Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Вик. С. Куликов, Замечание к проблеме иррациональности общей четырехмерной кубики, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 1, 61–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3767>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:38:17

Замечание к проблеме нерациональности общей четырехмерной кубики

Вик. С. Куликов

Доказано, что общая четырехмерная кубика нерациональна, если верна гипотеза о неразложимости поляризованных структур Ходжа на трансцендентных циклах проективных поверхностей в нетривиальную прямую сумму поляризованных структур Ходжа.

Библиография: 9 названий.

Прежде чем сформулировать основное утверждение настоящей заметки, напомним некоторые определения и утверждения о структурах Ходжа.

Пусть $\mathcal{H} = \{M, H^{p,n-p}, Q\}$ – поляризованная структура Ходжа веса n , т.е. M – свободный $\mathbb{Z}$ -модуль, $Q: M \times M \rightarrow \mathbb{Z}$ – невырожденная билинейная форма, векторное пространство $M \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p=a}^b H^{p,n-p}$ является прямой суммой своих комплексных подпространств $H^{p,n-p}$ для некоторых $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$, такой, что $H^{n-p,p} = \overline{H^{p,n-p}}$ и

$$Q(u, v) = (-1)^n Q(v, u),$$

$$Q(u, v) = 0 \quad \text{для} \quad u \in H^{p,n-p}, v \in H^{p',n-p'}, p \neq n - p'.$$

Поляризованная структура Ходжа $\mathcal{H} = \{M, H^{p,q}, Q\}$ называется *унимодулярной*, если Q является унимодулярной билинейной формой, т.е. если (e_i) – свободный базис модуля M , то определитель матрицы $A = (Q(e_i, e_j))$ равен ± 1 .

Пусть $\mathcal{H}_1 = \{M_1, H_1^{p,q}, Q_1\}$ и $\mathcal{H}_2 = \{M_2, H_2^{p,q}, Q_2\}$ – две поляризованные структуры Ходжа веса n . $\mathbb{Z}$ -гомоморфизм $\mathbb{Z}$ -модулей $f: M_1 \rightarrow M_2$ является *морфизмом поляризованных структур Ходжа*, если $Q_2(f(u), f(v)) = Q_1(u, v)$ для всех $u, v \in M_1$ и гомоморфизм f индуцирует морфизм структур Ходжа, т.е. $f_{\mathbb{C}}(H_1^{p,q}) \subset H_2^{p,q}$ для всех p, q , где $f_{\mathbb{C}} = f \otimes \text{Id}$. Заметим, что если $f: M_1 \rightarrow M_2$ является морфизмом поляризованных структур Ходжа, то f является вложением, так как Q_1 и Q_2 – невырожденные билинейные формы. Скажем, что $\mathcal{H}_1$ является *подструктурой* поляризованной структуры Ходжа $\mathcal{H}_2$ (и будем писать $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$), если вложение $M_1 \subset M_2$ является морфизмом поляризованных структур Ходжа. Поляризованная структура Ходжа $\mathcal{H} = \{M_1 \oplus M_2, H^{p,q}, Q_1 \oplus Q_2\}$ называется *прямой суммой поляризованных структур Ходжа* $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, если канонические вложения $M_i \subset M_1 \oplus M_2$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-00455, 05-02-89000-НВО_а, 07-01-92211-НЦНИЛ_а), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-489.2003.1), программы INTAS (грант № 05-1000008-7805), грантами NWO-RFBR 047.011.2004.026, RUM1-2692-MO-05.

являются морфизмами поляризованных структур Ходжа для $i = 1, 2$. В случае прямой суммы поляризованных структур Ходжа имеем $H^{p,q} = H_1^{p,q} \oplus H_2^{p,q}$ для всех p, q . Скажем, что поляризованная структура Ходжа $\mathcal{H}$ является *неразложимой*, если она не изоморфна прямой сумме двух нетривиальных поляризованных структур Ходжа.

