},$$

$$A = \frac{C_5^1 (H_3^3)^2 - C_5^3 H_3^1 H_3^3 + C_5^5 (H_3^1)^2}{C_5^3 H_3^3 - C_5^1 H_3^2 H_3^3 - C_5^5 H_3^1},$$

$$B = \frac{C_5^5(H_3^3 - H_3^1 H_3^2)}{C_5^3 H_3^3 - C_5^1 H_3^2 H_3^3 - C_5^5 H_3^1},$$

$$a_4 = \frac{B+1}{A}, \quad a_5 = \frac{B+1}{AB}.$$

Легко заметить, что уже для трехзвенной струны при некоторых положительных a_1, a_2 полученное a_3 отрицательно.

Приведем условия на левую часть квазиоднородной струны для $n = 3, 4, 5$.

Ограничения для трехзвенной струны имеют вид

$$\begin{cases} a_1 > 0, \\ a_2 > \frac{a_1}{3}. \end{cases}$$

Для четырехзвенной струны

$$\begin{cases} a_1 > 0, & a_2 > 0, \\ a_3 > a_2 \left| \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} \right|. \end{cases}$$

Наконец, для записи ограничений на левую часть пятизвенной струны удобно ввести два числа $C_1 = 1 - \sqrt{4/5}$, $C_2 = 1 + \sqrt{4/5}$.

Тогда эти условия выглядят так:

$$\begin{cases} a_1 > 0, & a_2 > 0, & a_3 > 0, \\ a_3 < a_2 \frac{a_2/C_1 - a_1}{a_2 + a_1}, \\ a_3 > a_2 \frac{a_2/C_2 - a_1}{a_2 + a_1}, \\ a_3 > a_2 \frac{(a_2/C_2 - a_1)(a_1 - a_2/C_2)}{(5a_2 + a_1)(a_2 + a_1)}. \end{cases}$$

Перейдем к подробному изложению.

2. Задача о восстановлении квазиоднородной струны по ее левой части; сведение к алгебраической задаче. Для задачи (1) и любого отрезка $\Delta = [\alpha, \beta] \subset [0, b]$ определим матрицу перехода $M^\Delta(\lambda) = \{(M_{jk}^\Delta(\lambda))\}_{j,k=1}^2$ равенством

$$(y(\beta, \lambda), y'(\beta, \lambda)) = (y(\alpha, \lambda), y'(\alpha, \lambda)) M^\Delta(\lambda)$$

для любого решения $y(x, \lambda)$ уравнения (1).

Спектр задачи (1), (2) определяется уравнением

$$M_{21}^\Delta(\lambda) = 0. \quad (5)$$

Воспроизведем (с незначительной модификацией) полученные в [1] формулы для матриц перехода на $[0, b]$. Для каждого отрезка $[c_{k-1}, c_k]$ матрица перехода вычисляется непосредственно и имеет вид

$$M_k = \begin{pmatrix} \cos(\alpha\lambda) & a_k i \sin(\alpha\lambda) \\ \frac{1}{a_k} i \sin(\alpha\lambda) & \cos(\alpha\lambda) \end{pmatrix}.$$

Введя обозначение $t = -\operatorname{tg}^2(\alpha\lambda)$, получим

$$M_k = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \begin{pmatrix} 0 & t^{-1/4} \\ t^{1/4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a_k} \\ a_k t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t^{-1/4} \\ t^{1/4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода для всей струны $[0, b]$ имеет вид $M = M_1 \cdots M_n$; условимся записывать такое произведение в виде $M = \prod_{k=1}^n M_k$. Таким образом,

