Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Козко, А. С. Печенцов, Регуляризованные следы
сингулярных дифференциальных операторов высших
порядков, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 1, 39–
49

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3764>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 18:32:52

Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков

А. И. Козко, А. С. Печенцов

В $L_2[0, +\infty)$ рассматриваются сингулярные дифференциальные операторы порядка $2m$, $m \in \mathbb{N}$, с дискретным спектром. Для самосопряженных расширений, задаваемых краевыми условиями $y(0) = y''(0) = \dots = y^{(2m-2)}(0) = 0$ или $y'(0) = y'''(0) = \dots = y^{(2m-1)}(0) = 0$, найдены регуляризованные следы. Для вычисления регуляризованных следов мы предъявляем явный вид спектральной функции.

Библиография: 12 названий.

1. Введение и основной результат. В гильбертовом пространстве $L_2[0, \infty)$ рассмотрим самосопряженный полуограниченный снизу оператор $\mathbb{L}$, задаваемый дифференциальным выражением

$$\ell(y) \equiv (-1)^m y^{(2m)}(x) + p_{2m-2}(x)y^{(2m-2)}(x) + \dots + p_0(x)y(x) \quad (1)$$

и граничными условиями

$$y(0) = y''(0) = y^{(4)}(0) = \dots = y^{(2m-2)}(0) = 0.$$

Коэффициенты $p_i(x)$, $i = 0, \dots, 2m-2$, — действительные локально интегрируемые функции. Предположим, что спектр $\sigma(\mathbb{L})$ оператора $\mathbb{L}$ дискретный. Занумеруем все собственные значения λ_k , $k = 1, 2, \dots$, оператора $\mathbb{L}$ в порядке возрастания:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

Обозначим через $\mathbb{P}$ оператор умножения в $L_2[0, \infty)$ на действительную измеримую ограниченную финитную функцию $q(x)$, $q(x) \geq 0$. Оператор $\mathbb{L} + \mathbb{P}$ останется полуограниченным снизу с дискретным спектром $\sigma(\mathbb{L} + \mathbb{P})$. Занумеруем собственные значения μ_k , $k = 1, 2, \dots$, оператора $\mathbb{L} + \mathbb{P}$ в порядке их возрастания: $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$.

ТЕОРЕМА 1. Если функция $\psi(x) = (1/x) \int_0^x q(t) dt$ имеет ограниченную вариацию в некоторой правосторонней окрестности нуля, то справедлива формула

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\mu_k - \lambda_k - \frac{c_k}{\pi} \int_0^{+\infty} q(t) dt \right] = -\frac{\psi(+0)}{4},$$

где

$$c_1 = \lambda_1^{1/2m}, \quad c_k = \lambda_k^{1/2m} - \lambda_{k-1}^{1/2m}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (2)$$

Формулировка и схема доказательства этой теоремы приведены в работе авторов [1]. Ниже мы даем полное ее доказательство. Обозначим через $\mathbb{L}'$ самосопряженный оператор в $L_2[0, \infty)$, порождаемый дифференциальным выражением (1) и краевыми условиями

$$y'(0) = y'''(0) = y^{(5)}(0) = \dots = y^{(2m-1)}(0) = 0.$$

Оператор $\mathbb{L}'$ так же, как и оператор $\mathbb{L}$, имеет ограниченный снизу дискретный спектр $\lambda'_1 \leq \lambda'_2 \leq \dots$. Спектр $\sigma(\mathbb{L}' + \mathbb{P})$ оператора $\mathbb{L}' + \mathbb{P}$ обозначим μ'_k , $k = 1, 2, \dots$, и занумеруем в порядке возрастания: $\mu'_1 \leq \mu'_2 \leq \dots$.

ТЕОРЕМА 1'. Если функция $\psi(x) = (1/x) \int_0^x q(t) dt$ имеет ограниченную вариацию в некоторой правосторонней окрестности нуля, то справедлива формула

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\mu'_k - \lambda'_k - \frac{c'_k}{\pi} \int_0^{+\infty} q(t) dt \right] = \frac{\psi(+0)}{4},$$

