Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Заставный, О нулях целых функций специального вида, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 1, 24–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3765>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 12:23:16

О нулях целых функций специального вида

В. П. Заставный

Получены достаточные условия, чтобы целая функция специального вида не имела нулей в открытой нижней полуплоскости.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. Формулировка основных результатов. Для заданной функции μ , которая имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, \sigma]$, $\sigma > 0$, будем рассматривать следующие целые функции:

$$F(z) := \int_0^\sigma e^{izt} d\mu(t), \quad G(z) := \int_0^\sigma \cos zt d\mu(t), \quad H(z) := \int_0^\sigma \sin zt d\mu(t), \quad (1)$$

$$C(z) := - \int_0^\sigma \cos zt d\mu(\sigma - t), \quad S(z) := - \int_0^\sigma \sin zt d\mu(\sigma - t). \quad (2)$$

Функцию μ , очевидно, всегда можно считать непрерывной слева в каждой точке интервала $(0, \sigma)$. Если $F(z) \not\equiv ce^{i\alpha z}$, то функция F имеет бесконечно много нулей (см., например, [1]). Функции вида (1) встречаются в различных задачах анализа, например, в спектральной теории, в теории дифференциально-разностных уравнений, в теории положительно определенных функций, в анализе Фурье и т.д. (см., например, [1]–[5]). Распределение нулей таких функций изучалось в работах Харди [6], Пойа [7], Титчмарша [8], Картрайта [9], [10], Седлецкого [11], [12] и др. В работе Пойа [7] исследован случай, когда $d\mu(t) = g(t)dt$, где функция g интегрируема, положительна и не убывает на интервале $(0, \sigma)$. Им доказано, что в этом случае все нули функции F лежат в замкнутой верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$, а если g не является кусочно постоянной с равностоящими узлами, то у функции F нет вещественных нулей. Эти результаты Пойа были уточнены и дополнены в работах автора [13], [14].

Целью данной работы является доказательство следующих теорем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть μ – вещественная функция¹ ограниченной вариации на отрезке $[0, \sigma]$, $C(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $F(z) \not\equiv 0$. Тогда все вещественные нули функции F (если они есть) простые, а в открытой нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ у функции F нет нулей.

¹Мы называем функцию вещественной, если на вещественной оси она принимает вещественные значения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть μ – вещественная функция ограниченной вариации на отрезке $[0, \sigma]$, $S(x) \geq 0$ при всех $x > 0$ и $F(z) \not\equiv 0$. Тогда все отличные от нуля вещественные нули функции F (если они есть) простые, а если число $x = 0$ является нулем функции F , то его кратность не более, чем 2. Кроме того, имеет место неравенство $\mu(\sigma - 0) \geq \mu(0)$ и

- 1) если $F(0) \in (-\infty, 0] \cup [\mu(\sigma - 0) - \mu(0), +\infty)$, то у функции F нет нулей в открытой нижней полуплоскости $\text{Im } z < 0$;
- 2) если $F(0) \in (0, \mu(\sigma - 0) - \mu(0))$, то у функции F в открытой нижней полуплоскости $\text{Im } z < 0$ имеется ровно один нуль и он чисто мнимый.

В п. 3 приведены примеры, когда выполняются условия теорем 1 и 2. Случай Поля содержится в утверждении 1 теоремы 2 (см. пример 1). Отметим, что в теореме 2 реализуются оба случая (если изменить величину $\mu(\sigma)$, то значения $S(x)$ и $\mu(\sigma - 0)$ не меняются, а значение $F(0) = \mu(\sigma) - \mu(0)$ можно сделать любым). Отметим также, что $S(x) \geq 0$ при всех $x > 0 \Leftrightarrow \mu(t) - \mu(0) \equiv f(\sigma - t)$ при $0 \leq t < \sigma$, где f – четная, положительно определенная и непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, равная нулю при $|t| \geq \sigma$ (лемма 2).

