Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Чеботарев, А. С. Савенкова, Вариационные неравенства в магнитной гидродинамике, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 1, 135–149

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3761>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:20:46

Вариационные неравенства в магнитной гидродинамике

А. Ю. Чеботарев, А. С. Савенкова

Исследуются субдифференциальные начально-краевые задачи для уравнений магнитной гидродинамики (МГД) вязкой несжимаемой жидкости. Строится теория разрешимости абстрактного эволюционного неравенства в гильбертовом пространстве для операторов с квадратичной нелинейностью. Полученные результаты применяются для изучения МГД течений. Для трехмерных течений доказано существование слабого решения вариационных неравенств “в целом” по времени, а для двумерных течений – существование и единственность сильного решения.

Библиография: 9 названий.

1. Постановки субдифференциальных задач

Рассмотрим течение однородной вязкой несжимаемой и проводящей жидкости в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2$ или 3 , со связной границей $\Gamma = \partial\Omega$. Течение будем моделировать уравнениями магнитной гидродинамики (МГД) в безразмерных переменных [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \operatorname{rot} u \times u = -\nabla h + S \cdot \operatorname{rot} B \times B, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{rot} E = 0, \quad j = \operatorname{rot} B = \frac{1}{\nu_m} (E + u \times B) + g, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad \operatorname{div} B = 0. \quad (3)$$

Здесь u , B , E и j – векторные поля скорости, магнитной индукции, электрической напряженности и плотности тока соответственно, h – полный напор течения, $\nu = 1/Re$, $\nu_m = 1/R_m$, $S = M^2/(Re R_m)$, где Re – число Рейнольдса, R_m – магнитное число Рейнольдса, M – число Гартмана. Через g обозначена плотность сторонних токов.

К уравнениям (1)–(3) добавляют начальные условия

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad B|_{t=0} = B^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

Работа выполнена при поддержке ДВО РАН (грант № 05-III-A-01-137), Рособразования (грант № 56566), фонда содействия отечественной науке.

и условия на границе Γ области течения

$$n \times u = 0, \quad B \cdot n = 0 \quad (x, t) \in S = \Gamma \times (0, T), \quad (5)$$

где n – единичный вектор внешней нормали к границе Γ .

В двумерном случае плотность тока, электрическое поле и выражения $\operatorname{rot} B$, $u \times B$ являются скалярами, при этом

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} B &= \frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2}, & u \times B &= Z(u) \cdot B, \\ \operatorname{rot} B \times v &= \operatorname{rot} B Z(v), & \operatorname{rot} E &= -Z(\nabla E). \end{aligned}$$

Здесь $Z(v) = \{-v_2, v_1\}$ – поворот вектора $\{v_1, v_2\}$ на $\pi/2$.

Рассмотрим следующие задачи для модели (1)–(5).

ПОСТАНОВКА 1 (Гидродинамическая задача). Найти решение системы (1)–(3), удовлетворяющее начальным и краевым условиям (4), (5) и такое, что

$$h(x, t) \in \partial\varphi(u_n(x, t), x), \quad n \times E = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (6)$$

Здесь $u_n = u \cdot n$, через $\varphi: \mathbb{R} \times \Gamma \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$ обозначена выпуклая полунепрерывная снизу по первому аргументу функция, а через $\partial\varphi$ обозначен ее субдифференциал по первому аргументу, т.е. множество

$$\partial\varphi(a, x) = \{z \in \mathbb{R} : \varphi(b, x) - \varphi(a, x) \geq z(b - a) \quad \forall b \in \mathbb{R}\}.$$

Соотношение (6) рассматривается поточечно, как связь между h и u_n в каждой точке $x \in \Gamma$. Наличие второго аргумента у функции φ в (6) связано с тем, что граничные условия могут иметь различный характер на разных участках границы Γ . В качестве иллюстрации условия (6) приведем примеры краевых условий, получаемых из (6).

Пусть $\varphi(\lambda, x) = l(x) \cdot \lambda$, где $l(x)$ – заданная на Γ функция. Тогда $\partial\varphi(\lambda, x) = \{l(x)\}$ и условие (6) означает задание на Γ полного напора течения h ,

$$h = l(x). \quad (7)$$

Рассмотрим другой пример. Пусть Γ_1 – участок втекания жидкости в область Ω , Γ_2 – участок вытекания, Γ_0 – непроницаемая часть границы. Определим функцию $\varphi(\lambda, x)$ следующим образом:

$$\varphi(\lambda, x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \Gamma_0, \lambda = 0, \\ l(x) \cdot \lambda, & \text{если } x \in \Gamma_1, \lambda \leq 0 \text{ или } x \in \Gamma_2, \lambda \geq 0, \\ +\infty, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\partial\varphi(\lambda, x) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } x \in \Gamma_0, \lambda = 0, \\ (l(x), +\infty), & \text{если } x \in \Gamma_1, \lambda = 0, \\ (-\infty, l(x)], & \text{если } x \in \Gamma_2, \lambda = 0, \\ l(x), & \text{если } x \in \Gamma_1, \lambda < 0 \text{ или } x \in \Gamma_2, \lambda > 0, \\ \emptyset, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, субдифференциальное условие (6) приводит к односторонним краевым условиям:

$$\begin{aligned} u_n(x) &\leq 0, & h &\geq l(x), & u_n(h-l) &= 0, & \text{если } x \in \Gamma_1, \\ u_n(x) &\geq 0, & h &\leq l(x), & u_n(h-l) &= 0, & \text{если } x \in \Gamma_2, \\ u_n(x) &= 0, & & & & & \text{если } x \in \Gamma_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Постановка 2 (Обратная задача МГД). Пусть плотность сторонних токов g неизвестна. Требуется найти функцию g такую, что $\operatorname{rot} g = \nabla r$, и соответствующее решение системы (1)–(3), удовлетворяющее условиям (4), (5) и дополнительному субдифференциальному включению

$$n \times (\nu_m g + E) \in \partial \Psi(B(x, t), x), \quad u \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (9)$$

Здесь $\Psi: \mathbb{R}^d \times \Gamma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – выпуклая полунепрерывная снизу по первому аргументу функция, а $\partial \Psi$ – ее субдифференциал по первому аргументу. Рассмотрим примеры.

