Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Андреищева, О некоторых задачах аппроксимации обобщенных функций Шура в окрестности единицы, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 1, 150–155

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3762>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 12:19:00

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О некоторых задачах аппроксимации обобщенных функций Шура в окрестности единицы

Е. Н. Андреищева

1. Введение и основные понятия. В работе Крейна и Лангера [1] исследуется вопрос об аппроксимации функций Неванлинны. Наша цель – получить подобный результат для функции Шура.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция s называется *обобщенной функцией Шура*, если она мероморфна в открытом единичном круге $\mathbb{D} = \{\xi : |\xi| < 1\}$ и ядро вида $(1 - s(\lambda)\overline{s(\mu)})/(1 - \lambda\bar{\mu})$ имеет конечное число отрицательных квадратов.

Множество всех таких функций назовем *обобщенным классом Шура* и обозначим $S_{\varkappa}$, где $\varkappa$ – число отрицательных квадратов с учетом их кратностей.

Как известно [2; с. 319], функция Шура допускает унитарную реализацию

$$s(\lambda) = s(0) + \lambda[(I - \lambda T)^{-1}u, v] \quad (1)$$

или, иначе говоря, является характеристической функцией некоторого унитарного оператора V :

$$V = \begin{bmatrix} T & u \\ [\cdot, v] & s(0) \end{bmatrix} : \begin{pmatrix} \Pi_{\varkappa} \\ \mathbb{C} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Pi_{\varkappa} \\ \mathbb{C} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\Pi_{\varkappa}$ – пространство Понтрягина с индефинитной метрикой $[\cdot, \cdot]$, T – сжимающий оператор. При этом оператор V выбирается минимальным, что означает

$$\Pi_{\varkappa} = \text{ЗЛО}\{T^n u, (T^c)^m v : n, m = 0, 1, 2, \dots\},$$

где ЗЛО – замыкание линейной оболочки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть T – сжатие в пространстве Понтрягина $\Pi_{\varkappa}$. Скажем, что элемент $u \in \Pi_{\varkappa}$ является порождающим для оператора T , если

$$\Pi_{\varkappa} = \text{ЗЛО}\{(I - \lambda T)^{-1}u, \lambda \in \mathbb{D}, 1/\lambda \notin \sigma_p(T)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Через W'_{θ} обозначим множество всех $\beta \in \mathbb{C}_-$ таких, что

$$|\arg \beta + \pi/2| \leq \theta,$$

где $0 \leq \theta < \pi/2$. Через Λ_{θ} обозначим множество всех $\lambda \in \mathbb{D}$ вида $\lambda = (\alpha - i)(\alpha + i)^{-1}$, $-\alpha \in W'_{\theta}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00203-а).

2. Условия аппроксимации обобщенной функции Шура в окрестности единицы. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $s(\lambda) = \lambda^k s_k(\lambda)$, $s_k(0) \neq 0$, $k \leq n$. Тогда следующие свойства:

- 1) $s \in S_{\mathcal{K}}$, где $S_{\mathcal{K}}$ – обобщенный класс Шура;
- 2) для некоторого натурального числа $n > 0$ существуют $2n$ чисел $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$ таких, что имеет место разложение

$$s(\lambda) = 1 - \sum_{\nu=1}^{2n} c_{\nu}(\lambda - 1)^{\nu} + O((\lambda - 1)^{2n+1}), \quad \lambda \rightarrow 1, \quad \lambda \in \Lambda_{\theta}, \quad (3)$$

выполнены тогда и только тогда, когда существуют пространство Понтрягина $\Pi_{\mathcal{K}}$, сжимающий оператор T в $\Pi_{\mathcal{K}}$ и порождающий для оператора T элемент

$$u \in \text{dom}(I - T)^{-(n+1)}$$

такие, что справедливо представление

$$s(\lambda) = \lambda^k - \frac{1}{s_k(0)} \lambda^k (\lambda - 1) [(I - \lambda T)^{-1} (I - T)^{-1} T^{k+1} u, T^k u], \quad \lambda \in \mathbb{D}, \quad \frac{1}{\lambda} \notin \sigma_p(T) \quad (4)$$