где

$$c'_1 = (\lambda'_1)^{1/2m}, \quad c'_k = (\lambda'_k)^{1/2m} - (\lambda'_{k-1})^{1/2m}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Сумма ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} (\mu_k - \lambda_k - (c_k/\pi) \int_0^{+\infty} q(t) dt)$ называется *регуляризованным следом* оператора $\mathbb{L} + \mathbb{P}$. Впервые Гельфанд и Левитан [2] вычислили регуляризованный след задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} -y''(x) + q_0(x)y &= \mu y, & q_0(x) &\in C^2[0, \pi], & q_0: [0, \pi] \mapsto \mathbb{R}, \\ y(0) &= y(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Для собственных значений оператора Штурма–Лиувилля μ_k , $k = 1, 2, \dots$ справедлива следующая асимптотика:

$$\mu_k = k^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q_0(t) dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow +\infty.$$

Оператор $\mathbb{L}_0 = -d^2/dx^2$ в $L_2[0, \pi]$ с граничными условиями $y(0) = y(\pi) = 0$ имеет собственные значения $\lambda_k = k^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Пусть $\mathbb{P}_0$ – оператор умножения в $L_2[0, \pi]$ на функцию $q_0(x)$; тогда собственные значения μ_k , $k = 1, 2, \dots$, оператора $\mathbb{L}_0 + \mathbb{P}_0$ записываются в виде

$$\mu_k = \lambda_k + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q_0(t) dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow +\infty;$$

более того,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\mu_k - \lambda_k - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q_0(x) dx \right) = -\frac{q_0(0) + q_0(\pi)}{4} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi q_0(x) dx.$$

Собственные значения широкого класса дифференциальных операторов являются корнями целой функции $\Delta(z)$ – “характеристического определителя” краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Лидский и Садовничий [3] предложили метод нахождения регуляризованных сумм корней целой функции $\Delta(z) \in K$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (z_k^l - B_l(k)) = S_l, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Здесь z_k – корни $\Delta(z)$, $B_l(k)$ – несколько первых слагаемых асимптотического ряда по степени k для z_k^l , обеспечивающих сходимость ряда в (3). В работах [4], [5] найдены регуляризованные суммы (3) для корней целых функций, более общих, чем класс K .

Глубокое изучение регуляризованных следов для абстрактных операторов $A_0 + B$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ проведено в работе Садовниченко и Подольского [6]. Возмущающий оператор B подчинен самосопряженному дискретному оператору A_0 так, что BA_0^{-1} является компактным оператором.

Для того, чтобы вычислить регуляризованную сумму в (3), необходимо знать явный вид $B_l(k)$ по степеням k в асимптотическом ряде λ_k^l . Однако для достаточно широкого класса сингулярных дифференциальных операторов асимптотический ряд λ_k^l имеет более сложную структуру, чем ряд по степеням k (см. [7]), поэтому в данной работе мы используем метод теории возмущений при вычислении регуляризованных сумм.

2. Следствия. Пусть собственные значения λ_k , $k = 1, 2, \dots$, оператора $\mathbb{L}$ удовлетворяют условию

$$\lambda_k = f(k) + o(g(k)), \quad k \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

где $f(k)$ – произвольная неубывающая последовательность действительных чисел такая, что $f(k) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, а для последовательности чисел $g(k)$ выполняется неравенство

$$|g(k)| \leq C|f(k)|^{1-1/2m}, \quad C > 0. \quad (5)$$

Предположим, что функцию $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ можно доопределить на полупрямую $[1, +\infty)$ до непрерывно дифференцируемой функции так, чтобы производная функции $h(x) = f^{1/2m}(x)$ монотонно убывала к нулю при $x \rightarrow +\infty$.

Не теряя общности, можем считать, что $h(x) \in C^1[0, +\infty)$ и $h(0) = 0$. Тогда существует константа $\varkappa$ такая, что

$$\int_0^N h'(x) dx = \sum_{k=1}^N h'(k) + \varkappa + o(1), \quad N \rightarrow +\infty,$$

т.е.

$$f^{1/2m}(N) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2m} f'(k) f^{1/2m-1}(k) + \varkappa + o(1), \quad N \rightarrow +\infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Имеет место равенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\mu_k - \lambda_k - \frac{1}{2\pi m} f^{1/2m-1}(k) f'(k) \int_0^{+\infty} q(x) dx \right) = -\frac{1}{4} \psi(+0) + \frac{\varkappa}{\pi} \int_0^{+\infty} q(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2), (4), (5) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N c_k &= \lambda_1^{1/2m} + \sum_{k=2}^N (\lambda_k^{1/2m} - \lambda_{k-1}^{1/2m}) = \lambda_N^{1/2m} = f^{1/2m}(N)(1 + o(f^{-1/2m}(N))) \\ &= f^{1/2m}(N) + o(1) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2m} f'(k) f^{1/2m-1}(k) + \varkappa + o(1), \quad N \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\left[\mu_k - \lambda_k - \frac{1}{2\pi m} f^{1/2m-1}(k) f'(k) \int_0^{+\infty} q(x) dx \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\mu_k - \lambda_k - \frac{c_k}{\pi} \int_0^{+\infty} q(t) dt \right] \right) \\ & = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lambda_n^{1/2m} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2m} f^{1/2m-1}(k) f'(k) \right) \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} q(t) dt = \frac{\varkappa}{\pi} \int_0^{+\infty} q(t) dt. \end{aligned}$$