1. Пусть $\psi(B) = l \cdot B$, где $l = l(x)$, $x \in \Gamma$, – заданная вектор-функция, $l \cdot n = 0$. В этом случае получаем из (9) краевое условие

$$n \times (\nu_m g + E) = l, \quad x \in \Gamma. \quad (10)$$

2. Определим функцию Ψ следующим образом:

$$\psi(B) = \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda B^2, & \text{если } |B| \leq b_0, \\ +\infty & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $b_0 > 0$ – заданное число, ограничивающее модуль касательной компоненты магнитного поля, $\lambda = \lambda(x) \geq 0$ – заданная скалярная функция. Тогда субдифференциальное условие (9) приводит к следующим ограничениям на границе Γ :

$$\begin{aligned} n \times (\nu_m g + E) &= \lambda B, & \text{если } |B| < b_0, \\ n \times (\nu_m g + E) &= (\lambda + \sigma) B, & \text{если } |B| = b_0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\sigma = \sigma(x, t) \geq 0$ скалярная функция (заранее неизвестная).

Математические вопросы для классических краевых задач в модели (1)–(3) изучены в [1]. Субдифференциальные краевые задачи для уравнений гидродинамики и уравнений Максвелла изучались в [2; гл. 6], [3], [4]. Постановки 1, 2 будут изучены на основе развития теории абстрактных эволюционных неравенств Навье–Стокса [5], [6], представленной в следующем разделе.

2. Абстрактные неравенства Навье–Стокса

Пусть V и H – пара вещественных сепарабельных гильбертовых пространств таких, что V плотно в пространстве H , вложение V в H компактно и $V \subset H = H' \subset V'$, где H' и V' сопряженные с H и V . Нормы пространств V , V' и H будем обозначать через $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_*$ и $|\cdot|$ соответственно; $(\cdot, \cdot)$ – отношение двойственности между пространствами V' и V и скалярное произведение в H . В дальнейшем, если X – банахово пространство, то через $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$ (соответственно $C(0, T; X)$), обозначается пространство L^p (соответственно класс C) функций, определенных на $[0, T]$ со значениями в X . Через $D'(0, T)$ будем обозначать пространство распределений (обобщенных функций) на $(0, T)$, через W_p^l – пространство Соболева функций, интегрируемых с p -й степенью вместе с обобщенными производными до порядка l .

Рассмотрим следующие отображения:

- $A: V \rightarrow V'$ – линейный непрерывный оператор такой, что

$$(Av, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \alpha > 0, \quad (Av, w) = (Aw, v) \quad \forall v, w \in V; \quad (12)$$

- $\mathcal{B}[u] = \mathcal{B}(u, u)$, где $\mathcal{B}(u, v): V \times V \rightarrow V'$ – билинейное непрерывное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

$$(\mathcal{B}(u, v), v) = 0 \quad \forall u, v \in V, \quad (13)$$

$$\text{отображение } \mathcal{B}[u]: V \rightarrow V' \text{ усиленно непрерывно;} \quad (14)$$

- $\Phi: V \rightarrow (-\infty, +\infty]$ – выпуклый полунепрерывный снизу функционал, $\Phi \not\equiv +\infty$. Обозначим через K эффективную область функционала Φ ,

$$K = \{v \in V : \Phi(v) < +\infty\}.$$

Будем считать, что функционал Φ непрерывен на множестве K . Следовательно, $\partial\Phi(w) \neq \emptyset \quad \forall w \in K$ [7; гл. 1].

Пусть $y_0 \in H$, $f(t) \in L^2(0, T; V')$ – известные элементы. Рассмотрим проблему разрешимости следующего вариационного неравенства.

Задача А. Пусть

$$f(t) \in y' + Ay + \mathcal{B}[y] + \partial\Phi(y), \quad y(0) = y_0. \quad (15)$$

Здесь и далее $y' = \partial y / \partial t$. Определим функционал

$$G(y) = \begin{cases} \int_0^T \Phi(y(t)) dt, & \text{если } \Phi(y(\cdot)) \in L^1(0, T), \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элемент $y \in L^2(0, T; V)$ называется *слабым решением* задачи А, если $G(y) < +\infty$ и справедливо неравенство

$$\int_0^T (z' + Ay + \mathcal{B}[y] - f, y - z) dt + G(y) - G(z) \leq \frac{|y_0 - z(0)|^2}{2} \quad (16)$$

для всех z таких, что $z \in L^2(0, T; V)$, $z' \in L^2(0, T; V')$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть билинейный оператор $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию

$$|(\mathcal{B}(w, v), w)| \leq k_1 \|w\|^{1+\theta} \cdot |w|^{1-\theta} \cdot \|v\|, \quad (17)$$