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1-t)^{n/2}}} \begin{pmatrix} 0 & t^{-1/4} \\ t^{1/4} & 0 \end{pmatrix} A(t) \begin{pmatrix} 0 & t^{-1/4} \\ t^{1/4} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$A(t) = \prod_{k=1}^n \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a_k} \\ a_k t & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Уравнение (5), переписанное при помощи матрицы $A(t)$, сводится к $(A(t))_{12} = 0$. С другой стороны, для однородной струны уравнение, задающее спектр (выраженное через указанный параметр t), имеет вид $(1+t)^n - (1-t)^n = 0$ (более подробные разъяснения даны в [1]; впрочем они достаточно очевидны). Отсюда получаем условия квазиоднородности в виде

$$(A(t))_{12} = C((1+t)^n - (1-t)^n), \quad (7)$$

где матрица $A(t)$ задается равенством (6); C – число, отличное от нуля. (Заметим, что приведенная вначале теорема получается в [1] из (7) путем явного вычисления левой части; для наших целей этого не нужно.)

Перепишем (7) в подробном виде:

$$\left(\prod_{k=1}^{n_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a_k} \\ a_k t & 1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{k=n_1+1}^n \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a_k} \\ a_k t & 1 \end{bmatrix} \right)_{12} = C((1+t)^n - (1-t)^n). \quad (8)$$

Тогда задача восстановления сводится к следующей алгебраической задаче. Даны $a_1, \dots, a_{n_1}$, $a_k \neq 0$. Найти $a_{n_1+1}, \dots, a_n$ такие, что справедливо тождество (8) для некоторого числа C . Решение этой задачи опирается на исследование класса матриц (элементы которых – многочлены), которые мы назовем *выделенными*; им посвящен следующий раздел.

3. Выделенные матрицы. Рассмотрим матрицу

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где a, b, c, d – многочлены, удовлетворяющие следующим условиям (для некоторого фиксированного n):

1) матрица, составленная из степеней многочленов $a(t), b(t), c(t), d(t)$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \left[\frac{n}{2} \right] & \left[\frac{n-1}{2} \right] \\ \left[\frac{n+1}{2} \right] & \left[\frac{n}{2} \right] \end{pmatrix}; \quad (10)$$

$$2) \det(A) = (1 - t)^n;$$

$$3) a(0) = 1, c(0) = 0, d(0) = 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем матрицу *выделенной*, если она удовлетворяет условиям 1)–3). Число n назовем *степенью выделенной матрицы*.

Рассмотрим необходимые для наших исследований свойства выделенных матриц.

Заметим, что для каждого натурального n выделенные матрицы степени n образуют алгебраическое подмногообразие V_n в линейном пространстве всех матриц вида (9), в которых степени многочленов $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ не превосходят чисел, указанных в матрице (10) (на соответственных местах). Нам понадобятся также собственные (т.е. не совпадающие с V_n) подмногообразия из V_n , в которых коэффициенты многочленов $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ подчинены системе полиномиальных уравнений. Такие подмногообразия назовем алгебраически пренебрежимыми множествами (этот термин уже использовался выше в другой ситуации).

СВОЙСТВО 1. Для всех выделенных матриц, лежащих вне некоторого алгебраически пренебрежимого множества, многочлены, стоящие в одной строке (а также многочлены, стоящие в одном столбце), взаимно просты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество выделенных матриц A (см. формулу (9)) таких, что многочлены $a(t)$ и $b(t)$ не взаимно просты и, следовательно, уравнения $a(t) = 0$ и $b(t) = 0$ имеют один и тот же корень t_0 . Но тогда $\det A(t_0) = 0$. Отсюда в силу свойства 2), указанного в определении выделенной матрицы, следует, что $t_0 = 1$, т.е. $a(1) = 0$ и $b(1) = 0$. Очевидно, что множество матриц, подчиненных полученным ограничениям, алгебраически пренебрежимо.

Таким образом, свойство 1 доказано.

СВОЙСТВО 2. Для любых взаимно простых многочленов $a(t)$, $b(t)$ таких, что $a(0) = 1$, $\deg a(t) = [n/2]$, $\deg b(t) = [(n-1)/2]$, существует единственная выделенная матрица, первая строка которой есть $(a(t), b(t))$.