2. Вспомогательные утверждения. Следующие тождества непосредственно получаются из (1) и (2):

$$F(z) \equiv G(z) + iH(z), \quad F(z)e^{-i\sigma z} \equiv -\int_0^\sigma e^{-izt} d\mu(\sigma - t) \equiv C(z) - iS(z), \quad (3)$$

$$G(z) \equiv C(z) \cos \sigma z + S(z) \sin \sigma z, \quad H(z) \equiv C(z) \sin \sigma z - S(z) \cos \sigma z, \quad (4)$$

$$G(z) \cos(\sigma z + \tau) + H(z) \sin(\sigma z + \tau) \equiv C(z) \cos \tau - S(z) \sin \tau, \quad (5)$$

$$h_\alpha(z) := G(z) \cos \alpha - H(z) \sin \alpha \equiv C(z) \cos(\sigma z + \alpha) + S(z) \sin(\sigma z + \alpha). \quad (6)$$

Для функций (1) и (2) справедливы следующие леммы.

ЛЕММА 1. 1) Имеем

- i) $G(z) \equiv 0 \Leftrightarrow F(z) \equiv 0$;
- ii) $H(z) \equiv 0 \Leftrightarrow F(z) \equiv c$;
- iii) $C(z) \equiv 0 \Leftrightarrow F(z) \equiv 0$;
- iv) $S(z) \equiv 0 \Leftrightarrow F(z) \equiv ce^{i\sigma z}$;
- v) $h_\alpha(z) \equiv 0$ при некотором $\alpha \Leftrightarrow G(z) \cos \alpha \equiv H(z) \sin \alpha \equiv 0$.

2) Если $F(z) \not\equiv 0$ и $C(x) \cos \tau - S(x) \sin \tau \geq 0$ при $x > 0$, то $h_\alpha(z) \not\equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1). i) Если $G(z) \equiv 0$, то $\int_0^\sigma t^{2p} d\mu(t) = 0$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. По теореме Мюнца система степеней $\{t^{2p}\}_{p \in \mathbb{Z}_+}$ замкнута в $C[0, 1]$. Поэтому $\int_0^\sigma f(t) d\mu(t) = 0$ для любой функции $f \in C[0, 1]$. Поэтому $F(z) \equiv 0$. И наоборот, из тождества $F(z) = G(z) + iH(z) \equiv 0$ в силу четности G и нечетности H следует, что $G(z) \equiv H(z) \equiv 0$.

ii) Если $H(z) \equiv 0$, то $\int_0^\sigma t^{2p+1} d\mu(t) = 0$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\int_0^\sigma f(t) t d\mu(t) = 0$ для любой функции $f \in C[0, 1]$. Поэтому $F'(z) \equiv 0$ и, значит, $F(z) \equiv c$. И наоборот, если $F(z) \equiv c$, то $2iH(z) \equiv F(z) - F(-z) \equiv 0$.

Доказательство iii) и iv) вытекает из i), ii) и (3).

Утверждение v) сразу следует из (6), если учесть, что G четная, а H нечетная функции.

Докажем утверждение 2). Предположим, что $h_\alpha(z) \equiv 0$. Тогда $G(z) \cos \alpha \equiv H(z) \sin \alpha \equiv 0$ (см. утверждение 1), v). Так как $F(z) \not\equiv 0$, то (см. утверждение 1), i) $G(z) \not\equiv 0$ и, значит, $\cos \alpha = 0$ и $H(z) \equiv 0$. Поэтому (см. (3) и утверждение 1), ii) $G(z) \equiv F(z) \equiv c$, $c \neq 0$. Из условия и (5) следует, что при всех $x > 0$ выполняется неравенство $C(x) \cos \tau - S(x) \sin \tau \equiv c \cos(\sigma x + \tau) \geq 0$, чего не может быть при $c \neq 0$.

Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *положительно определенной* на $\mathbb{R}$ (см., например, [15]), если для любых $n \in \mathbb{N}$, $\{x_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ и $\{c_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство $\sum_{k,j=1}^n c_k \bar{c}_j f(x_k - x_j) \geq 0$. Для таких функций $|f(x)| \leq f(0)$, $x \in \mathbb{R}$, и непрерывность в нуле эквивалентна непрерывности на $\mathbb{R}$. По теореме Бохнера–Хинчина функция f является положительно определенной и непрерывной на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} d\nu(u)$, где ν неотрицательная, конечная, борелевская мера на $\mathbb{R}$. Если $f \in C(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$, то положительная определенность функции f эквивалентна неотрицательности ее преобразования Фурье, т.е. $\hat{f}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iux} du \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, и в этом случае $\hat{f} \in L(\mathbb{R})$ (см. [16; гл. I, § 1, следствие 1.26]).