где $\theta \in [0, 1)$, $k_1 > 0$ – постоянные, не зависящие от $v, w \in V$. Тогда для любого $f \in L^2(0, T; V')$ и произвольного элемента y_0 такого, что $y_0 \in \overline{K}^H$ (K^H – замыкание K в пространстве H), задача А имеет, по крайней мере, одно слабое решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Главная проблема при получении априорных оценок решения задачи А и, соответственно, при доказательстве теоремы 1 состоит в недифференцируемости в общем случае функционала Φ . Обозначим через Φ_λ регуляризацию Φ , определяемую следующим образом [8; с. 25]:

$$\Phi_\lambda(u) = \inf \left\{ \frac{\|u - v\|^2}{2\lambda} + \Phi(v) : v \in V \right\}, \quad u \in V, \quad \lambda > 0.$$

Свойства данной регуляризации Φ хорошо известны (см. [9; гл. 1]). В частности, Φ_λ является дифференцируемым по Фреше выпуклым отображением и при этом производная Φ_λ по Фреше совпадает с аппроксимацией Иосиды многозначного отображения $u \rightarrow \partial\Phi(u)$,

$$\nabla\Phi_\lambda = \frac{1}{\lambda} J(I - J_\lambda), \quad J_\lambda = (I + \lambda J^{-1} \partial\Phi)^{-1}.$$

Здесь I – единичный оператор; $J: V \rightarrow V'$ – отображение двойственности; $v^* = Jv$, если $(v^*, v) = \|v\|^2$.

Следующие свойства регуляризации Φ_λ несложным образом вытекают из ее определения [8; с. 76]:

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(w) &= \frac{1}{2\lambda} \|w - J_\lambda w\|^2 + \Phi(J_\lambda w), \\ \Phi(J_\lambda w) &\leq \Phi_\lambda(w) \leq \Phi(w), \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Phi_\lambda(w) = \Phi(w). \end{aligned} \quad (18)$$

В дальнейшем без ограничения общности будем предполагать, что $y_0 \in K$ и

$$\Phi(w) \geq \Phi(y_0) \quad \forall w \in V. \quad (19)$$

Действительно, в том случае если (19) не выполняется, мы всегда сможем сделать замену функционала Φ на функционал

$$\Phi_1(w) = \Phi(w) - (\chi, w - y_0), \quad \chi \in \partial\Phi(y_0),$$

добавляя субградиент χ в правую часть (15).

Рассмотрим в пространстве V полную систему элементов $\{v_1, v_2, \dots\}$. Пусть сначала

$$y_0 \in V_{m_0}, \quad m_0 - \text{натуральное число}, \quad y_0 = \sum_{j=1}^{m_0} g_j^0 v_j. \quad (20)$$

Определим галеркинские приближения $y_m(t)$ для решения вариационного неравенства (16):

$$y_m(t) = \sum_1^m g_{jm}(t)v_j, \quad m = 1, 2, \dots, \\ (y'_m + Ay_m + \mathcal{B}(y_m, y_m) + \nabla \Phi_\lambda(y_m) - f, v_j) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad y_m(0) = y_0. \quad (21)$$

Доказательство заключается в получении априорных оценок решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (21), которые позволят в пределе при $m \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 0$ получить из (21) вариационное неравенство (16). С этой целью умножим (21) на $(g_{jm} - g_j^0)$ и просуммируем по j от 1 до m , $m > m_0$. Тогда

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} |y_m - y_0|^2 + (Ay_m + \mathcal{B}(y_m, y_m) + \nabla \Phi_\lambda(y_m) - g, y_m - y_0) = 0. \quad (22)$$

Принимая во внимание свойства операторов A , $\mathcal{B}$ (условия (12), (13)) и условие (17), а также, учитывая монотонность градиента $\nabla \Phi_\lambda$ и условие (19), нетрудно стандартным образом получить из (22) следующее неравенство:

$$\frac{d}{dt} |y_m - y_0|^2 + \alpha \|y_m - y_0\|^2 \leq C_1(1 + |y_m - y_0|^2). \quad (23)$$

Здесь и далее через $C_1, C_2, \dots$ обозначаются положительные постоянные, не зависящие от m и λ .

В силу неравенства Гронуолла из (23) вытекают оценки

$$|y_m|^2 \leq C_2, \quad \int_0^T \|y_m(t)\|^2 dt \leq C_3. \quad (24)$$

На основании последних оценок и равенства (22), а также в силу неравенства

$$\Phi_\lambda(y_0) - \Phi_\lambda(y_m) \geq (\nabla \Phi_\lambda(y_m), y_0 - y_m),$$

заключаем, что

$$\int_0^T (\Phi_\lambda(y_m) - \Phi(y_0)) dt \leq \int_0^T (\Phi_\lambda(y_m) - \Phi_\lambda(y_0)) dt \leq C_4.$$

Тогда, учитывая свойства регуляризации (18), имеем

$$\int_0^T \|y_m - J_\lambda y_m\|^2 dt \leq C_5 \lambda, \quad \int_0^T \Phi_\lambda(y_m) dt \leq C_6, \quad \int_0^T \Phi(J_\lambda y_m) dt \leq C_7. \quad (25)$$