В этом случае

$$c_{\nu} = \begin{cases} \frac{1}{s_k(0)} \sum_{i=1}^{\nu} C_{k-i}^{\nu-i} [(I - T)^{-(i+1)} T^{k+1} u, T^k u] - C_k^{\nu}, & 1 \leq \nu < k+1; \\ \frac{1}{s_k(0)} [(I - T)^{-(\nu+1)} T^{\nu} u, T^k u], & k+1 \leq \nu \leq n; \\ \frac{1}{s_k(0)} [(I - T)^{-(n+1)} T^n u, (I - T^c)^{-(\nu-n)} T^{c(\nu-n)} T^k u], & n+1 \leq \nu \leq 2n; \end{cases}$$

Для доказательства теоремы 1 нам необходимы следующие результаты, имеющие и самостоятельное значение.

ЛЕММА 1. Для функции s , $\lambda \in \Lambda_{\theta}$, $s(0) \neq 0$ следующие свойства:

- 1) $s \in S_{\mathcal{K}}$;
- 2) $\lim_{\lambda \rightarrow 1} s(\lambda) = 1$;
- 3) $\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 1} (1 - |s(\lambda)|^2) / (1 - |\lambda|^2) < \infty$;

выполнены тогда и только тогда, когда существуют пространство Понтрягина $\Pi_{\mathcal{K}}$, сжимающий оператор T в $\Pi_{\mathcal{K}}$ и порождающий для оператора T элемент $u \in \Pi_{\mathcal{K}}$ такие, что справедливо представление

$$s(\lambda) = 1 - \frac{(\lambda - 1)}{s(0)} [(I - \lambda T)^{-1} (I - T)^{-1} u, T^c u], \quad \lambda \in \mathbb{D}, \quad \frac{1}{\lambda} \notin \sigma_p(T). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция s обладает свойствами 1)–3). Докажем справедливость существования представления (5). Из условия унитарности оператора V вида (2) получаем, что элемент v в (1) выражается формулой

$$v = - \left(\frac{1}{s(0)} \right) T^c u. \quad (6)$$

Запишем операторное представление функции Шура:

$$s(\lambda) = s(0) + \lambda [\cdot, v] (I - \lambda T)^{-1} [\cdot, 1] u. \quad (7)$$

Согласно (7) имеем равенство

$$1 - \overline{s(\lambda)}s(\lambda) = (1 - |\lambda|^2)[(I - \lambda T)^{-1}u, (I - \lambda T)^{-1}u].$$

Таким образом, условие 3) примет вид

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 1} [(I - \lambda T)^{-1}u, (I - \lambda T)^{-1}u] < \infty. \quad (8)$$

Пусть $\tilde{T}: \tilde{\Pi}_\kappa \rightarrow \tilde{\Pi}_\kappa$ – минимальная унитарная дилатация T , где $\tilde{\Pi}_\kappa = \Pi_\kappa[+]H$, H – гильбертово пространство, Π_κ – пространство Понтрягина с κ отрицательными квадратами.

Справедливо следующее разложение пространства $\tilde{\Pi}_\kappa$:

$$\tilde{\Pi}_\kappa = E(\Delta)\tilde{\Pi}_\kappa[+](I - E(\Delta))\tilde{\Pi}_\kappa, \quad (9)$$

где $E(\Delta)$ – спектральная функция, Δ – малая дуга единичной окружности в окрестности единицы такая, что Δ не содержит собственных значений оператора $\tilde{T}$, соответствующих неположительным собственным векторам. Пространство $E(\Delta)\tilde{\Pi}_\kappa$ – инвариантное гильбертово пространство со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$, $\sigma(\tilde{T}|_{E(\Delta)\tilde{\Pi}_\kappa}) \subset \Delta$. Для оператора $\tilde{T}_2 = \tilde{T}|_{(I - E(\Delta))\tilde{\Pi}_\kappa}$ единица является регулярной точкой, поэтому равномерная сходимость $(I - \lambda\tilde{T}_2)^{-1} \rightarrow (I - \tilde{T}_2)^{-1}$ при $\lambda \rightarrow 1$ справедлива. И тогда можно ограничиться доказательством только для $\tilde{T}_1 = \tilde{T}|_{E(\Delta)\tilde{\Pi}_\kappa}$, где $E(\Delta)\tilde{\Pi}_\kappa$ – гильбертово пространство.