ЛЕММА 2. Пусть μ – вещественная функция ограниченной вариации на отрезке $[0, \sigma]$ и непрерывна слева в каждой точке интервала $(0, \sigma)$. Тогда

- 1) $S(x) \geq 0$ при всех $x > 0 \Leftrightarrow \mu(t) - \mu(0) \equiv f(\sigma - t)$ при $0 \leq t < \sigma$, где f – четная, положительно определенная и непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, $f(t) = 0$, $|t| \geq \sigma$; в этом случае $f(0) = \mu(\sigma - 0) - \mu(0) \geq 0$ и $\mu(\sigma - 0) - \mu(0) = 0 \Leftrightarrow S(x) \equiv 0 \Leftrightarrow F(z) \equiv ce^{i\sigma z}$, $c \in \mathbb{R}$;
- 2) если $S(x) \geq 0$ при всех $x > 0$ и $F(0) \leq 0$, то $H'(0) \leq 0$; в этом случае $F'(0) = 0 \Leftrightarrow H'(0) = 0 \Leftrightarrow F(0) = 0$ и $\int_0^\sigma f(t) dt = 0$, где f – соответствующая функция из утверждения 1);
- 3) если $S(x) \geq 0$ при всех $x > 0$ и $F(0) \geq \mu(\sigma - 0) - \mu(0)$, то $H'(0) \geq 0$; в этом случае $F'(0) = 0 \Leftrightarrow H'(0) = 0 \Leftrightarrow F(z) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1). Из (2) и формулы интегрирования по частям получим, что $S(x) = xK(x)$, где $K(x) := \int_0^\sigma \cos tx (\mu(\sigma - t) - \mu(0)) dt$. Пусть сначала $S(x) \geq 0$ при всех $x > 0$. Функция $2K(x)$ является преобразованием Фурье финитной, интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции $\mu((\sigma - |t|)_+) - \mu(0)$, которая ограничена в окрестности нуля. Так как $K(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $K \in L(\mathbb{R})$ (см., например, [5], [15]) и, значит, при почти всех $t \in \mathbb{R}$ имеет место формула обращения (см., например, [5], [15], [16])

$$\mu((\sigma - |t|)_+) - \mu(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} K(x) dx =: f(t).$$

Функция f , стоящая в правой части последнего равенства, является четной, непрерывной и положительно определенной на $\mathbb{R}$. Левая часть последнего равенства равна 0 при $|t| \geq \sigma$. Поэтому из непрерывности f следует, что $f(t) = 0$ при всех $|t| \geq \sigma$. Так как функция μ непрерывна слева в каждой точке интервала $(0, \sigma)$, из последнего равенства также вытекает непрерывность функции μ в каждой точке этого интервала и $\mu(0 + 0) - \mu(0) = f(\sigma) = 0$. Поэтому $\mu \in C[0, \sigma]$ и $\mu(t) - \mu(0) \equiv f(\sigma - t)$ при $0 \leq t < \sigma$. Обратное утверждение очевидно. Первая часть утверждения 1) доказана. Вторая часть вытекает из неравенства $|f(x)| \leq f(0)$, $x \in \mathbb{R}$, и леммы 1 (утверждение 1)).

Утверждение 2) сразу получается из равенств $F'(0) = iH'(0)$, $F(0) = \mu(\sigma) - \mu(0)$, $H'(0) = \int_0^\sigma t d\mu(t) = \sigma F(0) - \int_0^\sigma f(\sigma - t) dt$ и неравенства $\int_0^\sigma f(t) dt \geq 0$.

Утверждение 3) – из неравенств $|f(t)| \leq f(0)$ и $H'(0) = \int_0^\sigma (F(0) - f(t)) dt \geq \int_0^\sigma (f(0) - f(t)) dt \geq 0$. Если $H'(0) = 0$, то $F(0) = f(0) \equiv f(t)$ при $t \in [0, \sigma]$ и, значит, $f(0) = 0$, $S(x) \equiv 0$, $F(z) \equiv ce^{i\sigma z}$, где $c = F(0) = 0$.