Получим теперь оценку, гарантирующую компактность последовательности y_m в $L^2(0, T; H)$. Умножим (21) на $(g_{jm}(t) - g_{jm}(s))$, $s \in (0, T)$, и просуммируем по $j = 1, \dots, m$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} |y_m(t) - y_m(s)|^2 + (Ay_m(t) + \mathcal{B}[y_m(t)] - f(t), y_m(t) - y_m(s)) \\ = (\nabla \Phi_\lambda(y_m(t)), y_m(s) - y_m(t)) \leq \Phi_\lambda(y_m(s)) - \Phi_\lambda(y_m(t)) \\ \leq \Phi_\lambda(y_m(s)) - \Phi(J_\lambda y_m(s)) \leq \Phi_\lambda(y_m(s)) - \Phi(y_0). \end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t на отрезке $[s, s+h]$, по s на $[0, T-h]$ и воспользуемся оценками (24), (25) и условиями (17). В результате нетрудно вывести оценку равномерной непрерывности для последовательности $y_m(t)$:

$$\int_0^{T-h} |y_m(s+h) - y_m(s)|^2 ds \leq C_8 h^{(1-\theta)/2}. \quad (26)$$

Оценки (24)–(26) позволяют утверждать, что существует элемент

$$y \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$$

и подпоследовательности $y_{m'}$, $\lambda' \rightarrow 0$, такие, что

$$\begin{aligned} y_{m'} &\rightarrow y \quad \text{слабо в } L^2(0, T; V), \\ &\quad * \text{-слабо в } L^\infty(0, T; H), \\ &\text{сильно в } L^2(0, T; H) \text{ при } m' \rightarrow \infty, \lambda' \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (27)$$

На основании (27) заключаем, что

$$J_{\lambda'} y_{m'} \rightarrow y \text{ слабо в } L^2(0, T; V),$$

и поэтому

$$G(y) < +\infty. \quad (28)$$

Пусть $z(t) = \sum_1^M c_j(t)v_j$, где $M > 0$ – фиксированное число, $c_j(t) \in C^1[0, T]$. Тогда из (21), умножая на $(g_{jm}(t) - c_j(t))$, интегрируя по частям на $(0, T)$, получаем

$$\int_0^T \{ (z' + Ay_m + \mathcal{B}(y_m, y_m) - f, y_m - z) + \Phi_\lambda(y_m) - \Phi_\lambda(z) \} dt \leq \frac{|y_0 - z(0)|^2}{2}. \quad (29)$$

Результаты о сходимости (27), (28) и свойства Φ_λ (см. (18)) позволяют из (29) получить вариационное неравенство (16), справедливое для произвольной функции z такой, что $z \in L^2(0, T; V)$, $z' \in L^2(0, T; V')$, поскольку система $\{\sum_1^M c_j(t)v_j : M \in \mathbb{N}\}$ является плотной в указанном пространстве. Отметим, что для предельного элемента y в (27) остаются справедливыми оценки (24), (26), где постоянные $C_1, C_2, \dots$ не зависят от величины $|y_0|$. Следовательно, для произвольного элемента $y_0 \in \overline{K}^H$ мы можем рассмотреть его аппроксимацию элементами $y_0^l \in K$, $l \rightarrow \infty$. Условие (20) при этом будет выполняться, например, если выбрать в качестве элемента v_1 указанный элемент y_0^l . Получив для таких “регуляризованных” начальных данных решения y_l неравенства (16), нетрудно затем совершить предельный переход при $l \rightarrow \infty$ на основании оценок вида (24), (26) для y_l . В результате получаем утверждение теоремы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элемент $y \in C(0, T; V)$ называется *сильным решением* задачи А, если

$$y' \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \quad G(y) < +\infty,$$

и при этом

$$f(t) \in y'(t) + Ay(t) + \mathcal{B}[y(t)] + \partial\Phi(y(t)) \quad \text{п.в. на } (0, T), \quad y(0) = y_0.$$

Пусть U, H_0 являются вещественными сепарабельными гильбертовыми пространствами, U — непрерывно и плотно вложенным в V , а норма в H_0 эквивалентна норме в H , и при этом $Av, \mathcal{B}[v] \in H_0$, если $v \in U$,

$$|Av| \leq k_2 \|v\|_U, \quad |\mathcal{B}[v]| \leq k_2 \|v\|_U^2 \quad \forall v \in U, \quad (30)$$

где $k_2 > 0$ не зависит от $v \in U$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$|(B(w, v), w)| \leq k_3 \|w\|^{1+\theta} \cdot |w|^{1-\theta} \cdot \|v\|^\gamma \cdot |v|^{1-\gamma}, \quad (31)$$

где постоянные $\theta, \gamma \in [0, 1/2]$, $k_3 > 0$ не зависят от $v, w \in V$. Тогда, для любых данных таких, что

$$\partial\Phi(y_0) \cap H_0 \neq \emptyset, \quad y_0 \in U \cap K, \quad f(0) \in H_0, \quad f, f' \in L^2(0, T; V'), \quad (32)$$

задача [A](#) имеет ровно одно сильное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим снова систему галеркинских приближений [\(21\)](#). При этом, поскольку U плотно в пространстве V , будем считать, что элементы базиса v_j принадлежат пространству U . Достаточно показать, что приближенное решение y_m удовлетворяет дополнительным априорным оценкам, которые обеспечат регулярность предельного элемента y , сформулированную в определении [2](#).