Далее применяем теорему 1. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $\lambda_k = ck^\alpha + o(k^{\alpha(1-1/2m)})$, $k \rightarrow \infty$, $c > 0$, $0 < \alpha \leq 2m$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\mu_k - \lambda_k - \frac{\alpha c^{1/2m}}{2\pi m} \int_0^{+\infty} q(x) dx k^{\alpha/2m-1} \right] = -\frac{1}{4} \psi(+0) + \frac{\tilde{\varkappa} \alpha c^{1/2m}}{2\pi m} \int_0^{+\infty} q(x) dx,$$

где константа $\tilde{\varkappa}$ определяется равенством

$$\frac{2m}{\alpha} N^{\alpha/2m} = \sum_{k=1}^N k^{\alpha/2m-1} + \tilde{\varkappa} + o(1), \quad N \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В следствии 2.1 положить $f(k) = ck^\alpha$ и $g(k) = k^{\alpha(1-1/2m)}$.

3. Спектральная функция. При доказательстве теоремы 1 мы пользовались асимптотикой спектральной функции $\Theta_{\mathbb{L}}(x, \xi, \lambda)$ оператора $\mathbb{L}$.

Для произвольного линейного полуограниченного снизу оператора с дискретным спектром его спектральная функция $\Theta_{\mathbb{L}}(x, \xi, \lambda)$ имеет следующий вид:

$$\Theta_{\mathbb{L}}(x, \xi, \lambda) = \sum_{\lambda_k < \lambda} \varphi_k(x) \varphi_k(\xi),$$

где $\varphi_k(x)$ – ортонормированные собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_k , $k = 1, 2, \dots$, оператора $\mathbb{L}$.

Костюченко [8] доказал, что при $\lambda \rightarrow +\infty$ равномерно на любой ограниченной области изменения x, ξ имеет место равенство

$$\Theta_{\mathbb{L}}(x, \xi, \lambda) = \Theta_m(x, \xi, \lambda) + o(1),$$

где $\Theta_m(x, \xi, \lambda)$ – спектральная функция оператора

$$\mathbb{L}_0 := \begin{cases} (-1)^m \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}, \\ y(0) = y''(0) = y^{(4)}(0) = \dots = y^{(2m-2)}(0) = 0. \end{cases}$$

Явный вид спектральной функции был известен для $m = 1$ [9; с. 165],

$$\Theta_1(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin \sqrt{\lambda}(x - \xi)}{x - \xi} - \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x + \xi)}{x + \xi} \right), \quad \lambda \geq 0.$$

Для $m = 2$ спектральная функция была найдена Костюченко [10],

$$\Theta_2(x, x, \lambda) = \frac{1}{\pi} \left(\sqrt[4]{\lambda} - \frac{\sin 2\sqrt[4]{\lambda}x}{2x} \right), \quad \lambda \geq 0.$$

ТЕОРЕМА 2. Для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\Theta_m(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\lambda^{1/2m}(x - \xi))}{x - \xi} - \frac{\sin(\lambda^{1/2m}(x + \xi))}{x + \xi} \right), \quad \lambda \geq 0.$$

Пусть $K_j(x, \lambda)$ – решение следующего дифференциального уравнения относительно x на полупрямой с начальными условиями:

$$(-1)^m K_j^{(2m)}(x, \lambda) - \lambda K_j(x, \lambda) = 0, \quad K_j^{(2k-2)}(0) = \delta_{kj}, \quad j, k = 1, \dots, m,$$

