Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Воблый, Упрощение некоторых формул для числа карт на поверхностях, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 1, 14–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3766>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:41:54

Упрощение некоторых формул для числа карт на поверхностях

В. А. Воблый

С помощью полученных автором двух комбинаторных тождеств упрощены формулы для числа общих корневых кубических планарных карт для числа g -существенных карт на поверхностях с малым родом, а также для корневых эйлеровых карт на проективной плоскости. Кроме того, найдена асимптотика числа рассматриваемых карт с большим количеством вершин.

Библиография: 11 названий.

Перечислением карт на поверхностях занимались многие авторы [1]–[5]. Однако даже в тех случаях, когда удавалось получить результат в виде явной формулы, она обычно включала знак суммирования. Для облегчения получения асимптотики числа карт с большим числом вершин желательно нахождение формул для их числа без сумм.

В работе с помощью выведенных автором комбинаторных тождеств упрощены формулы для числа общих корневых кубических планарных карт для числа некоторых g -существенных карт на поверхностях с малым родом, а также для корневых эйлеровых карт на проективной плоскости. Кроме того, найдена асимптотика числа рассматриваемых карт с большим количеством вершин.

1. Докажем сначала ряд вспомогательных предложений.

ЛЕММА 1. При $m \geq 2n$ верно тождество

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{m}{n+i}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{n! \Gamma((m-2n+1)/2)}{2^n \Gamma((m+1)/2)}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим левую часть тождества (1) через $f(n, m)$ и используем интегральное представление бета-функции Эйлера и ее выражение через гамма-функцию [6; с. 23, 24]

$$B(n, m) = \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{m-1} dt = \frac{\Gamma(n) \Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}. \quad (2)$$

Тогда с учетом бинома Ньютона имеем

$$f(n, m) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^{-i} \frac{(n+i)! (m-n-i)!}{m!}$$

$$\begin{aligned}
&= (m+1) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^{-i} \int_0^1 t^{n+i} (1-t)^{m-n-i} dt \\
&= (m+1) \int_0^1 t^n (1-t)^{m-n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{t}{2(1-t)} \right)^i dt \\
&= (m+1) \int_0^1 t^n (1-t)^{m-n} \left(1 + \frac{t}{2(1-t)} \right)^n dt \\
&= \frac{m+1}{2^n} \int_0^1 t^n (1-t)^{m-2n} (2-t)^n dt.
\end{aligned}$$

После замены переменной $t = 1 - \sqrt{x}$ получим

$$\begin{aligned}
f(n, m) &= \frac{m+1}{2^{n+1}} \int_0^1 x^{(m-2n-1)/2} (1-x)^n dx = \frac{m+1}{2^{n+1}} B\left(\frac{m-2n+1}{2}, n+1\right) \\
&= \frac{(m+1)\Gamma((m-2n+1)/2)\Gamma(n+1)}{2^{n+1}\Gamma((m+3)/2)}.
\end{aligned}$$

В такой форме тождество представлено в работе автора [7]. В силу функционального уравнения для гамма-функции [8; с. 17]

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (3)$$

$\Gamma((m+3)/2) = (m+1)/2\Gamma((m+1)/2)$ и, следовательно, верна формула (2).

ЛЕММА 2. При $n \geq 0$ верно тождество

$$\sum_{i=0}^n \binom{2i}{i} \frac{i}{i+1} 2^{-i} = \binom{2n+2}{n+1} 2^{-n-1} - 1. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После почленного интегрирования известного степенного ряда [6; с. 711]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} 2^{-n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$$

будем иметь

$$\int_0^x f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} 2^{-n} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 1 - \sqrt{1-2x}.$$

Разделим обе части полученного равенства на x и почленно продифференцируем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} 2^{-n} \frac{nx^{n-1}}{n+1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - \sqrt{1-2x}}{x} \right) = \frac{1-x - \sqrt{1-2x}}{x^2 \sqrt{1-2x}}.$$

Введем обозначения

$$a_n = \binom{2n}{n} 2^{-n} \frac{n}{n+1}, \quad b_n = 1, \quad n = 0, 1, \dots;$$