Умножим [\(21\)](#) на $g'_{jm}(t)$ и просуммируем по $j = 1, \dots, m$,

$$|y'_m(t)|^2 + (Ay'_m, y'_m) + (\mathcal{B}[y_m], y'_m) + (\nabla\Phi_\lambda(y_m), y'_m) = (f, y'_m). \quad (33)$$

Учитывая условия теоремы, из [\(33\)](#) выводим:

$$\text{последовательность } \{y'_m(0)\} \text{ ограничена в пространстве } H_0. \quad (34)$$

Далее, продифференцируем [\(21\)](#) по t , умножим на $g'_{jm}(t)$ и просуммируем по $j = 1, \dots, m$. В силу монотонности $\nabla\Phi_\lambda$ получаем неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |y'_m(t)|^2 + (Ay'_m, y'_m) + (\mathcal{B}(y'_m, y_m), y'_m) \leq (f', y'_m). \quad (35)$$

На основании оценок [\(24\)](#), условий [\(32\)](#) и неравенства Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(y'_m, y_m), y'_m| &\leq k_3 \|y'_m\|^{1+\theta} \cdot |y'_m|^{1-\theta} \cdot \|y_m\|^\gamma \cdot |y_m|^{1-\gamma} \\ &\leq \frac{\alpha}{2} \|y'_m\|^2 + C_6 \|y_m\|^{2\gamma/(1-\theta)} |y'_m|^2 + C_7 \|y'_m\|^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Подставляя эту оценку в [\(35\)](#), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |y'_m(t)|^2 + \frac{\alpha}{2} \|y'_m\|^2 \leq C_8 (\|y_m\|^2 + \|y_m\|^{2\gamma/(1-\theta)} |y'_m|^2 + \|f'\|_*).$$

Заметим также, что

$$\int_0^T \|y_m\|^{2\gamma/(1-\theta)} dt \leq C_g \left(\int_0^T \|y_m\|^2 dt \right)^{\gamma/(1-\theta)}. \quad (37)$$

Следовательно, на основании оценок (24), (34)–(37), воспользовавшись неравенством Гронуолла, выводим

$$\{y'_m\} \text{ ограничена в } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \quad (38)$$

Результата (38) вместе с оценками, полученными при доказательстве теоремы 1, достаточно для предельного перехода в системе галеркинских приближений (21) и получения для предельной функции $y(t)$ условий из определения 2.

Покажем далее единственность сильного решения задачи A. Если y_1, y_2 – сильные решения задачи A, то

$$(y'_i(t) + Ay_i + \mathcal{B}(y_i) - f, y_i(t) - v) + \Phi(y_i) - \Phi(v) \leq 0 \quad \forall v \in L^2(0, T; V), \quad i = 1, 2.$$

Для оценки разности $y = y_1 - y_2$ полагаем $v = y_2$ в неравенстве для y_1 и $v = y_1$ в неравенстве для y_2 . Складывая два неравенства и интегрируя по времени от 0 до t , получаем с учетом условия (31)

$$|y(t)|^2 + 2\alpha \int_0^t \|y(\tau)\|^2 d\tau \leq 2k_3 \int_0^t \|y\|^{1+\theta}.$$

Так как $y_2 \in L^\infty(0, T; H)$, то

$$|y(t)|^2 + 2\alpha \int_0^t \|y(s)\|^2 ds \leq \varepsilon \int_0^t \|y(s)\|^2 ds + C_\varepsilon \int_0^t \|y_2\|^{2\gamma/(1-\theta)} \cdot |y|^2 ds.$$

Заметим, что функция $t \rightarrow \|y_2(t)\|^{2\gamma/(1-\theta)}$ является интегрируемой, если $\theta, \gamma \in [0, 1/2]$. Поэтому на основании условия $y(0) = 0$ и неравенства Гронуолла заключаем, что $y(t) = 0, t \in (0, T)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как следует из (33), для получения оценки (34) условия (30) можно ослабить. Достаточно потребовать, чтобы

$$|Ay + \mathcal{B}[y] - f(0)| \leq k_4(1 + \|y\|_U^2).$$

3. Эволюционные МГД неравенства

Для применения теории неравенств Навье–Стокса, изложенной выше, сделаем переобозначения в модели (1)–(3):

$$B := \sqrt{S}B, \quad E := \sqrt{S}E, \quad g := \sqrt{S}g,$$

после чего она примет следующий вид:

$$u' - \nu \Delta u + \operatorname{rot} u \times u = -\nabla h + \operatorname{rot} B \times B, \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \quad (39)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad \operatorname{div} B = 0, \quad (40)$$

$$B' + \operatorname{rot} E = 0, \quad E = \nu_m(\operatorname{rot} B - g) - u \times B. \quad (41)$$

Постановки 1, 2 будем рассматривать далее для введенных “нормированных” функций B, E и g (для модели (39)–(41)).

3.1. Функциональные пространства и операторы. Пусть Ω – односвязная область в $\mathbb{R}^d$ со связной границей $\Gamma \in C^2$, $d = 2, 3$. Определим следующие пространства вектор-функций:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1 &= \{v \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \operatorname{div} v = 0, x \in \Omega, n \times v = 0, x \in \Gamma\}, \\ \mathcal{U}_2 &= \{v \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \operatorname{div} v = 0, x \in \Omega, n \cdot v = 0, x \in \Gamma\},\end{aligned}$$

V_1 – замыкание $\mathcal{U}_1$ по норме $W_2^1(\Omega)$, V_2 – замыкание $\mathcal{U}_2$ по норме $W_2^1(\Omega)$, H_1 – замыкание $\mathcal{U}_1$ по норме $L^2(\Omega)$, H_2 – замыкание $\mathcal{U}_2$ по норме $L^2(\Omega)$. Фактически $H_1 = H_2$. Здесь и далее через $W_p^l(\Omega)$ обозначаем пространства Соболева. Пусть

$$(u, v)_0 = \int_{\Omega} (u \cdot v) dx$$

– скалярное произведение в пространствах H_1 и H_2 . Выражение

$$((u, v)) = (\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v)_0 = \int_{\Omega} (\operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot} v) dx \quad \forall u, v \in V_1, V_2$$

задает скалярное произведение в V_1 и V_2 , при этом определяемая им норма эквивалентна норме пространства $W_2^1(\Omega)$.