Аналогично, для взаимно простых многочленов $b(t)$, $d(t)$ таких, что $d(0) = 1$, $\deg b(t) = [(n-1)/2]$, $\deg d(t) = [n/2]$, существует единственная выделенная матрица, последний столбец которой есть

$$\begin{pmatrix} b(t) \\ d(t) \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны взаимно простые многочлены $a(t)$, $b(t)$, причем $a(0) = 1$, $\deg a(t) = [n/2]$, $\deg b(t) = [(n-1)/2]$.

Покажем, что существует единственная пара многочленов $c(t)$, $d(t)$ таких, что выполняются условия

$$\deg c(t) = \left[\frac{n+1}{2} \right], \quad \deg d(t) = \left[\frac{n}{2} \right],$$

$$a(t)d(t) - b(t)c(t) = (1 - t)^n,$$

$$c(0) = 0, \quad d(0) = 1.$$

(Это соответствует требованиям определения выделенной матрицы.)

Пусть n нечетно, $n = 2k + 1$. Тогда $\deg a(t) = k$, $\deg b(t) = k$. Так как многочлены $a(t)$, $b(t)$ взаимно просты, существуют такие многочлены $p(t)$, $q(t)$, что $a(t)p(t) - b(t)q(t) = 1$; отсюда получаем равенство $a(t)x(t) - b(t)y(t) = (1-t)^{2k+1}$ для некоторых многочленов $x(t)$, $y(t)$. Можно выбрать многочлены $x(t)$, $y(t)$ так, что $\deg x(t) < k$ (в противном случае, применяя “деление с остатком”, записываем $x(t)$ в виде $x(t) = b(t)u(t) + x_1(t)$, $\deg x(t) < \deg b(t) = k$ и заменяем $x(t)$ и $y(t)$ на $x_1(t)$ и $y(t) - a(t)u(t)$ соответственно).

Определим теперь многочлены $c(t)$, $d(t)$ по формулам $c(t) = y(t) - y(0)a(t)$, $d(t) = x(t) - y(0)b(t)$. Легко видеть, что они удовлетворяют ограничениям, приведенным в начале доказательства.

Докажем единственность пары многочленов $c(t)$, $d(t)$, удовлетворяющей этим ограничениям. Допустим, найдена еще одна пара многочленов $c^0(t)$, $d^0(t)$ с указанными свойствами. Тогда $a(t)d^0(t) - b(t)c^0(t) = a(t)d(t) - b(t)c(t)$, откуда получаем $a(t)(d^0(t) - d(t)) = b(t)(c^0(t) - c(t))$. Так как многочлены $a(t)$, $b(t)$ взаимно просты, то $d^0(t) - d(t)$ делится на $b(t)$. Принимаем во внимание, что $\deg(d^0(t) - d(t)) \leq k$, $\deg b(t) = k$. Если $\deg(d^0(t) - d(t)) < k$, то имеем $d^0(t) - d(t) = 0$. Если же $\deg(d^0(t) - d(t)) = k$, то $d^0(t) - d(t) = C \cdot b(t)$ и $C \cdot a(t) = c^0(t) - c(t)$ (для некоторого $C \neq 0$). Последнее равенство при $t = 0$ вступает в противоречие со свойством 3), указанным в определении выделенной матрицы (т.е. $a(0) = 1$, $c(0) = 0$). Итак, $d^0(t) = d(t)$, $c^0(t) = c(t)$, что и утверждалось.

Мы доказали свойство 2 для нечетного n ; случай четного n разбирается аналогично.

Свойство 3. Любая выделенная матрица, лежащая вне некоторого алгебраически пренебрежимого множества, представима в виде

$$\prod_{j=1}^n \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a_j} \\ a_j t & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Обратно: любая матрица, заданная формулой (11), является выделенной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение индукцией по n (степени выделенной матрицы).