тогда имеем

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{x} \left(\frac{1-x}{\sqrt{1-2x}} - 1 \right), \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{1-x},$$

$$C(x) = A(x)B(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-2x}} - \frac{1}{1-x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

где

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{2i}{i} 2^{-i} \frac{i}{i+1}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\binom{2n}{n} 2^{-n} - 1 \right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\binom{2n}{n} 2^{-n} - 1 \right) x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\binom{2n+2}{n+1} 2^{-n-1} - 1 \right) x^n. \end{aligned}$$

Поэтому

$$c_n = \left(\binom{2n+2}{n+1} 2^{-n-1} - 1 \right),$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3. При $m \geq 1$ верно тождество

$$\sum_{i=0}^n i(i-1) \cdots (i-m+1) \binom{n}{i} x^i = n(n-1) \cdots (n-m+1) x^m (1+x)^{n-m}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу биннома Ньютона имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n i(i-1) \cdots (i-m+1) \binom{n}{i} x^i &= x^m \frac{d^m}{dx^m} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \right) = x^m \frac{d^m}{dx^m} (1+x)^n \\ &= n(n-1) \cdots (n-m+1) x^m (1+x)^{n-m}. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Отметим, что тождества (1) и (4) отсутствуют в известных сборниках комбинаторных тождеств [6] и [9] и поэтому могут иметь самостоятельное значение. Тождество (5) может быть выведено из известных тождеств, однако этот вывод длиннее, чем непосредственное доказательство.

2. Перейдем теперь к изложению основных результатов работы.

Пусть c_n – число общих корневых кубических планарных карт (допускаются петли и кратные ребра) с $2n-1$ некорневыми вершинами, $n \geq 2$. Лью [4] получил формулу

$$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{2n-i+1} (n+i-1)! (2n-i+1)!}{i! (n-i-1)! (n+1)! (n+2)!}. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 1. При $n \geq 2$ верна формула

$$c_n = 6 \frac{8^n \Gamma(3n/2)}{(n+2)! \Gamma(n/2)}, \quad (7)$$

а при $n \rightarrow \infty$ верна асимптотика

$$c_n = \sqrt{\frac{6}{\pi}} n^{-5/2} (12\sqrt{3})^n (1 + o(1)). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выразим p_n через $f(n, m)$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2^{2n+1}}{(n+1)!(n+2)!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n+i-1)!(2n-i+1)!}{i!(n-i-1)!} 2^{-i} \\ &= \frac{2^{2n+1}(3n)!}{(n-1)!(n+1)!(n+2)!} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \binom{3n}{n+i-1} 2^{-i} \\ &= \frac{2^{2n+1}(3n)!}{(n-1)!(n+1)!(n+2)!} f(n-1, 3n). \end{aligned}$$

С учетом тождеств (1) и (3) получим

$$c_n = \frac{2^{n+2}(3n)! \Gamma((n+3)/2)}{(n+1)!(n+2)! \Gamma((3n+1)/2)} = \frac{2^{n+1}(3n)! \Gamma((n+1)/2)}{n!(n+2)! \Gamma((3n+1)/2)}.$$

Из формулы удвоения для гамма-функции [2; с. 19] имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(2z) &= 2^{2z-1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right), \\ n! &= \Gamma(n+1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right), \\ (3n)! &= \Gamma(3n+1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{3n} \Gamma\left(\frac{3n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3n+2}{2}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Следовательно,

$$c_n = \frac{2^{3n+1} \Gamma((3n+2)/2)}{(n+2)! \Gamma((n+2)/2)},$$

что эквивалентно (7) в силу тождества (3). По формуле Стирлинга для гамма-функции [8; с. 62] при $z \rightarrow \infty$