Пусть

$$V = V_1 \times V_2, \quad H = H_1 \times H_2, \quad V \subset H = H' \subset V'.$$

При этом указанные вложения являются плотными и непрерывными. Нормы в пространствах V и H соответственно обозначаем $\|\cdot\|$, $|\cdot|$; $(\cdot, \cdot)$ – отношение двойственности между V' и V и скалярное произведение в H ; $(y, z) = (u, v)_0 + (B, w)_0$, $(y, z)_V = ((u, v)) + ((B, w)) \quad \forall y = \{u, B\}, z = \{v, w\}$.

Для сведения постановок 1, 2 к задаче А, определим отображения

$$A: V \rightarrow V', \quad \mathcal{B}: V \times V \rightarrow V',$$

используя соотношения

$$\begin{aligned}(Ay, z) &= \nu((u, v)) + \nu_m((B, w)), \\ (\mathcal{B}(y_1, y_2), z) &= (\operatorname{rot} u_1 \times u_2 - \operatorname{rot} B_2 \times B_1, v)_0 - (u_2 \times B_1, \operatorname{rot} w)_0,\end{aligned}$$

которые выполняются для всех $y = \{u, B\}$, $y_1 = \{u_1, B_1\}$, $y_2 = \{u_2, B_2\}$, $z = \{v, w\}$ из пространства V .

Заметим, что оператор A удовлетворяет условиям (12), а отображения $\mathcal{B}(y, z)$ и $\mathcal{B}[y] = \mathcal{B}(y, y)$ таковы, что $(\mathcal{B}(y, z), z) = 0$,

$$(\mathcal{B}[y], z) = (\operatorname{rot} u \times u, v)_0 - (\operatorname{rot} B \times B, v)_0 - (u \times B, \operatorname{rot} w)_0.$$

Из последнего соотношения вытекает, в силу компактности вложения пространств V_1 и V_2 в $L^4(\Omega)$, условие (14).

Учитывая мультипликативное неравенство ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$)

$$\|f\|_{L^4(\Omega)} \leq k \|f\|_{W_2^1(\Omega)}^{d/4} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}^{1-d/4},$$

из определения отображения $\mathcal{B}$ получаем оценку

$$(\mathcal{B}(y, z), y) \leq C \|z\| \cdot \|y\|^{1+d/4} \cdot |y|^{1-d/4},$$

где $C > 0$ не зависит от $y, z \in V$. Если $d = 2$, то справедливо более сильное неравенство

$$(\mathcal{B}(y, z), y) \leq C \|z\|^{1/2} \cdot |z|^{1/2} \cdot \|y\|^{3/2} \cdot |y|^{1/2}.$$

Таким образом, введенное отображение $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию (17), а в двумерном случае условию (31).

3.2. Исследование постановки 1. Пусть $y = \{u, B\}$ – достаточно гладкое решение начально-краевой задачи (1)–(6), $y_0 = \{u^0, B^0\}$. Определим функционал $\Phi(y)$, $y = \{u, B\} \in V$:

$$\Phi(y) = \begin{cases} \int_{\Gamma} \varphi(u_n, x) d\Gamma, & \text{если } \varphi(u_n(x), x) \in L^1(\Gamma), \\ +\infty & \text{иначе,} \end{cases} \quad (42)$$

который является выпуклым на V и слабо полунепрерывным снизу. Фактически функционал Φ определен здесь на пространстве V_1 , так как зависит только от первой компоненты элемента $y \in V$. Рассмотрим произвольный элемент $z = \{v, w\} \in V$, умножим уравнение (39) на $(v - u)$, уравнение (41) на $(w - B)$ и проинтегрируем по частям по области Ω , используя граничные условия для скорости, электрического и магнитного полей, а также для тестовых функций v, w . Складывая полученные соотношения и учитывая субдифференциальное условие (6), получаем неравенство

$$(y' + Ay + \mathcal{B}[y] - f, z - y) + \Phi(z) - \Phi(y) \geq 0, \quad (43)$$

где элемент $f \in V'$ определяется равенством

$$(f, z) = \nu_m(g, \operatorname{rot} w) \quad \forall z = \{v, w\} \in V.$$

Обратно, пусть $y = \{u, B\}$ – достаточно гладкое решение вариационного неравенства (43). Положим $z = \{u \pm v, B\}$, где $v \in C^{0\infty}(\Omega)$ – вектор-функция такая, что $\operatorname{div} v = 0$. Тогда $\Phi(z) = \Phi(y)$ и из неравенства (43) вытекает, что

$$(u', v)_0 + \nu(\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v)_0 + (\operatorname{rot} u \times u - \operatorname{rot} B \times B, v)_0 = 0. \quad (44)$$

Из (44) следует с учетом условия $\operatorname{div} u = 0$, что

$$u' + \nu \Delta u + \operatorname{rot} u \times u - \operatorname{rot} B \times B = -\nabla h \quad (45)$$

для некоторой функции h . На основании уравнения импульса (45) и неравенства (43), в котором следует положить $z = \{v, B\}$, нетрудно вывести неравенство

$$\int_{\Gamma} (\varphi(v_n, x) - \varphi(u_n, x) - h(v_n - u_n)) d\Gamma \geq 0.$$

Отсюда заключаем [7; с. 134], что $h \in \partial\varphi(u_n, x)$ почти всюду на Γ .