Из определения выделенной матрицы немедленно следует, что выделенная матрица степени $n = 1$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} \\ at & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть для $n = m - 1$ утверждение доказано. Докажем, что тогда утверждение справедливо и для $n = m$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

– выделенная матрица степени m .

Рассмотрим для некоторого $h \neq 0$ матрицу

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{h} \\ ht & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a(t) - hb(t)t}{1-t} & \frac{hb(t) - a(t)}{h(1-t)} \\ \frac{c(t) - hd(t)t}{1-t} & \frac{hd(t) - c(t)}{h(1-t)} \end{pmatrix}$$

и потребуем, чтобы стоящая в правой части равенства матрица состояла из многочленов. Это возможно лишь при выполнении условий

$$\begin{cases} a(1) - hb(1) = 0, \\ c(1) - hd(1) = 0. \end{cases}$$

Отбрасываем все матрицы, для которых $a(1) = 0$ или $b(1) = 0$ (они образуют алгебраически пренебрежимое множество). Из первого уравнения получаем $h = a(1)/b(1)$. Найденное h удовлетворяет также второму уравнению, ибо согласно определению выделенных матриц $a(1)d(1) - b(1)c(1) = 0$.

Положим

$$A^{[m-1]} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{b(1)}{a(1)} \\ \frac{a(1)}{b(1)}t & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Элементы этой матрицы многочлены. Без труда проверяется, что она выделенная со степенью $n = m - 1$.

В силу предположения индукции

$$A^{[m-1]} = \prod_{j=1}^{m-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a_j} \\ a_j t & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица A может быть записана так:

$$A = \prod_{j=1}^m \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a_j} \\ a_j t & 1 \end{pmatrix},$$

где $a_m = a(1)/b(1)$.

Мы доказали первое утверждение, содержащееся в свойстве 3. Второе утверждение немедленно следует из определения выделенной матрицы.

Свойство 4. Возьмем натуральное число n и положим $n_1 = [n/2] + 1$, $n_2 = [(n-1)/2]$ ($n_1 + n_2 = n$). Пусть дан многочлен f , $\deg f = n_2$. Тогда для любой выделенной матрицы A_1 степени n_1 , не входящей в некоторое алгебраически пренебрежимое множество, существует единственная выделенная матрица A_2 степени n_2 такая, что

$$(A_1 \cdot A_2)_{12} = \lambda f \quad (12)$$

для некоторого $\lambda \neq 0$. (Упомянутое алгебраически пренебрежимое множество зависит от многочлена f .)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n четно, $n = 2k$, $n_1 = k + 1$, $n_2 = k - 1$.

Положим

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Степени многочленов a_1 , b_1 , c_1 , d_1 – элементы матрицы

$$\begin{pmatrix} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor & \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \\ \left\lfloor \frac{k+2}{2} \right\rfloor & \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \end{pmatrix}.$$

Рассуждая так же, как при доказательстве свойства 2, получаем такие многочлены $x(t)$, $y(t)$, что

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = f, \quad \deg x \leq \left\lfloor \frac{k-2}{2} \right\rfloor, \quad \deg y \leq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor.$$

Можно считать, что имеют место равенства $\deg x = \lfloor (k-2)/2 \rfloor$, $\deg y = \lfloor (k-1)/2 \rfloor$. Действительно, коэффициенты многочленов $x(t)$, $y(t)$ выражаются через коэффициенты многочленов $a_1(t)$, $b_1(t)$ при помощи рациональных функций (ибо $x(t)$, $y(t)$ получаются из $a_1(t)$, $b_1(t)$ алгоритмом деления с остатком). Нарушение наших равенств означает, что старшие коэффициенты многочленов $x(t)$, $y(t)$ обращаются в нуль, что накладывает систему полиномиальных соотношений на коэффициенты многочленов $a_1(t)$, $b_1(t)$. Таким образом, эти равенства могут нарушаться лишь для алгебраически пренебрежимого множества выделенных матриц A_1 . Итак, мы можем считать, что указанные равенства имеют место. Эти же соображения позволяют считать, что $y(0) \neq 0$.