ЛЕММА 3. Пусть f, g – положительно определенные на $\mathbb{R}$ функции из класса $C(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$ и $f(x) \not\equiv 0$, $g(x) \not\equiv 0$ на $\mathbb{R}$. Если функция f финитная, то

- 1) $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x) dx > 0$;
- 2) при всех $\alpha > 0$ и $\beta \in \mathbb{R}$ таких, что $|\beta| \leq \alpha$, выполняется неравенство $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}(1 - \beta|x|)f(x) dx > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\hat{f}(t) \geq 0$ и $\hat{g}(t) \geq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$, то $\hat{f}, \hat{g} \in L(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. Из формулы умножения вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(-t)\hat{f}(t) dt \geq 0.$$

Если интеграл равен 0, то $\hat{g}(-t)\hat{f}(t) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$. Так как $g(x) \not\equiv 0$, то $\hat{g}(-t) \not\equiv 0$ на некотором интервале (a, b) , $a < b$. Поэтому $\hat{f}(t) = 0$ на (a, b) , а так как $\hat{f}$ целая, то $\hat{f}(t) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$. Поэтому $f(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$, что противоречит условию. Первое неравенство доказано. Второе неравенство вытекает из первого, если взять $g(x) := e^{-\alpha|x|}(1 - \beta|x|)$. Тогда при указанных значениях параметров $g \in C(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$ и

$$\hat{g}(t) = \frac{2((\alpha - \beta)\alpha^2 + (\alpha + \beta)t^2)}{(\alpha^2 + t^2)^2} \geq 0 \quad \text{при всех } t \in \mathbb{R}.$$

ЛЕММА 4. Пусть ν – функция ограниченной вариации на отрезке $[0, \sigma]$. Тогда справедливо равенство $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^\sigma e^{-tu} d\nu(u) = \nu(+0) - \nu(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала функция ν непрерывна справа в точке $t = 0$. Тогда при любых $\varepsilon \in (0, \sigma)$ и $t > 0$ выполняется неравенство $|\int_0^\sigma e^{-tu} d\nu(u)| \leq V_0^\varepsilon + e^{-\varepsilon t} V_0^\sigma$. Здесь V_0^t – вариация функции ν на отрезке $[0, t]$. Переходя к пределу, получаем, что $\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\int_0^\sigma e^{-tu} d\nu(u)| \leq V_0^\varepsilon$. Так как ν непрерывна справа в точке $t = 0$, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} V_0^\varepsilon = 0$. В этом случае лемма доказана. В общем случае полагаем $\nu_1(0) := \nu(+0)$ и $\nu_1(t) := \nu(t)$ при $0 < t \leq \sigma$. Очевидно, ν_1 – функция ограниченной вариации на отрезке $[0, \sigma]$ и непрерывна справа в точке $t = 0$. Тогда $\int_0^\sigma e^{-tu} d\nu(u) = \int_0^\sigma e^{-tu} d\nu_1(u) + \nu(+0) - \nu(0) \rightarrow \nu(+0) - \nu(0)$ при $t \rightarrow +\infty$.

3. Доказательство теорем. Примеры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем, что у функции F нет нулей в открытой нижней полуплоскости. Пусть $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y < 0$ и $h(t) := -y/(\pi(y^2 + t^2))$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда (см. (3))

$$\begin{aligned} F(z)e^{-i\sigma z} &= - \int_0^\sigma e^{-ixu} e^{yu} d\mu(\sigma - u) = - \int_0^\sigma e^{-ixu} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} h(t) dt \right) d\mu(\sigma - u) \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \left(\int_0^\sigma e^{i(t-x)u} d\mu(\sigma - u) \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t+x)(C(t) + iS(t)) dt. \end{aligned}$$

Если $C(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $F(z) \not\equiv 0$, то $C(x) \not\equiv 0$ и, значит,

$$\operatorname{Re}(F(z)e^{-i\sigma z}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\pi(y^2 + (t+x)^2)} \cdot C(t) dt > 0, \quad \operatorname{Im} z < 0.$$

Утверждение о простоте вещественных нулей функции F следует из следующей теоремы А.

ТЕОРЕМА А ([14; теорема 1 при $F(z) := \sin(\sigma z + \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\lambda_k = (k\pi - \beta)/\sigma$, $n = 0$]). Пусть выполнены условия:

- а) f – вещественная целая функция экспоненциального типа $\leq \sigma$, $\sigma > 0$, $f \not\equiv 0$ и на вещественной оси $f(x) = o(x)$, $x \rightarrow \pm\infty$;
- б) при некотором $\beta \in \mathbb{R}$ и $\forall k \in \mathbb{Z}$ выполняются неравенства $(-1)^k f(\lambda_k) \geq 0$, где $\lambda_k := (k\pi - \beta)/\sigma$.