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z (1 + o(1)); \quad (10)$$

следовательно, имеем при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{6(8^n) \Gamma(3n/2)}{(n+2)(n+1)n \Gamma(n) \Gamma(n/2)} = 6(8^n) n^{-3} \frac{\sqrt{4\pi/3n} (3n/2e)^{3n/2}}{\sqrt{2\pi/n} (n/e)^n \sqrt{4\pi/n} (n/2e)^{n/2}} (1 + o(1)) \\ &= \sqrt{\frac{6}{\pi}} n^{-5/2} (12\sqrt{3})^n (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Пусть $f_P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n$, $f_T(x) = \sum_{n=2}^{\infty} t_n x^n$, $f_K(x) = \sum_{n=2}^{\infty} k_n x^n$ – соответственно, производящие функции по числу ребер карты для числа $(1/2)$ -существенных карт на проективной плоскости, 1-существенных карт на торе и 1-существенных карт на бутылке Клейна. Хао, Каи и Лью [5] вывели следующие формулы:

$$\begin{aligned} f_P(x) &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^n \frac{2^{i-1}(i+2)!(2n-i-1)!(4n-3i)}{(n+1)!i!(n-i)!} x^{n+1}, \\ f_T(x) &= x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \frac{2^i(i+5)!(2n-i)!}{12(n+1)!i!(n-i)!} x^{n+3}, \\ f_K(x) &= 4x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \frac{2^i(i+5)!(2n-i)!\lambda_i(n)}{5!i!(n-i)!(n+2)!(n+1)!} x^{n+3}, \end{aligned}$$

где $\lambda_i(n) = 50n^2 - 8n(i-18) - i^2 - 21i + 82$.

ТЕОРЕМА 2. При $n \geq 2$ верна формула

$$t_n = \frac{1}{12} \frac{(2n)!}{(n-2)!n!}, \quad (11)$$

а при $n \rightarrow \infty$ верна асимптотика

$$t_n = \frac{1}{12\sqrt{\pi}} n^{3/2} 2^{2n} (1 + o(1)). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем выражение для t_n :

$$t_{n+3} = \sum_{i=0}^n \frac{2^i(i+5)!(2n-i)!}{12(n+1)!i!(n-i)!} = \frac{(2n+5)!}{12(n+1)!n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{2n+5}{i+5}^{-1} 2^i.$$

После замены переменной $j = n - i$ с учетом симметрии биномиальных коэффициентов получим

$$\begin{aligned} t_{n+3} &= \frac{(2n+5)!}{12(n+1)!n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} \binom{2n+5}{n-j+5}^{-1} 2^{n-j} \\ &= \frac{2^n(2n+5)!}{12(n+1)!n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{2n+5}{n+j}^{-1} 2^{-j}. \end{aligned}$$

Используем теперь тождество (1):

$$t_{n+3} = \frac{2^n(2n+5)!}{12(n+1)!n!} f(n, 2n+5) = \frac{2^n(2n+5)!n!\Gamma(3)}{12(n+1)!n!2^n\Gamma(n+3)} = \frac{(2n+5)!}{6(n+1)!(n+2)!}.$$

После умножения числителя и знаменателя дроби на $2n+6$ имеем

$$t_{n+3} = \frac{(2n+6)!}{12(n+1)!(n+3)!}, \quad (13)$$

что эквивалентно формуле (11). В силу формулы Стирлинга для факториала при $n \rightarrow \infty$

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + o(1)) \quad (14)$$

и, следовательно, при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{\sqrt{2\pi n}(2n/e)^{2n}}{2\pi n(n/e)^{2n}}(1 + o(1)) = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}(1 + o(1)). \quad (15)$$

Поэтому

$$t_n = \frac{n(n-1)}{12} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{n^2}{12} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 2^{2n}(1 + o(1)),$$

что равносильно формуле (12).

ТЕОРЕМА 3. При $n \geq 1$ верна формула

$$p_n = 2^{2n-1} - \binom{2n-1}{n}, \quad (16)$$

а при $n \rightarrow \infty$ верна асимптотика

$$p_n = 2^{2n-1}(1 + o(1)). \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опять используем интегральное представление (2)

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \sum_{i=0}^n \frac{2^{i-1}(i+2)!(2n-i-1)!(4n-3i)}{(n+1)!i!(n-i)!} \\ &= \frac{1}{2(n+1)!n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (i+2)!(2n-i-1)!(4n-3i)2^i \\ &= \frac{(2n+2)!}{2(n+1)!n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i (4n-3i) \int_0^1 t^{i+2}(1-t)^{2n-i-1} dt. \end{aligned}$$