Пусть X – гладкое проективное многообразие, определенное над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. Общеизвестно, что с многообразием X можно связать поляризованную структуру Ходжа $\mathcal{H}_X = \{M_X, H^{p,q}, Q\}$ веса n , где

$$M_X = H^n(X, \mathbb{Z}) / \{\text{torsion}\},$$

$H^{p,q} = H_X^{p,q} \subset H^n(X, \mathbb{C})$ – пространства гармонических (p, q) -форм на X и $Q = Q_X$ – это ограничение на $M_X \subset M_X \otimes \mathbb{C} \simeq H^n(X, \mathbb{C})$ билинейной формы

$$Q(\phi, \psi) = \int_X \phi \wedge \bar{\psi}.$$

Хорошо известно, что решетка (M_X, Q_X) является унимодулярной. Обозначим через $h^{p,q} = h^{p,q}(X) = \dim H_X^{p,q} = \dim H^q(X, \Omega_X^p)$ числа Ходжа многообразия X , где Ω_X^p – это пучок голоморфных p -форм на многообразии X .

ЛЕММА 1. Пусть $f: X \rightarrow V$ – бирациональный морфизм неособых проективных многообразий, $\dim_{\mathbb{C}} X = \dim_{\mathbb{C}} V = n$. Тогда поляризованная структура Ходжа $\mathcal{H}_X$ раскладывается в прямую сумму поляризованной структуры Ходжа $f^*(\mathcal{H}_V) \simeq \mathcal{H}_V$ и некоторой поляризованной структуры Ходжа $\mathcal{H}_V^{\perp}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В частном случае, если $f = \sigma: X \rightarrow V$ – моноидальное преобразование с неособым центром $C \subset V$, это утверждение хорошо известно ([1]–[3]; см. также [4]). Применяя индукцию, отсюда получаем справедливость данного утверждения для композиции $f = \sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1: X \rightarrow V$ моноидальных преобразований $\sigma_i: X_i \rightarrow X_{i-1}$ с неособыми центрами $\tilde{C}_{i-1} \subset X_{i-1}$, где $X_0 = V$ и $X_m = Y$.

Пусть теперь f является произвольным бирациональным морфизмом. Так как $\deg f = 1$, то

$$\int_V \phi \wedge \psi = \int_X f^*(\phi) \wedge f^*(\psi),$$

т.е. морфизм f^* является вложением решетки $M_V = H^n(V, \mathbb{Z})$ в решетку $M_X = H^n(X, \mathbb{Z})$. Следовательно, $f^*: \mathcal{H}_V \rightarrow \mathcal{H}_X$ является вложением поляризованной структуры Ходжа. Так как $f^*(M_V)$ и M_X являются унимодулярными решетками, найдется подрешетка $M_V^{\perp}$ решетки M_X такая, что $M_X = f^*(M_V) \oplus M_V^{\perp}$ является прямой суммой решеток.

Покажем, что это разложение в прямую сумму решеток индуцирует разложение $\mathcal{H}_X = f^*(\mathcal{H}_V) \oplus \mathcal{H}_V^{\perp}$ в прямую сумму поляризованных структур Ходжа. Так как образ при морфизме структур Ходжа является структурой Ходжа, то для этого достаточно показать, что естественная проекция $\text{pr}^{\perp}: M_X \otimes \mathbb{C} \rightarrow M_V^{\perp} \otimes \mathbb{C}$ является морфизмом структур Ходжа. Для того, чтобы показать, что $\text{pr}^{\perp}$ является морфизмом структур Ходжа, рассмотрим бирациональное отображение $f^{-1}: V \dashrightarrow X$. Применяя теорему Хиронаки, получаем, что найдется композиция $\sigma = \sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1: Y \rightarrow V$ моноидальных преобразований $\sigma_i: Y_i \rightarrow Y_{i-1}$ с неособыми центрами $\tilde{C}_{i-1} \subset Y_{i-1}$, где

$Y_0 = V$ и $Y_m = Y$, такая, что $g = f^{-1} \circ \sigma: Y \rightarrow X$ является бирациональным морфизмом. Получаем разложение

$$\mathcal{H}_Y = \sigma^*(\mathcal{H}_V) \oplus \bigoplus_{i=0}^{m-1} \widetilde{\mathcal{H}}_i$$

в прямую сумму унимодулярных поляризованных структур Ходжа, где $\widetilde{\mathcal{H}}_i$ – это вклад в $\mathcal{H}_Y$ моноидального преобразования σ_{i+1} . Заметим, что естественная проекция $\tilde{\text{rg}}_2: \mathcal{H}_Y \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{m-1} \widetilde{\mathcal{H}}_i$ является морфизмом поляризованных структур Ходжа.

Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ g \swarrow & & \searrow \sigma \\ X & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

следует, что $g^*: \mathcal{H}_X \rightarrow \mathcal{H}_Y$ является вложением поляризованных структур Ходжа таким, что $g^*(f^*(\mathcal{H}_V)) = \sigma^*(\mathcal{H}_V)$ и $g^*(M_V^\perp) \subset (\sigma^*(M_V))^\perp$. Следовательно, мы можем отождествить $\mathcal{H}_X$ с ее образом $g^*(\mathcal{H}_X)$, $f^*(\mathcal{H}_V)$ с $\sigma^*(\mathcal{H}_V)$ и $M_V^\perp$ с $g^*(M_V^\perp)$. При этом отождествлении проекция $\text{rg}^\perp$ отождествляется с ограничением проекции $\tilde{\text{rg}}_2$ на $g^*(\mathcal{H}_X)$. Следовательно, $\text{rg}^\perp$ является морфизмом структур Ходжа как композиция двух морфизмов структур Ходжа: а именно, вложения g^* и проекции $\tilde{\text{rg}}_2$.

Пусть $\dim_{\mathbb{C}} X = 2k$. Веря в справедливость гипотезы Ходжа, назовем элементы модуля $A_X = M_X \cap H^{k,k}$ алгебраическими, а модуль $T_X = \{\gamma \in M_X \mid Q(\gamma, \alpha) = 0 \text{ для всех } \alpha \in A_X\}$ будем называть модулем трансцендентных n -циклов, $n = 2k$, на многообразии X . Легко видеть, что поляризованная структура Ходжа $\mathcal{H}_X$ индуцирует поляризованную структуру Ходжа $\mathcal{T}_X = \{T_X, H_T^{p,q}, Q_T\}$, где $H_T^{p,q} = (T \otimes \mathbb{C}) \cap H_X^{p,q}$ и Q_T – это ограничение формы Q на T_X .

Если S – гладкая проективная поверхность, то форма $Q = Q_S$ является симметричной и унимодулярной и согласно теореме об индексе ее сигнатура равна $(2h^{2,0} + 1, h^{1,1} - 1)$. Отметим, что поляризованная структура Ходжа $\mathcal{T}_S$ на трансцендентных циклах неособой проективной поверхности S является бирациональным инвариантом поверхности S .

ГИПОТЕЗА О НЕРАЗЛОЖИМОСТИ. Поляризованная структура Ходжа $\mathcal{T}_S$ является неразложимой на трансцендентных циклах гладкой проективной поверхности S .

Пусть $V \subset \mathbb{P}^5$ – гладкая четырехмерная кубика. Известно (см. [5], [6]), что пространство модулей четырехмерных кубик содержит несколько семейств рациональных кубик. Тем не менее, хорошо известна следующая гипотеза.

ГИПОТЕЗА О НЕРАЦИОНАЛЬНОСТИ. Общая четырехмерная кубика является нерациональной.

Цель настоящей заметки – показать, что гипотеза о нерациональности следует из гипотезы о неразложимости. Чтобы сформулировать точное утверждение, зафиксируем одну из гладких четырехмерных кубик V_0 и для каждой четырехмерной

кубики V отождествим решетку (M_V, Q_V) с решеткой (M_0, Q) , где $M_0 = H^4(V_0, \mathbb{Z})$ и $Q = Q_{V_0}$. Пусть $\lambda = L^2 \in M_0$, где $L \in H^2(V_0, \mathbb{Z})$ – это класс гиперплоского сечения кубики $V_0 \subset \mathbb{P}^5$. Хорошо известно (см., например, [7]), что каждая гладкая четырехмерная кубика V имеет следующие числа Ходжа: $h^{4,0} = h^{0,4} = 0$, $h^{3,1} = h^{1,3} = 1$ и $h^{2,2} = 21$. Рассмотрим поляризованные структуры Ходжа $\mathcal{H}_V = \{M_V, H^{p,q}, Q_V\}$ на четвертых группах когомологий гладких четырехмерных кубик V . Так как $h^{4,0} = 0$ и $h^{3,1} = 1$, то поляризованная структура Ходжа $\mathcal{H}_V = \{M_0, H_V^{p,q}, Q\}$ определяется ненулевым элементом $\omega \in H_V^{3,1} \subset M_0 \otimes \mathbb{C}$. Согласно билинейным соотношениям Ходжа–Римана имеем $Q(\lambda, \omega) = Q(\omega, \omega) = 0$ и $Q(\omega, \bar{\omega}) < 0$. Следовательно, классифицирующее пространство D поляризованных структур Ходжа гладких четырехмерных кубик совпадает с