Для получения уравнений (41) полагаем в (43) $z = \{u, B \pm w\} \forall w \in V_2$. Тогда приходим к равенству

$$(B', w)_0 + (\nu_m \operatorname{rot} B - u \times B - \nu_m g, \operatorname{rot} w)_0 = 0. \quad (46)$$

Для произвольной вектор-функции $\hat{w} \in C^{0\infty}(\Omega)$ определим скалярную функцию ϕ такую, что

$$\Delta \phi = \operatorname{div} \hat{w} \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

Тогда $w = \hat{w} - \nabla \phi \in V_2$ и при этом $\operatorname{rot} w = \operatorname{rot} \hat{w}$, а в силу условия $\operatorname{div} B = 0$

$$(B, w)_0 = (B, \hat{w})_0.$$

Следовательно, соотношение (46) справедливо для любой функции $\hat{w} \in C^{0\infty}(\Omega)$. Полагая $E = \nu_m(\operatorname{rot} B - g) - u \times B$ и интегрируя в (46) по частям, получаем уравнения (41). Сравнивая первое уравнение в (41) с (46), заключаем, что $n \times E = 0$ на Γ .

Таким образом, постановка 1 сводится к абстрактному эволюционному неравенству (15) (задача А). Слабым (сильным) решением постановки 1 будем называть соответственно слабое (сильное) решение задачи А, для которой пространства и операторы определены выше.

Обозначим через $K_1 \subset V_1$ эффективную область определения функционала Φ . Следствием теорем 1, 2 является следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функционал Φ , определенный в (42) непрерывен на K_1 ,

$$g \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad B_0 \in H_1, \quad u_0 \in \overline{K}_1^{H_1}.$$

Тогда постановка 1 имеет, по крайней мере одно, слабое решение. Более того, в случае $d = 2$ при дополнительных условиях

$$\begin{aligned} \partial \Phi(u_0) \cap L^2(\Omega) &\neq \emptyset, \quad u_0 \in W_2^2(\Omega) \cap K_1, \quad B_0 \in W_2^2(\Omega) \cap V_2, \\ \operatorname{rot} g|_{t=0} &\in H_1, \quad g' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad \nu_m(\operatorname{rot} B_0 - g|_{t=0}) = u_0 \times B_0 \quad \text{на } \Gamma, \end{aligned}$$

постановка 1 имеет единственное сильное решение.

Как пример приложений полученного результата рассмотрим начально-краевые задачи для системы МГД уравнений с заданным на границе полным напором течения (7) и с односторонними граничными условиями (8). В первом случае $\varphi(\lambda, x) = l(x) \cdot \lambda$, $l \in L^2(\Gamma)$. Тогда $K_1 = V_1$, а функционал Φ на V определяется формулой

$$\Phi(v) = \int_{\Gamma} l v_n d\Gamma. \quad (47)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $l \in L^2(\Gamma)$, $g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $B_0 \in H_1$, $u_0 \in H_1$. Тогда задача (1)–(7) имеет, по крайней мере одно, слабое решение. В случае $d = 2$ при дополнительных условиях

$$\begin{aligned} l &\in W_2^{1/2}(\Gamma), \quad u_0 \in W_2^2(\Omega) \cap V_1, \quad B_0 \in W_2^2(\Omega) \cap V_2, \quad \operatorname{rot} g|_{t=0} \in H_1, \\ g' &\in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad \nu_m(\operatorname{rot} B_0 - g|_{t=0}) = u_0 \times B_0 \quad \text{на } \Gamma \end{aligned} \quad (48)$$

слабое решение является сильным и притом единственным.

Аналогичный результат справедлив и для односторонних краевых условий (8). В этом случае

$$K_1 = \{v \in V_1 : v_n \leq 0, x \in \Gamma_1; v_n \geq 0, x \in \Gamma_2; v_n = 0, x \in \Gamma_0\},$$

а функционал Φ определяется на K_1 формулой (47).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $l \in L^2(\Gamma)$, $g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $B_0 \in H_1$, $u_0 \in \overline{K_1}^{H_1}$. Тогда задача (1)–(6), (8) имеет, по крайней мере одно, слабое решение. В случае $d = 2$ при дополнительных условиях (48) слабое решение является сильным и притом единственным.

3.3. Исследование постановки 2. Рассмотрим $y = \{u, B\}$ – достаточно гладкое решение постановки 2. Определим для данного случая функционал $\Phi(y)$, $y = \{u, B\} \in V$:

$$\Phi(y) = \begin{cases} \int_{\Gamma} \psi(B) d\Gamma, & \text{если } \psi(B) \in L^1(\Gamma), u = 0 \text{ на } \Gamma, \\ +\infty & \text{иначе,} \end{cases}$$

который является выпуклым на V и слабо полунепрерывным снизу. Заметим, что эффективная область K функционала Φ такова, что $K = V_0 \times K_2$, где $V_0 = V_1 \cap V_2$, $K_2 = \{w \in V_2 : \psi(w) \in L^1(\Gamma)\}$.