С помощью бинома Ньютона и леммы 3 получим

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{(2n+2)!}{2(n+1)!n!} \int_0^1 t^2(1-t)^{2n-1} \left(4n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{2t}{1-t} \right)^i - 3 \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} \left(\frac{2t}{1-t} \right)^i \right) dt \\ &= \frac{(2n+2)!}{2(n+1)!n!} \int_0^1 t^2(1-t)^{2n-1} \left(4n \left(1 + \frac{2t}{1-t} \right)^n - 3n \frac{2t}{1-t} \left(1 + \frac{2t}{1-t} \right)^{n-1} \right) dt. \end{aligned}$$

После упрощения имеем

$$p_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n-1)!(n+1)!} \int_0^1 (1-t^2)^{n-1} (2t^2 - t^3) dt.$$

Сделаем замену переменной $t = \sqrt{x}$,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{(2n+2)!}{2(n-1)!(n+1)!} \left(2 \int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{n-1} dx - \int_0^1 x(1-x)^{n-1} dx \right) \\ &= \frac{(2n+2)!}{2(n-1)!(n+1)!} \left(2B\left(\frac{3}{2}, n\right) - B(2, n) \right) \\ &= \frac{(2n+2)!}{2(n-1)!(n+1)!} \left(\frac{2\Gamma(3/2)\Gamma(n)}{\Gamma(n+3/2)} - \frac{\Gamma(2)\Gamma(n)}{\Gamma(n+2)} \right) \end{aligned}$$

и используем тождество (3)

$$p_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{2(n-1)!(n+1)!} \left(\frac{\sqrt{\pi}(n-1)!}{(n+1/2)\Gamma(n+1/2)} - \frac{(n-1)!}{(n+1)!} \right).$$

Поскольку в силу тождества (9)

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!}, \quad (18)$$

окончательно имеем

$$p_{n+1} = \frac{(2n+2)! \sqrt{\pi} 2^{2n} n!}{2(n+1)!(n+1/2)\sqrt{\pi}(2n)!} - \frac{(2n+2)!}{2(n+1)!(n+1)!} = 2^{2n+1} - \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!},$$

что эквивалентно формуле (16).

Асимптотика p_n при $n \rightarrow \infty$ сразу следует из асимптотики (15):

$$p_n = 2^{2n-1} - \frac{1}{2} \frac{(2n)!}{n!n!} = 2^{2n-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \right) (1 + o(1)) = 2^{2n-1} (1 + o(1)).$$

ТЕОРЕМА 4. При $n \geq 3$ верна формула

$$k_n = \frac{(5n-2)(2n)!}{12(n-1)!n!} - n2^{2n-3}, \quad (19)$$

а при $n \rightarrow \infty$ верна асимптотика

$$k_n = \frac{5}{12\sqrt{\pi}} n^{3/2} 2^{2n} (1 + o(1)). \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\lambda_i(n) = 50n^2 + 144n + 82 - (8n+22)i - i(i-1)$, то с учетом выражения для t_{n+3} имеем

$$\begin{aligned} k_{n+3} &= \frac{1}{120n!(n+2)!(n+1)} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (i+5)!(2n-i)! \lambda_i(n) 2^i \\ &= \frac{50n^2 + 144n + 82}{10(n+1)(n+2)} t_{n+3} - \frac{(8n+22)a_n + b_n}{120(n+1)!(n+2)!}, \end{aligned}$$

где введены обозначения и использована формула (2)

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (i+5)!(2n-i)! i 2^i = (2n+6)! \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i 2^i \int_0^1 t^{i+5} (1-t)^{2n-i} dt \\ &= (2n+6)! \int_0^1 t^5 (1-t)^{2n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i \left(\frac{2t}{1-t} \right)^i dt, \\ b_n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (i+5)!(2n-i)! i(i-1) 2^i \\ &= (2n+6)! \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i(i-1) 2^i \int_0^1 t^{i-5} (1-t)^{2n-i} dt \\ &= (2n+6)! \int_0^1 t^5 (1-t)^{2n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i(i-1) \left(\frac{2t}{1-t} \right)^i dt. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3 и вычисляя интегралы после замены $x = t^2$ по формуле (2), получим