где δ_{kj} – символ Кронекера. Обозначим $\lambda_k^+ = \lambda_k^+(\lambda)$, $k = 1, \dots, m$, решения уравнения $\tau^{2m} - \lambda = 0$, лежащие в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, при $\text{Im } \lambda \neq 0$. Тогда любое решение $y \in L_2([0, +\infty))$ уравнения $(-1)^m y^{(2m)} - \lambda y = 0$ при $\text{Im } \lambda \neq 0$ является линейной комбинацией решений $e^{i\lambda_1^+ x}, e^{i\lambda_2^+ x}, \dots, e^{i\lambda_m^+ x}$. Таким образом,

$$K_j(x, \lambda) = \sum_{l=1}^m c_{jl} e^{i\lambda_l^+ x}, \quad j = 1, \dots, m,$$

где коэффициенты c_{jl} , $j, l = 1, \dots, m$, определяются по правилу Крамера:

$$c_{jl} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & (i\lambda_1^+)^{2j-4} & (i\lambda_1^+)^{2j-2} & (i\lambda_1^+)^{2j} & \dots & (i\lambda_1^+)^{2m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & (i\lambda_{l-1}^+)^{2j-4} & (i\lambda_{l-1}^+)^{2j-2} & (i\lambda_{l-1}^+)^{2j} & \dots & (i\lambda_{l-1}^+)^{2m-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & (i\lambda_{l+1}^+)^{2j-4} & (i\lambda_{l+1}^+)^{2j-2} & (i\lambda_{l+1}^+)^{2j} & \dots & (i\lambda_{l+1}^+)^{2m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & (i\lambda_m^+)^{2j-4} & (i\lambda_m^+)^{2j-2} & (i\lambda_m^+)^{2j} & \dots & (i\lambda_m^+)^{2m-2} \end{vmatrix},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & (i\lambda_1^+)^2 & (i\lambda_1^+)^4 & \dots & (i\lambda_1^+)^{2m-2} \\ 1 & (i\lambda_2^+)^2 & (i\lambda_2^+)^4 & \dots & (i\lambda_2^+)^{2m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (i\lambda_m^+)^2 & (i\lambda_m^+)^4 & \dots & (i\lambda_m^+)^{2m-2} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Поэтому

$$K_j(x, \lambda) = \frac{1}{\Delta} \times \begin{vmatrix} 1 & (i\lambda_1^+)^2 & \dots & (i\lambda_1^+)^{2j-4} & e^{i\lambda_1^+ x} & (i\lambda_1^+)^{2j} & \dots & (i\lambda_1^+)^{2m-2} \\ 1 & (i\lambda_2^+)^2 & \dots & (i\lambda_2^+)^{2j-4} & e^{i\lambda_2^+ x} & (i\lambda_2^+)^{2j} & \dots & (i\lambda_2^+)^{2m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (i\lambda_{l-1}^+)^2 & \dots & (i\lambda_{l-1}^+)^{2j-4} & e^{i\lambda_{l-1}^+ x} & (i\lambda_{l-1}^+)^{2j} & \dots & (i\lambda_{l-1}^+)^{2m-2} \\ 1 & (i\lambda_l^+)^2 & \dots & (i\lambda_l^+)^{2j-4} & e^{i\lambda_l^+ x} & (i\lambda_l^+)^{2j} & \dots & (i\lambda_l^+)^{2m-2} \\ 1 & (i\lambda_{l+1}^+)^2 & \dots & (i\lambda_{l+1}^+)^{2j-4} & e^{i\lambda_{l+1}^+ x} & (i\lambda_{l+1}^+)^{2j} & \dots & (i\lambda_{l+1}^+)^{2m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (i\lambda_m^+)^2 & \dots & (i\lambda_m^+)^{2j-4} & e^{i\lambda_m^+ x} & (i\lambda_m^+)^{2j} & \dots & (i\lambda_m^+)^{2m-2} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Определим

$$F(t, \lambda) = \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\lambda_k^+ |t|}}{(\lambda_k^+)^{2m-1}}, \quad (8)$$

$$\widehat{\Delta}(x, y, \lambda) = \begin{vmatrix} F(y, \lambda) & F''(y, \lambda) & F^{(4)}(y, \lambda) & \dots & F^{(2m-2)}(y, \lambda) & 0 \\ 1 & (i\lambda_1^+)^2 & (i\lambda_1^+)^4 & \dots & (i\lambda_1^+)^{2m-2} & e^{i\lambda_1^+ x} \\ 1 & (i\lambda_2^+)^2 & (i\lambda_2^+)^4 & \dots & (i\lambda_2^+)^{2m-2} & e^{i\lambda_2^+ x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (i\lambda_m^+)^2 & (i\lambda_m^+)^4 & \dots & (i\lambda_m^+)^{2m-2} & e^{i\lambda_m^+ x} \end{vmatrix}.$$