Для этого сначала рассмотрим элемент $u \in \Pi_\kappa$ и его разложение $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in E(\Delta)\tilde{\Pi}_\kappa$, $u_2 \in (I - E(\Delta))\tilde{\Pi}_\kappa$. Покажем, что элемент $u \in \text{dom}(I - \tilde{T})^{-1}$. Пусть $A = A^c$ – обратное преобразование Кэли–Неймана оператора $\tilde{T}$:

$$A = i(I - \tilde{T})^{-1}(I + \tilde{T}), \quad \tilde{T} = (A - i)(A + i)^{-1}. \quad (10)$$

Аргумент λ преобразуется следующим образом:

$$\lambda = (\alpha - i)(\alpha + i)^{-1}, \quad \lambda \rightarrow 1 \Leftrightarrow \alpha \rightarrow \infty.$$

Согласно (8) имеем

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow \infty} |\alpha|^2 [(A + \alpha)^{-1}(A + i)u, (A + \alpha)^{-1}(A + i)u] < \infty. \quad (11)$$

Обозначив через $A_1 = i(I + \tilde{T}_1)(I - \tilde{T}_1)^{-1}$, последнее неравенство для оператора A_1 , действующего в гильбертовом пространстве, можно записать следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{t + i}{t + \alpha} \right|^2 |\alpha|^2 d\sigma(t) < \infty,$$

где $\sigma(t) = [E_t u_1, u_1]$, E_t – спектральная функция для самосопряженного оператора A_1 .

Поскольку $\alpha \in W_\theta$, то для любого $n \in \mathbb{R}$, существует $K \in \mathbb{R}$ такое, что $\int_{-n}^n |t + i|^2 d\sigma(t) \leq K$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ получаем $\int_{-\infty}^{+\infty} |t + i|^2 d\sigma(t) < \infty$. Следовательно, согласно [3; с. 238] элемент $u_1 \in \text{dom}(A_1 + i) = \text{dom}(I - \tilde{T}_1)^{-1}$. Из того, что $\tilde{T}$ – минимальная унитарная дилатация оператора T и условия $u_1 \in \text{dom}(I - \tilde{T}_1)^{-1}$, следует $u \in \text{dom}(I - T)^{-1}$.

Аналогично доказывается, что элемент v вида (6) из $\text{dom}(I - T^c)^{-1}$.

Используя представление (6), получим $s(\lambda) = s(0) - (\lambda/\overline{s(0)})[(I - \lambda T)^{-1}u, T^c u]$. Отсюда $[(I - \lambda T)^{-1}u, u] \rightarrow [(I - T)^{-1}u, u]$ при $\lambda \rightarrow 1$. Поэтому из условия $\lim_{\lambda \rightarrow 1} s(\lambda) = 1$ имеем

$$s(\lambda) = 1 - \left(\frac{(\lambda - 1)}{\overline{s(0)}} \right) [(I - \lambda T)^{-1}(I - T)^{-1}u, T^c u].$$

Обратно, пусть справедливо представление (5). Докажем, что свойства 1)–3) выполнены. Действительно, из (8) получаем

$$\frac{1 - \overline{s(\lambda)}s(\mu)}{1 - \overline{\lambda}\mu} = [(I - \lambda T)^{-1}u, (I - \mu T)^{-1}u]$$

и, значит, $s \in S_{\mathcal{K}}$,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 1} s(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left(1 - \frac{\lambda - 1}{\overline{s(0)}} [(I - \lambda T)^{-1}(I - T)^{-1}u, T^c u] \right) = 1, & \lambda \in \Lambda_{\theta}, \\ \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{1 - |s(\lambda)|^2}{1 - |\lambda|^2} &\leq \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{|\lambda - 1|}{(1 - |\lambda|)|\overline{s(0)}} |[(I - \lambda T)^{-1}(I - T)^{-1}u, T^c u]| < \infty, & \lambda \in \Lambda_{\theta}. \end{aligned}$$

Таким образом, получили условия 2) и 3) леммы.