Введем величину $\lambda = 1/y(0)$ и многочлены $b_2(t) = \lambda x(t)$, $d_2(t) = \lambda y(t)$. Получим

$$a_1(t)b_2(t) + b_1(t)d_2(t) = \lambda f(t), \quad \deg b_2 = \left\lfloor \frac{k-2}{2} \right\rfloor, \quad \deg d_2 = \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor.$$

Сравнивая полученное тождество с уравнением (12) заметим, что многочлены b_2 , d_2 могут составлять столбец искомой выделенной матрицы A_2 , удовлетворяющей заданному матричному уравнению. Теперь для восстановления всей матрицы A_2 достаточно использовать свойство 2.

Нетрудно показать, что полученная матрица A_2 – единственная выделенная матрица, удовлетворяющая уравнению (12).

4. Восстановление квазиоднородной струны по ее левой части. Изложенное в предыдущем разделе приводит к следующему способу восстановления квазиоднородной струны по ее левой части $a_1, \dots, a_{n_1}$, $n_1 = \lfloor n/2 \rfloor + 1$.

По положительным числам $a_1, \dots, a_{n_1}$ строим матрицу

$$A_1 = \prod_{k=1}^{n_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a_k} \\ a_k t & 1 \end{pmatrix}.$$

Она является выделенной в силу свойства 3. Затем, используя свойство 4, найдем выделенную матрицу A_{n_2} , взяв в качестве функции $f(t)$ многочлен $(1+t)^n - (1-t)^n$. Наконец, используя свойство 3, находим величины $(a_{n_1+1}, \dots, a_n)$.

Эти действия выполнимы для всех $a_1, \dots, a_{n_1}$, лежащих вне алгебраически пренебрежимого множества.

Полученные в результате вычислений величины $a_1, \dots, a_n$ дают решение задачи восстановления квазиоднородной струны, если $a_j, j = n_1 + 1, \dots, n$, положительны; в противном случае не существует n -звенной квазиоднородной струны с левой частью $a_1, \dots, a_{n_1}$ ($n_1 = [n/2] + 1$).

В следующем приложении мы запишем этот алгоритм в виде, удобном для вычисления на ЭВМ.

5. Приложение. Вычисление элементов выделенной матрицы. Рассмотрим матрицу

$$A = \prod_{k=1}^n \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a_k} \\ a_k t & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что искать элементы матриц A в явном виде можно используя схему, вполне аналогичную треугольнику Паскаля (см. рис. 1). (Отличие от треугольника Паскаля состоит в том, что суммирование чисел выполняется с весами, расположенными над стрелками.)

Числа $\{H_n^k\}_{k=0}^n$ являются коэффициентами мономов, суммы которых образуют верхнюю строку матрицы A , так что

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{[n/2]} H_n^{2k} t^k & \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} H_n^{2k+1} t^k \\ * & * \end{pmatrix}.$$

(Знаком * отмечены элементы матрицы, отыскивать которые не требуется.)

Рис. 1. Получение выделенной матрицы по известной части струны

Этой же схемой можно пользоваться для решения “обратной” задачи: по данной выделенной матрице восстановить числа a_k .

Таким образом, процедура вычисления параметров правой части квазиоднородной струны по ее известной левой части сводится к несложным манипуляциям, связанным с указанной схемой.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Р. С. Исмагилову за внимание к проблеме, постановку задачи и терпение.

Также, автор выражает благодарность рецензенту за лестную оценку работы и помощь, оказанную автору, в виде конструктивных замечаний, после исправления которых, статья заметно улучшилась.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. С. Исмагилов, П. С. Саркисян, “О квазиоднородных струнах”, *Матем. заметки*, **78:2** (2005), 317–320.

П. С. Саркисян

ЗАО “ОЦВ”

E-mail: pavlik_71@mail.ru

Поступило

31.08.2005

Исправленный вариант

07.02.2007