$$D = \{\omega \in \mathbb{P}^{22} \mid Q(\omega, \lambda) = Q(\omega, \omega) = 0, Q(\omega, \bar{\omega}) < 0\}.$$

Точка $\omega(V) \in D$, соответствующая поляризованной структуре Ходжа $\mathcal{H}_V = \{M_0, H^{p,q}(V), Q\}$ гладкой четырехмерной кубики V , называется *периодами* кубики V . Согласно работе [8] и глобальной теореме Торелли, доказанной в [9], множество D_0 периодов гладких четырехмерных кубик является открытым подмножеством в D .

Пусть $P = \{\mu \in M_0 \mid Q(\lambda, \mu) = 0\}$ – это подмодуль модуля M_0 , состоящий из примитивных элементов. Для каждого эндоморфизма $A \in \text{End}(M_0)$ такого, что $A(P) \subset P$ и ограничение $A|_P$ эндоморфизма A на P не пропорционально тождественному автоморфизму модуля P , обозначим

$$E_A = \{\omega \in D \subset \mathbb{P}^{22} \mid \omega - \text{собственный вектор эндоморфизма } A\}.$$

Очевидно, что E_A является пересечением пространства D и конечного числа линейных подпространств в $\mathbb{P}^{22}$ коразмерности не менее 2. Следовательно, E_A является собственным замкнутым аналитическим подмногообразием в D . Положим $E = \bigcup E_A$. Тогда E является объединением счетного числа собственных замкнутых подмногообразий в D . Следовательно, множество $D \setminus E$ всюду плотно в D .

Для каждого $\mu \in M_0$, μ не пропорционален элементу λ , положим

$$B_\mu = \{\omega \in D \subset \mathbb{P}^{22} \mid Q(\mu, \omega) = 0\}$$

и $B = \bigcup B_\mu$. Аналогично сказанному выше B является объединением счетного числа собственных замкнутых подмногообразий в D . Следовательно, множество $D_0 \setminus (E \cup B)$ также является всюду плотным в D_0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если верна гипотеза о неразложимости, то гладкая четырехмерная кубика V является нерациональным многообразием, если ее периоды $\omega(V) \in D_0 \setminus (E \cup B)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что гладкая четырехмерная кубика V является рациональным многообразием и ее периоды $\omega(V) \in D_0 \setminus (E \cup B)$.

Заметим, что подрешетка T_V трансцендентных элементов решетки M_V совпадает с подрешеткой P примитивных элементов, если периоды $\omega(V) \in D_0 \setminus B$.

Так как многообразие V является рациональным, существует бирациональное отображение $r: \mathbb{P}^4 \dashrightarrow V$. Согласно теореме Хиронаки найдется композиция $\tau = \tau_n \circ \dots \circ \tau_1: X \rightarrow \mathbb{P}^4$ моноидальных преобразований $\tau_i: X_i \rightarrow X_{i-1}$ с неособыми центрами $C_{i-1} \subset X_{i-1}$, где $X_0 = \mathbb{P}^4$ и $X_n = X$, такая, что $f = r \circ \tau: X \rightarrow V$ является бирациональным морфизмом.