ТЕОРЕМА 2. Для функции s с $s(0) \neq 0$ следующие свойства:

- 1) $s \in S_{\mathcal{K}}$;
- 2) для некоторого натурального числа $n > 0$ существуют $2n$ чисел $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$ таких, что имеет место разложение

$$s(\lambda) = 1 - \sum_{\nu=1}^{2n} c_{\nu}(\lambda - 1)^{\nu} + O((\lambda - 1)^{2n+1}), \quad \lambda \rightarrow 1, \quad \lambda \in \Lambda_{\theta} \quad (12)$$

выполнены тогда и только тогда, когда существуют пространство Понтрягина $\Pi_{\mathcal{K}}$, сжимающий оператор T в $\Pi_{\mathcal{K}}$ и порождающий для оператора T элемент

$$u \in \text{dom}(I - T)^{-(n+1)}$$

такие, что справедливо представление

$$s(\lambda) = 1 - \frac{(\lambda - 1)}{\overline{s(0)}} [(I - \lambda T)^{-1}(I - T)^{-1}u, T^c u], \quad \lambda \in \mathbb{D}, \quad \frac{1}{\lambda} \notin \sigma_p(T). \quad (13)$$

В этом случае

$$c_{\nu} = \begin{cases} \frac{1}{\overline{s(0)}} [(I - T)^{-(\nu+1)} T^{\nu} u, u], & 1 \leq \nu \leq n; \\ \frac{1}{\overline{s(0)}} [(I - T)^{-(n+1)} T^n u, (I - T^c)^{-(\nu-n)} (T^c)^{\nu-n} u], & n+1 \leq \nu \leq 2n. \end{cases} \quad (14)$$

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1. Мы поясним полученный результат приведением схемы доказательства для случая $s(0) \neq 0$. При $s(0) = 0$ следует перейти к функции Шура вида $s_k(\lambda) = (1/\lambda^k)s(\lambda)$ и применить результат для случая $s(\lambda) \neq 0$.

Пусть выполнены свойства 1) и 2) теоремы 2. Докажем справедливость представления (13) и формулу для коэффициентов (14).

Сначала заметим, что для любого неотрицательного числа k и $u \in \text{dom}(I - T)^{-(k+1)}$ выполнено тождество

$$\begin{aligned} &(\lambda - 1) [(I - \lambda T)^{-1}(I - T)^{-1}u, T^c u] \\ &= \overline{s(0)} \sum_{\nu=1}^{2k+1} c_{\nu}(\lambda - 1)^{\nu} \\ &\quad + (\lambda - 1)^{2k+2} [(I - \lambda T)^{-1}(I - T)^{-(k+1)} T^{k+1} u, (I - T^c)^{-(k+1)} (T^c)^{k+1} u], \end{aligned} \quad (15)$$

где коэффициенты c_{ν} представлены формулой (14) для $\nu = 1, \dots, 2k+1$.

Из условий 1)–2) теоремы и леммы 1 непосредственно следует (13).

Покажем, что $u \in \text{dom}(I - T)^{-(n+1)}$. Для этого рассмотрим унитарную дилатацию $\tilde{T}: \tilde{\Pi}_\kappa \rightarrow \tilde{\Pi}_\kappa$ оператора T и разложение вида (9) пространства $\tilde{\Pi}_\kappa$.

Известен общий вид функции Неванлинны:

$$g(\beta) = \frac{g(-i) + \overline{g(-i)}}{2} + i[u, u] + (\beta - i)[(A - \beta)^{-1}(A + i)u, u], \quad \beta \in W'_\theta,$$

где A – самосопряженный оператор в пространстве Π_κ .

Отсюда в силу неравенства (11) получим $\lim_{\beta \rightarrow \infty} |\beta| |\text{Im } g(\beta)| < \infty$.