Рассмотрим произвольный элемент $z = \{v, w\} \in V$, умножим уравнение (39) на $(v - u)$, уравнение (41) на $(w - B)$ и проинтегрируем по частям по области Ω , используя граничные условия для скорости, электрического и магнитного полей, а также для тестовых функций v, w . Используем также заданную структуру неизвестной плотности тока, в силу которой

$$(\operatorname{rot} g, w)_0 = (\nabla r, w)_0 = \int_{\Gamma} r w_n d\Gamma = 0.$$

Складывая полученные соотношения и учитывая субдифференциальное условие (9), получаем неравенство

$$(y' + Ay + \mathcal{B}[y], z - y) + \Phi(z) - \Phi(y) \geq 0. \quad (49)$$

Обратно, пусть $y = \{u, B\}$ – достаточно гладкое решение вариационного неравенства (49). Положим $z = \{u \pm v, B\}$, где $v \in C^{0\infty}(\Omega)$ – вектор-функция такая, что $\operatorname{div} v = 0$. Тогда $\Phi(z) = \Phi(y)$ и из неравенства (43) вытекает, так же, как при изучении постановки 1, выполнение уравнения импульса (45). Граничные условия для u вытекают из принадлежности u к пространству $V_0 = V_1 \cap V_2$.

Далее полагаем в (49) $z = \{u, B \pm w\} \forall w \in V_0$. Тогда приходим к равенству

$$(B' + \operatorname{rot}(\nu_m \operatorname{rot} B - u \times B), w)_0 = 0.$$

Следовательно,

$$B' + \operatorname{rot}(\nu_m \operatorname{rot} B - u \times B) = \nu_m \nabla r,$$

причем $\Delta r = 0$. Последнее условие позволяет представить ∇r в виде вихря, $\nabla r = \text{rot } g$, и обозначив

$$E = \nu_m \text{rot } B - u \times B - \nu_m g,$$

получаем уравнения (41). Наконец, умножая первое уравнение в (41) на $(B - w)$, где $w \in V_2$, интегрируя по частям по Ω и сравнивая с неравенством (49), где выбрано $z = \{u, w\}$, приходим к включению (9).

Итак, постановка 2 также сводится к абстрактному эволюционному неравенству (15), и поэтому слабым или сильным решением постановки 2 будем называть соответственно слабое или сильное решение задачи А, для которой пространства и операторы определены выше.

Определим на пространстве V_2 функционал

$$\Psi(B) = \begin{cases} \int_{\Gamma} \psi(B) d\Gamma, & \text{если } \psi(B) \in L^1(\Gamma), \\ +\infty & \text{иначе,} \end{cases}$$

с эффективной областью K_2 . Следующие результаты непосредственно вытекают из теорем 1, 2.

ТЕОРЕМА 6. Пусть функционал Ψ непрерывен на K_2 ,

$$u_0 \in H_1, \quad B_0 \in \overline{K_2}^{H_1}.$$

Тогда постановка 2 имеет, по крайней мере одно, слабое решение. Более того, в случае $d = 2$ при дополнительных условиях

$$\partial\Psi(B_0) \cap L^2(\Omega) \neq \emptyset, \quad B_0 \in W_2^2(\Omega) \cap K_2, \quad u_0 \in W_2^2(\Omega) \cap V_0,$$

$$\nu_m \text{rot } B_0 = u_0 \times B_0 \quad \text{на } \Gamma$$

постановка 2 имеет единственное сильное решение.

Как приложения теоремы 6 можно рассмотреть краевые задачи с условиями (10) и (11). В первом случае $K_2 = V_2$, а во втором

$$K_2 = \{w \in V_2 : |w| \leq b_0\}.$$

Тогда справедливы следующие результаты о существовании слабых решений.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $l \in L^2(\Gamma)$, $B_0 \in H_1$, $u_0 \in H_1$. Тогда обратная задача МГД (1)–(5) с условиями

$$n \times (\nu_m g + E) = l, \quad u = 0, \quad x \in \Gamma$$

имеет, по крайней мере одно, слабое решение.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $u_0 \in H_1$, $B_0 \in \overline{K_2}^{H_1}$. Тогда обратная задача МГД (1)–(5) с дополнительными условиями на Γ : $u = 0$,

$$n \times (\nu_m g + E) = \lambda B, \quad \text{если } |B| < b_0,$$

$$n \times (\nu_m g + E) = (\lambda + \sigma) B, \quad \text{если } |B| = b_0,$$

имеет, по крайней мере одно, слабое решение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Sermange, R. Temam, “Some mathematical questions related to the MHD equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **36**:5 (1983), 635–664.
- [2] Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980.
- [3] А. Ю. Чеботарев, “Вариационные неравенства для оператора типа Навье–Стокса и односторонние задачи для уравнений вязкой теплопроводной жидкости”, *Матем. заметки*, **70**:2 (2001), 296–307.
- [4] Т. В. Беспалова, А. Ю. Чеботарев, “Вариационные неравенства и обратные субдифференциальные задачи для уравнений Максвелла в гармоническом режиме”, *Дифференц. уравнения*, **36**:6 (2000), 747–753.
- [5] Д. С. Коновалова, “Субдифференциальные краевые задачи для эволюционных уравнений Навье–Стокса”, *Дифференц. уравнения*, **36**:6 (2000), 792–798.
- [6] A. Yu. Chebotarev, “Subdifferential inverse problems for evolution Navier–Stokes systems”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **8**:3 (2000), 243–254.
- [7] П. Панагиотопулос, *Неравенства в механике и их приложения*, Выпуклые и невыпуклые функции энергии, Мир, М., 1989.
- [8] J. P. Aubin, *Optima and Equilibria*, Graduate Texts in Mathematics, **140**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [9] V. Barbu, *Analysis and Control of Nonlinear Infinite Dimensional Systems*, Mathematics in Science and Engineering, **190**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1993.

А. Ю. Чеботарев

Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток

E-mail: cheb@iam.dvo.ru

Поступило

13.12.2005

А. С. Савенкова

Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток

E-mail: asya-savenkova@yandex.ru