ЛЕММА 1. Если $\text{Im } \lambda \neq 0$, то для функции Грина $H_0(x, y, \lambda)$ оператора $\mathbb{L}_0$ справедливо представление

$$H_0(x, y, \lambda) = \frac{i}{2m} \left(F(x - y, \lambda) + (-1)^m \cdot \frac{\widehat{\Delta}(x, y, \lambda)}{\Delta} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции Грина $H_0(x, y, \lambda)$ оператора $\mathbb{L}_0$ имеем представление (см. [10])

$$H_0(x, y, \lambda) = K_0(x, y, \lambda) - \sum_{j=1}^m K_j(x, \lambda) \cdot K_0^{(2j-2)}(0, y, \lambda),$$

где $K_0(x, y, \lambda)$ – функция Грина оператора $\widetilde{\mathbb{L}} = (-1)^m y^{(2m)}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ и $K_0^{(s)}(0, y, \lambda) = \partial^s / \partial x^s (K_0(x, y, \lambda))|_{x=0}$. Если $\text{Im } \lambda \neq 0$, то для $K_0(x, y, \lambda)$ имеем явное выражение

$$K_0(x, y, \lambda) = \frac{i}{2m} \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\lambda_k^+ |x-y|}}{(\lambda_k^+)^{2m-1}}.$$

Поэтому в силу (7)

$$\begin{aligned} H_0(x, y, \lambda) &= \frac{i}{2m} \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\lambda_k^+ |x-y|}}{(\lambda_k^+)^{2m-1}} - \frac{i}{2m\Delta} \cdot \sum_{j=1}^m F^{(2j-2)}(y) \\ &\quad \times \begin{vmatrix} 1 & (i\lambda_1^+)^2 & \dots & (i\lambda_1^+)^{2j-4} & e^{i\lambda_1^+ x} & (i\lambda_1^+)^{2j} & \dots & (i\lambda_1^+)^{2m-2} \\ 1 & (i\lambda_2^+)^2 & \dots & (i\lambda_2^+)^{2j-4} & e^{i\lambda_2^+ x} & (i\lambda_2^+)^{2j} & \dots & (i\lambda_2^+)^{2m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (i\lambda_m^+)^2 & \dots & (i\lambda_m^+)^{2j-4} & e^{i\lambda_m^+ x} & (i\lambda_m^+)^{2j} & \dots & (i\lambda_m^+)^{2m-2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{i}{2m} \left(F(x - y, \lambda) + (-1)^m \cdot \frac{\widehat{\Delta}(x, y, \lambda)}{\Delta} \right). \end{aligned}$$

Пусть $\lambda = \sigma + i\tau$; определим

$$\omega_k^+ = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lambda_k^+ = \sigma^{1/2m} e^{i(k-1)\pi/m}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

ЛЕММА 2. Пусть $\mu \in \mathbb{R}_+$, $x, y \in [0; +\infty)$. Тогда

$$\Theta_m(x, y, \mu) = \frac{1}{2m\pi} \int_0^\mu \text{Re}(F(x - y, \sigma) - F(x + y, \sigma)) d\sigma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Спектральная функция $\Theta_m(x, y, \mu)$ оператора $\mathbb{L}_0$ допускает представление [10]

$$\Theta_m(x, y, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\mu \operatorname{Im} \lim_{\tau \rightarrow 0+} H_0(x, \xi, \sigma + i\tau) d\sigma.$$

Из леммы 1 и определения ω_k^+ следует, что

$$\Theta_m(x, y, \mu) = \frac{1}{2m\pi} \int_0^\mu \operatorname{Re} \left(F(x - y, \sigma) + (-1)^m \frac{\widehat{\Delta}(x, y, \sigma)}{\Delta} \right) d\sigma.$$

Для завершения доказательства остается обосновать следующее равенство:

$$\widehat{\Delta}(x, y, \sigma) = (-1)^{m+1} F(x + y, \sigma) \cdot \Delta. \quad (10)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}(x, y, \sigma) &= \begin{vmatrix} F(y, \sigma) & F''(y, \sigma) & F^{(4)}(y, \sigma) & \dots & F^{(2m-2)}(y, \sigma) & 0 \\ 1 & (i\omega_1^+)^2 & (i\omega_1^+)^4 & \dots & (i\omega_1^+)^{2m-2} & e^{i\omega_1^+ x} \\ 1 & (i\omega_2^+)^2 & (i\omega_2^+)^4 & \dots & (i\omega_2^+)^{2m-2} & e^{i\omega_2^+ x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (i\omega_m^+)^2 & (i\omega_m^+)^4 & \dots & (i\omega_m^+)^{2m-2} & e^{i\omega_m^+ x} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\omega_k^+ y}}{(\omega_k^+)^{2m-1}} & \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\omega_k^+ y} \cdot (i\omega_k^+)^2}{(\omega_k^+)^{2m-1}} & \dots & \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\omega_k^+ y} \cdot (i\omega_k^+)^{2m-2}}{(\omega_k^+)^{2m-1}} & 0 \\ 1 & (i\omega_1^+)^2 & \dots & (i\omega_1^+)^{2m-2} & e^{i\omega_1^+ x} \\ 1 & (i\omega_2^+)^2 & \dots & (i\omega_2^+)^{2m-2} & e^{i\omega_2^+ x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (i\omega_m^+)^2 & \dots & (i\omega_m^+)^{2m-2} & e^{i\omega_m^+ x} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\omega_k^+ y}}{(\omega_k^+)^{2m-1}} \begin{vmatrix} 1 & (i\omega_k^+)^2 & (i\omega_k^+)^4 & \dots & (i\omega_k^+)^{2m-2} & 0 \\ 1 & (i\omega_1^+)^2 & (i\omega_1^+)^4 & \dots & (i\omega_1^+)^{2m-2} & e^{i\omega_1^+ x} \\ 1 & (i\omega_2^+)^2 & (i\omega_2^+)^4 & \dots & (i\omega_2^+)^{2m-2} & e^{i\omega_2^+ x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (i\omega_m^+)^2 & (i\omega_m^+)^4 & \dots & (i\omega_m^+)^{2m-2} & e^{i\omega_m^+ x} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Для всех $k = 1, \dots, m$ вычтем $(k+1)$ -ю строку k -й матрицы из первой строки этой же матрицы; получим

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}(x, y, \sigma) &= \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\omega_k^+ y}}{(\omega_k^+)^{2m-1}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -e^{i\omega_k^+ x} \\ 1 & (i\omega_1^+)^2 & (i\omega_1^+)^4 & \dots & (i\omega_1^+)^{2m-2} & e^{i\omega_1^+ x} \\ 1 & (i\omega_2^+)^2 & (i\omega_2^+)^4 & \dots & (i\omega_2^+)^{2m-2} & e^{i\omega_2^+ x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (i\omega_m^+)^2 & (i\omega_m^+)^4 & \dots & (i\omega_m^+)^{2m-2} & e^{i\omega_m^+ x} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{m+1} \Delta \cdot \sum_{k=1}^m \frac{e^{i\omega_k^+ (x+y)}}{(\omega_k^+)^{2m-1}} = (-1)^{m+1} F(x + y, \sigma) \cdot \Delta. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Вычислим интеграл $(1/2m\pi) \int_0^\mu \operatorname{Re} F(t, \sigma) d\sigma$. Из определения функций $F(t, \sigma)$ (8) и ω_k^+ (9) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(t, \sigma) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^m \frac{e^{i\omega_k^+ |t|}}{(\omega_k^+)^{2m-1}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^m \sigma^{-(2m-1)/2m} \cdot e^{-i(2m-1)(k-1)\pi/m} \cdot e^{i(\sigma^{1/2m} e^{i(k-1)\pi/m} |t|)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \sigma^{-(2m-1)/2m} \cos(A_k \cdot \sigma^{1/2m} + B_k) \cdot e^{C_k \cdot \sigma^{1/2m}}, \end{aligned}$$

где

$$B_k = \frac{(k-1)\pi}{m}, \quad A_k = |t| \cos B_k, \quad C_k = -|t| \sin B_k.$$

Так как для произвольных $A, B, C \in \mathbb{R}$, $A^2 + C^2 \neq 0$ справедливо

$$\int \cos(Ax + B) \cdot e^{Cx} dx = \frac{C \cdot \cos(Ax + B) + A \cdot \sin(Ax + B)}{A^2 + C^2} \cdot e^{Cx},$$