Функция Шура связана с функцией Неванлинны с помощью преобразования Кэли–Неймана:

$$s(\lambda) = (i + g(\beta))(i - g(\beta))^{-1}, \quad \lambda = (\beta + i)(\beta - i)^{-1}, \quad \beta \in W'_\theta.$$

Поэтому условия $\lim_{\lambda \rightarrow 1} s(\lambda) = 1$ и $\lim_{\beta \rightarrow \infty} g(\beta) = 0$ эквивалентны.

Таким образом, мы построили функцию Неванлинны вида

$$g(\beta) = [(A - \beta)^{-1}(A + i)u, (A + i)u], \quad \beta \in W'_\theta.$$

Так как $s(\lambda)$ допускает разложение (12) и справедливо представление (13), то

$$\begin{aligned} & (\lambda - 1)[(I - \lambda T)^{-1}(I - T)^{-1}u, T^c u] \\ &= (\lambda - 1)[(I - \lambda \tilde{T})^{-1}(I - \tilde{T})^{-1}u, \tilde{T}^c u] \\ &= \sum_{\nu=1}^{2n} c'_\nu (\lambda - 1)^\nu + O((\lambda - 1)^{2n+1}), \quad \lambda \rightarrow 1, \quad \lambda \in \Lambda_\theta, \end{aligned} \quad (16)$$

где $c'_\nu = \overline{s(0)}c_\nu$.

Записав равенство (16) через дилатацию $\tilde{T}$ и применив преобразование Кэли–Неймана, получим

$$[(A - \beta)^{-1}u', u'] = - \sum_{\nu=1}^{2n} \tilde{c}_\nu (\beta - i)^{-\nu} + O((\beta - i)^{-(2n+1)}),$$

где $u' = (A + i)u$, $\tilde{c}_\nu = c'_\nu (2i)^{\nu+1}$. Отсюда в силу теоремы Крейна–Лангера [1] и согласно (10) получаем формулу для коэффициентов (14), где порождающий элемент $u \in \text{dom}(I - T)^{-(n+1)}$.

Обратно, если $u \in \text{dom}(I - T)^{-(n+1)}$ и справедливо тождество (15), то выполнено

$$\begin{aligned} & \overline{s(0)}(\lambda - 1)^{-(2n+1)}(1 - s(\lambda) - \sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu (\lambda - 1)^\nu) \\ &= [(I - T)^{-(n+1)}T^{n+1}u, (I - T^c)^{-(n+1)}(T^c)^n u] \\ &+ (\lambda - 1)[(I - \lambda T)^{-1}(I - T)^{-(n+1)}T^{n+1}u, (I - T^c)^{-(n+1)}(T^c)^{n+1}u]. \end{aligned}$$

Разложение (12) будет доказано, если покажем, что второе слагаемое в правой части последнего равенства стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 1$.

Перейдем к дилатации $\tilde{T}$; тогда согласно (10) и работе [3; с. 238] нужно показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t - i)^{2n+1}}{t - \beta} d\sigma(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } \beta \rightarrow \infty, \quad \beta \in W'_\theta.$$

Действительно, это выполнено из-за существующих неравенств для $\beta \in W'_\theta$:

$$|(t-i) - (\beta-i)| \geq |\beta-i| \cos \theta, \quad |(t-i) - (\beta-i)| \geq |t-i| \cos \theta,$$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-i)^{2n+1}}{t-\beta} d\sigma(t) \right| \leq \frac{1}{|\beta-i| \cos \theta} \int_{-\gamma}^{\gamma} |t-i|^{2n+1} d\sigma(t) + \frac{1}{\cos \theta} \int_{|t|>\gamma} |t-i|^{2n} d\sigma(t) \rightarrow 0, \quad \beta \rightarrow \infty.$$

Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] M. G. Krein, H. Langer, *Math. Nachr.*, **77** (1977), 187–236. [2] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой*, Наука, М., 1986. [3] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1966.

Е. Н. Андреищева

Воронежский государственный университет

E-mail: anda_el@mail.ru

Поступило

22.11.2006