$$\begin{aligned}
 a_n &= (2n+6)! \int_0^1 t^5 (1-t)^{2n} n \frac{2t}{1-t} \left(1 + \frac{2t}{1-t}\right)^{n-1} dt \\
 &= 2(2n+6)! n \int_0^1 t^6 (1-t)^n (1+t)^{n-1} dt = (2n+6)! n \int_0^1 (x^{5/2} - x^3)(1-x)^{n-1} dx \\
 &= (2n+6)! n \left(B\left(\frac{7}{2}, n\right) - B(4, n) \right), \\
 b_n &= (2n+6)! \int_0^1 t^5 (1-t)^{2n} n(n-1) \left(\frac{2t}{1-t}\right)^2 \left(1 + \frac{2t}{1-t}\right)^{n-2} dt \\
 &= 4n(n-1)(2n+6)! \int_0^1 t^7 (1-t)^n (1+t)^{n-2} dt \\
 &= 2n(n-1)(2n+6)! \int_0^1 (x^3 - 2x^{7/2} + x^4)(1-x)^{n-2} dx \\
 &= 2n(n-1)(2n+6)! \left(B(4, n-1) - 2B\left(\frac{9}{2}, n-1\right) + B(5, n-1) \right).
 \end{aligned}$$

С учетом формулы (18) для $\Gamma(n+1/2)$ и тождества (3) найдем

$$\begin{aligned}
 a_n &= n(2n+6)! \left(\frac{\Gamma(7/2)(n-1)!}{\Gamma(n+7/2)} - \frac{6(n-1)!}{(n+3)!} \right) \\
 &= n!(2n+6)! \left(\frac{(5/2)(3/2)(1/2)\sqrt{\pi} 2^{2n+6}(n+3)!}{\sqrt{\pi}(2n+6)!} - \frac{6}{(n+3)!} \right) \\
 &= 120n!(n+3)! 2^{2n} - 6 \frac{n!(2n+6)!}{(n+3)!}, \\
 b_n &= 2n(n-1)(2n+6)! \left(\frac{3!(n-2)!}{(n+2)!} - 2 \frac{\Gamma(9/2)(n-2)!}{\Gamma(n+7/2)} + \frac{4!(n-2)!}{(n+3)!} \right) \\
 &= 2(2n+6)! n! \left(\frac{6}{(n+2)!} + \frac{24}{(n+3)!} - 2 \frac{(7/2)(5/2)(3/1)(1/2)\sqrt{\pi} 2^{2n+6}(n+3)!}{\sqrt{\pi}(2n+6)!} \right) \\
 &= 2(2n+6)! n! \left(\frac{6(n+7)}{(n+3)!} - \frac{105(n+3)! 2^{2n+3}}{(2n+6)!} \right) \\
 &= 12(n+7) \frac{(2n+6)! n!}{(n+3)!} - 210n!(n+3)! 2^{2n+3}.
 \end{aligned}$$

Подставляя a_n и b_n в выражение для k_{n+3} , с учетом формулы (13) имеем

$$\begin{aligned}
 k_{n+3} &= \frac{(50n^2 + 144n + 82)(2n+6)!}{120(n+1)(n+2)!(n+3)!} - (8n+22) \frac{n+3}{n+1} 2^{2n} \\
 &\quad + \frac{6(8n+22)(2n+6)!}{120(n+1)(n+2)!(n+3)!} - \frac{12(n+7)(2n+6)!}{120(n+1)(n+2)!(n+3)!} + 14 \frac{n+3}{n+1} 2^{2n} \\
 &= \frac{(5n^2 + 18n + 13)(2n+6)!}{12(n+1)(n+2)!(n+3)!} - (8n+8) \frac{n+3}{n+1} 2^{2n} \\
 &= \frac{(5n+13)(2n+6)!}{12(n+2)!(n+3)!} - (n+3) 2^{2n+3},
 \end{aligned}$$

что эквивалентно формуле (19).