интеграл $(1/2m) \int_0^\mu \operatorname{Re} F(t, \sigma) d\sigma$ легко вычисляется:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2m} \int_0^\mu \operatorname{Re} F(t, \sigma) d\sigma \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{C_k \cdot \cos(A_k \sigma + B_k) + A_k \cdot \sin(A_k \sigma + B_k)}{A_k^2 + C_k^2} \cdot e^{C_k \sigma} \Big|_0^{\mu^{1/2m}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\cos B_k \cdot \sin(A_k \sigma + B_k) - \sin B_k \cdot \cos(A_k \sigma + B_k)}{|t|} \cdot e^{C_k \sigma} \Big|_0^{\mu^{1/2m}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\sin(A_k \sigma + B_k - B_k)}{|t|} \cdot e^{C_k \sigma} \Big|_0^{\mu^{1/2m}} = \sum_{k=1}^m \frac{\sin(A_k \mu^{1/2m})}{|t|} \cdot e^{C_k \mu^{1/2m}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\sin(\mu^{1/2m} \cdot \cos((k-1)\pi/m) \cdot t) \cdot e^{-\mu^{1/2m} \cdot \sin((k-1)\pi/m) \cdot |t|}}{t} = \frac{\sin(\mu^{1/2m} \cdot t)}{t}. \end{aligned}$$

Теперь из леммы 2 и последнего равенства получаем утверждение теоремы 2.

4. Доказательство теоремы 1. Пусть $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, являются ортонормированными системами собственных функций операторов $\mathbb{L}$, $\mathbb{L} + \mathbb{P}$, отвечающие собственным значениям λ_k и μ_k , $k = 1, 2, \dots$, соответственно. По лемме Гасымова [11] $\forall N \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\sum_{k=1}^N (\mathbb{P}\psi_k, \psi_k) \leq \sum_{k=1}^N [\mu_k - \lambda_k] \leq \sum_{k=1}^N (\mathbb{P}\varphi_k, \varphi_k). \quad (11)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N (\mathbb{P}\psi_k, \psi_k) &= \sum_{k=1}^N \int_0^{+\infty} q(x) \psi_k^2(x) dx = \int_0^{+\infty} q(x) \Theta_{\mathbb{L}+\mathbb{P}}(x, x, \mu_N) dx, \\ \sum_{k=1}^N (\mathbb{P}\varphi_k, \varphi_k) &= \sum_{k=1}^N \int_0^{+\infty} q(x) \varphi_k^2(x) dx = \int_0^{+\infty} q(x) \Theta_{\mathbb{L}}(x, x, \lambda_N) dx,\end{aligned}$$

и для спектральных функций $\Theta_{\mathbb{L}}(x, x, \lambda_N)$, $\Theta_{\mathbb{L}+\mathbb{P}}(x, x, \mu_N)$ выполняются равномерные на любой ограниченной области полуоси $\mathbb{R}_+$ оценки [10]

$$\begin{aligned}\Theta_{\mathbb{L}+\mathbb{P}}(x, x, \mu_N) &= \Theta_m(x, x, \mu_N) + o(1), & N \rightarrow \infty, \\ \Theta_{\mathbb{L}}(x, x, \lambda_N) &= \Theta_m(x, x, \lambda_N) + o(1), & N \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Поэтому, вычитая $(c_k/\pi) \int_0^{+\infty} q(x) dx$, $k = 1, \dots, N$, в неравенствах (11), получаем

$$\begin{aligned}& \int_0^{+\infty} q(x) \left(\Theta_m(x, x, \mu_N) - \frac{1}{\pi} {}^{2n}\sqrt{\lambda_N} + o(1) \right) dx \\ & \leq \sum_{k=1}^N \left(\mu_k - \lambda_k - \frac{c_k}{\pi} \int_0^{+\infty} q(x) dx \right) \\ & \leq \int_0^{+\infty} q(x) \left(\Theta_m(x, x, \lambda_N) - \frac{1}{\pi} {}^{2n}\sqrt{\lambda_N} + o(1) \right) dx.\end{aligned}$$

Перейдем к пределу при $N \rightarrow +\infty$ в последних неравенствах. Используя явный вид спектральной функции $\Theta_m(x, x, \lambda)$ (теорема 2) для функции $q(x)$ с компактным носителем, находим

$$\begin{aligned}& \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} q(x) \left(\Theta_m(x, x, \lambda_N) - \frac{1}{\pi} {}^{2n}\sqrt{\lambda_N} + o(1) \right) dx \\ & = -\frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{q(x) \sin(2\lambda_N^{1/2m} \cdot x)}{x} dx.\end{aligned}$$

Функция $\psi(x) = (1/x) \int_0^x q(t) dt$ имеет ограниченную вариацию в некоторой правой окрестности нуля, т.е. $\psi(x) \in \text{Var}(0, \delta)$ для некоторого $\delta > 0$, поэтому

$$-\frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{q(x) \sin(2\lambda_N^{1/2m} \cdot x)}{x} dx = -\frac{\psi(+0)}{4},$$