Каждое τ_i индуцирует вложение унимодулярных поляризованных структур Ходжа $\tau_i^*: \mathcal{H}_{X_{i-1}} \hookrightarrow \mathcal{H}_{X_i}$ такое, что $\mathcal{H}_{X_i} \simeq \tau_i^*(\mathcal{H}_{X_{i-1}}) \oplus (\tau_i^*(\mathcal{H}_{X_{i-1}}))^\perp$. В частности,

$$H^4(X_i, \mathbb{Z}) = \tau_i^*(H^4(X_{i-1}, \mathbb{Z})) \oplus (\tau_i^*(H^4(X_{i-1}, \mathbb{Z})))^\perp.$$

Более того, если $\dim C_{i-1} \leq 1$, то $(\tau_i^*(H^4(X_{i-1}, \mathbb{Z})))^\perp \subset H_{X_i}^{2,2}$, и если C_{i-1} является гладкой поверхностью, то $(\tau_i^*(\mathcal{H}_{X_{i-1}}))^\perp \simeq -\mathcal{H}_{C_{i-1}}(-1)$, где

$$-\mathcal{H}_{C_{i-1}}(-1) = (M_{C_{i-1}}, H_{i-1}^{p,q}, -Q_{C_{i-1}})$$

и $H_{i-1}^{p,q} = H_{C_{i-1}}^{p-1,q-1}$. Следовательно, $H_{X_i}^{3,1} = \tau_i^*(H_{X_{i-1}}^{3,1}) \oplus H_{i-1}^{3,1}$, $H_{X_i}^{4,0} = 0$ и $Q_{X_i}(u, v) = 0$ для $u \in \tau_i^*(H_{X_{i-1}}^{3,1} \oplus H_{X_{i-1}}^{1,3})$, $v \in H_{i-1}^{3,1} \oplus H_{i-1}^{1,3}$.

Итак, имеем разложение унимодулярной поляризованной структуры Ходжа

$$\mathcal{H}_X = \tau^*(\mathcal{H}_{\mathbb{P}^4}) \oplus \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{H}_i$$

в прямую сумму унимодулярных поляризованных структур Ходжа, где $\mathcal{H}_i$ – вклад в $\mathcal{H}_X$ моноидального преобразования τ_{i+1} . По индукции имеем $\mathcal{H}_i \simeq (\tau_i^*(\mathcal{H}_{X_{i-1}}))^\perp$ и, следовательно,

$$\mathcal{T}_X \simeq - \oplus \mathcal{T}_{C_i}(-1),$$

где сумма взята по всем поверхностям C_i геометрического рода $p_g \geq 1$, так как $H^4(\mathbb{P}^4, \mathbb{C}) = H_{\mathbb{P}^4}^{2,2}$, $h^{2,2}(\mathbb{P}^4) = 1$, и $H^2(C_i, \mathbb{C}) = H_{C_i}^{1,1}$, если геометрический род p_g поверхности C_i равен нулю.

Морфизм f индуцирует морфизм структур Ходжа $f^*: \mathcal{H}_V \rightarrow \mathcal{H}_X$ и согласно лемме 1 структура Ходжа $\mathcal{H}_X$ раскладывается в прямую сумму $f^*(\mathcal{H}_V) \oplus \mathcal{H}_V^\perp$ поляризованных структур Ходжа.

ЛЕММА 2. Пусть V – четырехмерная гладкая кубика такая, как и в предложении 1, и пусть $\tau = \tau_n \circ \dots \circ \tau_1: X \rightarrow \mathbb{P}^4$ и $f = r \circ \tau: X \rightarrow V$ – описанные выше морфизмы. Тогда найдется такое i_0 , что поляризованная структура Ходжа $\mathcal{T}_{C_{i_0}}$ на трансцендентных циклах поверхности C_{i_0} раскладывается в прямую сумму поляризованной структуры Ходжа $\mathcal{T}'_{C_{i_0}} \simeq -f^*(\mathcal{T}_V)(1)$ и некоторой структуры Ходжа $\mathcal{T}''_{C_{i_0}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем два разложения

$$\mathcal{H}_X = f^*(\mathcal{H}_V) \oplus \mathcal{H}_V^\perp = \tau^*(\mathcal{H}_{\mathbb{P}^4}) \oplus \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{H}_i$$