Тогда

- 1) в каждом интервале $I_p := (\lambda_{p-1}, \lambda_p)$, $p \in \mathbb{Z}$, может находиться лишь один нуль функции f и если есть, то он простой; более того, если $x_0 \in I_p$ и $f(x_0) = 0$, то $(-1)^p f'(x_0) > 0$;³
- 2) $xf(x) \neq o(1)$, $x \rightarrow \pm\infty$;
- 3) функция f имеет только вещественные нули;
- 4) если при некотором $p \in \mathbb{Z}$ число λ_p является нулем функции f , то его кратность не более, чем 2, и в одном из интервалов I_p и I_{p+1} нулей функции f нет; если число λ_p является нулем кратности 2, то $(-1)^{n+p} f^{(2)}(\lambda_p) < 0$ и $(-1)^p f(x) < 0$ при $x \in I_p \cup I_{p+1}$, а числа λ_{p-1} и λ_{p+1} могут быть только простыми нулями.

Предположим, что существует $x_0 \in \mathbb{R}$ такой, что выполняются равенства $F(x_0) = F'(x_0) = 0$. Тогда $G(x_0) = H(x_0) = G'(x_0) = H'(x_0) = 0$. Из (6) и леммы 1 (утверждение 2)) следует, что при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ функция h_α удовлетворяет условию теоремы А (при $\beta = \alpha$) и число $x = x_0$ является нулем функции h_α кратности не меньше 2. Поэтому $x_0 \in \{(p\pi - \alpha)/\sigma : p \in \mathbb{Z}\} \cap \{(p\pi - \delta)/\sigma : p \in \mathbb{Z}\}$ при любых $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$. Но при $\alpha = \delta - \pi/2$ это пересечение пусто. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $S(x) \geq 0$ при всех $x > 0$. Тогда $\mu(\sigma - 0) \geq \mu(0)$ (лемма 2) и $\mu(\sigma - 0) - \mu(0) = 0 \Leftrightarrow S(x) \equiv 0 \Leftrightarrow F(z) \equiv ce^{i\sigma z}$, $c \in \mathbb{R}$. В нашем случае $F(z) \not\equiv 0$. Поэтому, если $S(x) \equiv 0$, то функция F не имеет нулей. Пусть $S(x) \not\equiv 0$. Тогда (см. доказательство теоремы 1) при $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y < 0$ и $h(t) := -y/(\pi(y^2 + t^2))$, $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(F(z)e^{-i\sigma z}) &= \int_0^{+\infty} (h(x+t) - h(x-t)) S(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{4xyt}{\pi(y^2 + (t+x)^2)(y^2 + (t-x)^2)} \cdot S(t) dt \neq 0, \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im} z < 0, \quad \operatorname{Re} z \neq 0.$$

²Для более узкого класса функций f эта теорема доказана в работе автора [13].

³Это неравенство имеется в самом доказательстве данной теоремы.

Если $x < 0$ или $x > 0$, то последний интеграл соответственно положителен или отрицателен. Таким образом, в полуплоскости $\text{Im } z < 0$ при $\text{Re } z \neq 0$ функция F не имеет нулей. Рассмотрим случай $\text{Re } z = 0$. Если f – функция из леммы 2, то

$$g(y) := F(iy)e^{\sigma y} = - \int_0^{\sigma} e^{yu} d\mu(\sigma - u) = F(0) + y \int_0^{\sigma} e^{yu} f(u) du,$$

$$g'(y) = \int_0^{\sigma} e^{yu} (1 + yu) f(u) du.$$

Из леммы 4 вытекает, что $g(-\infty) := \lim_{y \rightarrow -\infty} g(y) = \mu(\sigma) - \mu(\sigma - 0) = F(0) - (\mu(\sigma - 0) - \mu(0))$. Если $y < 0$, то из леммы 3 ($\beta = \alpha = -y > 0$) вытекает, что $g'(y) > 0$ и, значит, функция g строго возрастает на $(-\infty, 0]$. Поэтому $g(-\infty) < g(y) < g(0) = F(0)$ при всех $y < 0$. Из этого неравенства вытекает утверждение 1). Утверждение 2) вытекает из строгой монотонности функции g на $(-\infty, 0]$.