Отметим, что в работе автора [10] в выражениях для $\lambda_i(n)$ и k_n имеются опечатки. Асимптотика k_n при $n \rightarrow \infty$ легко выводится с помощью асимптотики (15):

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{n(5n-2)(2n)!}{12n!n!} - n2^{2n-3} = \frac{5}{12\sqrt{\pi}} n^{3/2} 2^{2n} (1 + o(1)) - n2^{2n-3} \\ &= \frac{5}{12\sqrt{\pi}} n^{3/2} 2^{2n} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Пусть e_n – число корневых эйлеровых карт с n ребрами на проективной плоскости. Рен и Лью [11] получили при $n \geq 2$ формулу

$$e_{n-1} = \frac{2}{n} \left(3 \sum_{q=0}^{n-2} \binom{2(n-q-2)}{n-q-2} \frac{n-q-2}{n-q-1} 2^q + \binom{2n-3}{n-1} 2^{n-2} \right). \quad (21)$$

ТЕОРЕМА 5. При $n \geq 1$ верна формула

$$e_n = \frac{2^n}{n+1} \left(\binom{2n-1}{n} (1 + 6(2^{-n})) - 3 \right), \quad (22)$$

а при $n \rightarrow \infty$ верна асимптотика

$$e_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} n^{-3/2} 8^n (1 + o(1)). \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После замены переменной $i = n - q - 2$ в формуле (21) с помощью леммы 2 получим

$$\begin{aligned} e_{n-1} &= \frac{2}{n} \left(3(2^{n-2}) \sum_{i=0}^{n-2} \binom{2i}{i} \frac{i}{i+1} 2^{-i} + \binom{2n-3}{n-1} 2^{n-2} \right) \\ &= \frac{2}{n} \left(3(2^{n-2}) \left(\binom{2n-2}{n-1} 2^{1-n} - 1 \right) + \binom{2n-3}{n-1} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\binom{2n-2}{n-1} = 2 \binom{2n-3}{n-1}$$

и переходя от e_{n-1} к e_n , получим формулу (22).

Выражая биномиальный коэффициент через факториалы, с помощью асимптотики (15) найдем

$$\begin{aligned} e_n &= \frac{2^n}{n+1} \left(\frac{1}{2} \frac{(2n)!}{n!n!} (1 + 6(2^{-n})) - 3 \right) \\ &= \frac{2^n}{n+1} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 2^{2n} - 3 \right) (1 + o(1)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} n^{-3/2} 2^{3n} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Автор благодарит анонимного рецензента за предложения по улучшению изложения результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. T. Tutte, “The enumerative theory of planar maps”, *A Survey of Combinatorial Theory* (Proc. Internat. Sympos., Colorado State Univ., Fort Collins, Colo., 1971), North-Holland, Amsterdam, 1973, 437–448.
- [2] E. A. Bender, L. B. Richmond, “A survey of the asymptotic behavior of maps”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **40**:3 (1986), 297–329.
- [3] Y. Liu, *Enumerative theory of maps*, Math. Appl., **468**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [4] Y. Liu, “A note on the number of cubic planar maps”, *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.*, **12**:3 (1992), 282–285.
- [5] R. Hao, Y. Cai, Y. Liu, “Counting g -essential maps on surfaces with small genera”, *Korean J. Comput. Appl. Math.*, **9**:2 (2002), 451–463.
- [6] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды: Элементарные функции*, Физматлит, М., 1981.
- [7] В. А. Воблый, “Асимптотика числа кубических планарных карт”, *Обозр. прикл. промыш. матем.*, **12**:4 (2005), 850–851.
- [8] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция*, Физматлит, 1965.
- [9] H. W. Gould, *Combinatorial Identities.*, A standardized Set of Tables Listing 500 Binomial Coefficient Summations, Morgentown, West Virginia Univ., 1972.
- [10] В. А. Воблый, “Упрощение формул для числа g -существенных карт на поверхностях с малым родом”, *Обозр. прикл. промыш. матем.*, **11**:2 (2004), 236–237.
- [11] H. Ren, Y. Liu, “Counting rooted eulerian maps on the projective plane”, *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.*, **20**:2 (2000), 169–174.

В. А. Воблый

Государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

Поступило

25.12.2006

Исправленный вариант

13.06.2007