откуда

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} q(x) \left(\Theta_m(x, x, \lambda_N) - \frac{1}{\pi} {}^{2n}\sqrt{\lambda_N} + o(1) \right) dx = -\frac{\psi(+0)}{4}. \quad (12)$$

Из принципа минимакса для $q(x) \geq 0$ (см. [12]) следует

$$\mu_k \geq \lambda_k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} q(x) \left(\Theta_m(x, x, \mu_N) - \frac{1}{\pi} \sqrt[2n]{\mu_N} + o(1) \right) dx \\
& \leq \int_0^{+\infty} q(x) \left(\Theta_m(x, x, \mu_N) - \frac{1}{\pi} \sqrt[2n]{\lambda_N} + o(1) \right) dx \\
& \leq \sum_{k=1}^N \left(\mu_k - \lambda_k - \frac{c_k}{\pi} \int_0^{+\infty} q(x) dx \right).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание равенство

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} q(x) \left(\Theta_m(x, x, \mu_N) - \frac{1}{\pi} \sqrt[2n]{\mu_N} + o(1) \right) dx = -\frac{\psi(+0)}{4}$$

и (12), имеем

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \left(\mu_k - \lambda_k - \frac{c_k}{\pi} \int_0^{+\infty} q(x) dx \right) = -\frac{\psi(+0)}{4}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 1' проводится аналогично и опирается на явный вид спектральной функции для оператора $\mathbb{L}'$. Пусть $\Theta'_m(x, \xi, \lambda)$ – спектральная функция оператора

$$\mathbb{L}'_0 := \begin{cases} (-1)^m \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}, \\ y'(0) = y'''(0) = y^{(5)}(0) = \dots = y^{(2m-1)}(0) = 0. \end{cases}$$

Явный вид спектральной функции $\Theta'_m(x, \xi, \lambda)$ дает

ТЕОРЕМА 2'. Для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\Theta'_m(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\lambda^{1/2m}(x - \xi))}{x - \xi} + \frac{\sin(\lambda^{1/2m}(x + \xi))}{x + \xi} \right), \quad \lambda \geq 0.$$

Далее рассуждая как и при доказательстве теоремы 1, приходим к утверждению теоремы 1'.

Авторы выражают глубокую благодарность В. А. Садовничему, А. Г. Костюченко и А. А. Шкаликову за полезные обсуждения результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. И. Козко, А. С. Печенцов, “Спектральная функция и регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков”, *Докл. РАН*, **401**:2 (2005), 160–162.
- [2] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, “Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка”, *Докл. АН СССР*, **88**:4 (1953), 593–596.
- [3] В. Б. Лидский, В. А. Садовничий, “Регуляризованные суммы корней класса целых функций”, *Функц. анализ и его прил.*, **1**:2 (1967), 52–59.

- [4] В. А. Садовничий, В. А. Любишкин, “Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций экспоненциального типа”, *Докл. АН СССР*, **256**:4 (1981), 794–798.
- [5] A. S. Pechentsov, “Regularized traces of differential operators”, *Recent Advances in Operator Theory, Operator Algebras, and Their Applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **153**, Birkhäuser, Basel, 2005, 211–227.
- [6] В. А. Садовничий, В. Е. Подольский, “Следы операторов с относительно компактным возмущением”, *Матем. сб.*, **193**:2 (2002), 129–152.
- [7] А. И. Козко, “Асимптотика спектра дифференциального оператора $-y'' + q(x)y$ с граничными условиями в нуле и быстро растущим потенциалом”, *Дифференц. уравнения*, **41**:5 (2005), 611–622.
- [8] А. Г. Костюченко, “Асимптотическое поведение спектральной функции сингулярных дифференциальных операторов порядка $2m$ ”, *Докл. АН СССР*, **168** (1966), 276–279.
- [9] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1970.
- [10] А. Г. Костюченко, *О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1966.
- [11] М. Г. Гасымов, “Сумма разности собственных значений двух самосопряженных операторов”, *Докл. АН СССР*, **150**:6 (1963), 1202–1205.
- [12] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics IV. Analysis of Operators*, Academic Press, New York, 1978.

А. И. Козко

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: prozerpi@ok.ru

Поступило

30.03.2006

А. С. Печенцов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: pechentsov@ok.ru