Докажем утверждение о кратности вещественных нулей функции F . Если при некотором $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, выполняются равенства $F(x_0) = F'(x_0) = 0$, то из (3) следует, что числа $\pm x_0$ являются нулями функций G , H , C , S и их кратность не меньше 2. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ выбираем так, чтобы $(p\pi - \alpha + (\pi/2))/\sigma \neq \pm x_0$ при всех $p \in \mathbb{Z}$, что эквивалентно неравенству $\cos(\alpha \pm \sigma x_0) \neq 0$. Из (6) и леммы 1 (утверждение 2)) следует, что функция $f(z) := zh_{\alpha}(z)/((z^2 - x_0^2)^2)$ удовлетворяет условию теоремы A (при $\beta = \alpha - \pi/2$) и, значит, $xf(x) \neq o(1)$, $x \rightarrow \pm\infty$, что, очевидно, не так.

Пусть $F(0) = 0$. Из (6) и леммы 1 (утверждение 2)) следует, что функция $f(z) := h_0(z)/z$ удовлетворяет условию теоремы A (при $\beta = -\pi/2$) и число $x_0 = 0 \in I_0 = (-\pi/2, \pi/2)$ является нулем f . Поэтому $f'(0) > 0$. Осталось учесть, что $F''(0) = h_0''(0) = 2f'(0)$. Теорема 2 доказана.

ПРИМЕР 1 (см. также [7], [13], [14]). Пусть функция μ абсолютно непрерывна на $[0, \sigma]$, т.е. $d\mu(t) = g(t)dt$, где $g \in L(0, \sigma)$. Предположим, что функция g неотрицательна, не убывает и $g(t) \not\equiv 0$ на $(0, \sigma)$. Известно, что в этом случае $S(x) = \int_0^{\sigma} g(\sigma - t) \sin xt dt \geq 0$ при всех $x > 0$. Следующее доказательство данного неравенства принадлежит Тригубу. Для произвольного фиксированного $x > 0$ положим $G(u) := 0$ при $u > \sigma x$ и $G(u) := g(\sigma - u/x)$ при $0 \leq u \leq \sigma x$. Тогда функция G неотрицательна и не возрастает на $(0, +\infty)$. Очевидно, что при всех $p \in \mathbb{Z}_+$ и $u \in [2p\pi, 2(p+1)\pi]$ выполняется неравенство $G_p(u) := (G(u) - G(2p\pi + \pi)) \sin u \geq 0$. Поэтому

$$xS(x) = \int_0^{\sigma x} g\left(\sigma - \frac{u}{x}\right) \sin u du = \int_0^{+\infty} G(u) \sin u du = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} G_p(u) du \geq 0.$$

В этом случае выполняются условия теоремы 2 и $F(0) = \mu(\sigma - 0) - \mu(0) > 0$. Поэтому все нули функции F лежат в верхней замкнутой полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$ и все вещественные нули функции F (если они есть) простые. Из последнего неравенства сразу следует, что $S(x_0) = 0$ при некотором $x_0 > 0 \Leftrightarrow$ при некотором $\beta \in [0, \sigma)$ функция g является на (β, σ) кусочно постоянной с равностоящими узлами (т.е. интервал (β, σ) можно разбить на конечное число интервалов одинаковой длины $d > 0$, на каждом из которых g постоянна) и $g(t) \equiv 0$ на $(0, \beta)$, если $\beta > 0$ (при этом всегда можно считать, что $g(\beta - 0) > 0$). Пусть $S(x_0) = 0$ при некотором $x_0 > 0$.

Тогда

$$F(z) = \frac{e^{idz} - 1}{iz} \cdot e^{i\beta z} F_1(z), \quad \text{где } F_1(z) := \sum_{p=1}^m c_p e^{i(p-1)dz},$$

$$m = \frac{\sigma - \beta}{d} \in \mathbb{N}, \quad 0 < c_1 \leq \dots \leq c_m.$$

В этом случае функция F имеет бесконечно много вещественных нулей $z_k = 2\pi k/d$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Так как все нули функции F лежат в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$, при $m \geq 2$ все нули функции F_1 лежат на конечном числе прямых $\operatorname{Im} z = c \geq 0$, которых не более, чем $m - 1$, и на каждой из них лежит бесконечно много нулей F_1 , а все вещественные ее нули простые (если есть).

ПРИМЕР 2. Пусть $F(z) := \sum_{k=0}^m c_k e^{i\lambda_k z} \not\equiv 0$, где $c_k \in \mathbb{R}$ и $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m = \sigma$. Тогда $F(z) = \int_0^\sigma e^{izt} d\mu(t)$, где μ – ступенчатая функция, имеющая скачки в точках $t = \lambda_k$. В этом случае $C(x) = \sum_{k=0}^m c_k \cos(\lambda_m - \lambda_k)x$. Если f – четная, непрерывная, положительно определенная на $\mathbb{R}$ функция и $f(x) = 0$ при $|x| \geq m$, то $f(0) + 2 \sum_{k=1}^m f(k) \cos kx = \sum_{k=-m}^m f(k) e^{ikx} \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ (доказательство этого утверждения Тригуба см. в [17]). Поэтому, если взять $\lambda_k = k$ при $0 \leq k \leq m$ и $c_k = f(m - k)$, $0 \leq k < m$, $c_m = f(0)/2$, то $C(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Можно взять, например, функцию $f(x) = (1 - (|x|/m)^\lambda)_+^\delta$, где $0 < \lambda \leq 1$, $\delta \geq 1$.

ПРИМЕР 3. Пусть функция μ вещественна, абсолютно непрерывна на $[0, \sigma]$ и $d\mu(t) = g(t)dt$, где $g \in C[0, \sigma]$, $g(0) = 0$, $g(\sigma) > 0$ и функция $g((\sigma - |t|)_+)$ является положительно определенной на $\mathbb{R}$. Тогда $C(x) = \int_0^\sigma g(\sigma - t) \cos xt dt \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. В этом случае выполняются условия теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.
- [2] Е. Лукач, *Характеристические функции*, Наука, М., 1979.
- [3] А. М. Седлецкий, “О целых функциях класса С. Н. Бернштейна, не являющихся преобразованиями Фурье–Стилтьеса”, *Матем. заметки*, **61**:3 (1997), 367–380.
- [4] И. В. Тихонов, “Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:2 (2003), 133–166.
- [5] R. M. Trigub, E. S. Belinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions*, Kluwer Acad. Publ., Boston–Dordrecht–London, 2004.
- [6] G. H. Hardy, “On the zeroes of certain classes of integral Taylor series. Part II. On the integral function $\sum_{n=0}^\infty x^n / ((n+a)^s n!)$ and other similar functions”, *Proc. London Math. Soc. Ser. 2*, **2**:1 (1905), 401–431.
- [7] G. Polya, “Über die nullstellen gewisser ganzer funktionen”, *Math. Z.*, **2**:3–4 (1918), 352–383.
- [8] E. C. Titchmarsh, “The zeros of certain integral functions”, *Proc. London Math. Soc. Ser. 2*, **25**:1 (1926), 283–302.
- [9] M. Cartwright, “The zeros of certain integral functions”, *Quart. J. Math.*, **1**:1 (1930), 38–59.
- [10] M. Cartwright, “The zeros of certain integral functions. (II)”, *Quart. J. Math.*, **2**:1 (1931), 113–129.

- [11] A. M. Sedletskii, “On zeros of Laplace transforms of finite measure”, *Integral Transform. Spec. Funct.*, **1**:1 (1993), 51–59.
- [12] А. М. Седлецкий, “О нулях преобразований Лапласа”, *Матем. заметки*, **76**:6 (2004), 883–892.
- [13] В. П. Заставный, “Теорема о нулях целых функций и ее применение”, *Матем. заметки*, **75**:2 (2004), 192–207.
- [14] V. P. Zastavnyi, “A theorem on zeros of an entire function and its applications”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **10**:2 (2004), 91–104.
- [15] Н. И. Ахиезер, *Лекции об интегральных преобразованиях*, Вища Школа, Харьков, 1984.
- [16] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.
- [17] V. P. Zastavnyi, “On positive definiteness of some functions”, *J. Multivariate Anal.*, **73**:1 (2000), 55–81.

В. П. Заставный

Донецкий национальный университет

E-mail: zastavn@rambler.ru, zastavn@skif.net

Поступило

11.04.2006