поляризованной структуры Ходжа $\mathcal{H}_X$. Рассмотрим ненулевой элемент $\omega \in f^*(H_V^{3,1})$. Он может быть представлен в виде

$$\omega = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i,$$

где $\omega_i \in H_i^{3,1}$. Пусть i_0 – это такой индекс, что $\omega_{i_0} \neq 0$. Положим $\omega_{i_0}^\perp = \sum_{i \neq i_0} \omega_i$ и пусть $\text{pr}_{i_0}: \mathcal{H}_X \rightarrow \mathcal{H}_{i_0}$, $\text{pr}_{i_0}^\perp: \mathcal{H}_X \rightarrow \bigoplus_{i \neq i_0} \mathcal{H}_i$, $\text{pr}: \mathcal{H}_X \rightarrow f^*(\mathcal{H}_V)$, $\text{pr}^\perp: \mathcal{H}_X \rightarrow \mathcal{H}_V^\perp$ –

естественные проекции. Отметим, что все эти проекции определены над $\mathbb{Z}$. Имеем $\text{pr}(\text{pr}_{i_0}(\omega)) = a\omega$ для некоторого $a \in \mathbb{C}$, так как $\dim f^*(H_V^{3,1}) = 1$ и $\text{pr}, \text{pr}_{i_0}$ являются морфизмами структур Ходжа.

Покажем, что $a = 1$. Ограничение композиции $\text{pr} \circ \text{pr}_{i_0}$ на $f^*(M_V) \simeq M_V$ индуцирует эндоморфизм модуля M_V такой, что

$$\text{pr} \circ \text{pr}_{i_0}(f^*(P)) \subset f^*(P),$$

так как $\text{pr} \circ \text{pr}_{i_0}$ является морфизмом структур Ходжа, $M_V \cap H_V^{2,2} = \mathbb{Z}\lambda$ и по предположению $P = T_V$. Поэтому $(\text{pr} \circ \text{pr}_{i_0})|_{f^*(P)} = a \cdot \text{Id}$, так как $\text{pr}(\text{pr}_{i_0}(\omega)) = a\omega$ (т.е. ω является собственным вектором эндоморфизма $(\text{pr} \circ \text{pr}_{i_0})|_{f^*(M_V)}$ и a — его собственное значение, а по предположению $\omega(V) \in D_0 \setminus (E \cup B)$). Следовательно, $a \in \mathbb{Z}$, так как $(\text{pr} \circ \text{pr}_{i_0})|_{f^*(P)}$ является эндоморфизмом $\mathbb{Z}$ -модуля $f^*(P) \simeq P$. Пусть $\omega^\perp = \text{pr}^\perp(\omega_{i_0}) \in H_X^{3,1}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\omega_{i_0} &= a\omega + \omega^\perp, \\ \omega_{i_0}^\perp &= (1-a)\omega - \omega^\perp.\end{aligned}$$

Согласно билинейным соотношениям Ходжа–Римана $Q_X(\gamma, \bar{\gamma}) \leq 0$ для $\gamma \in H_X^{3,1}$ и $Q_X(\gamma, \bar{\gamma}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\gamma = 0$. Следовательно, не ограничивая общности, мы можем предполагать, что $Q_X(\omega, \bar{\omega}) = -1$ и $Q_X(\omega^\perp, \bar{\omega}^\perp) = b \leq 0$. Имеем $Q_X(\omega_{i_0}, \bar{\omega}_{i_0}) = -a^2 + b$ и, следовательно, a и b не могут одновременно равняться нулю, так как $\omega_{i_0} \neq 0$. Кроме того, имеем

$$Q_X(\omega, \omega^\perp) = Q_X(\omega, \bar{\omega}^\perp) = Q_X(\bar{\omega}, \omega^\perp) = Q_X(\bar{\omega}, \bar{\omega}^\perp) = Q_X(\omega_{i_0}, \bar{\omega}_{i_0}^\perp) = 0.$$

Следовательно,

$$Q_X(\omega_{i_0}, \bar{\omega}_{i_0}^\perp) = Q_X(a\omega + \omega^\perp, (1-a)\bar{\omega} - \bar{\omega}^\perp) = a(1-a)(-1) - b = 0,$$

т.е. $a^2 - a - b = 0$, и поэтому

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}.$$

Но $a \in \mathbb{Z}$ и $b \leq 0$; следовательно, $b = 0$, $a = 1$ и поэтому $\omega^\perp = 0$, так как $Q_X(\omega^\perp, \bar{\omega}^\perp) = b = 0$. Следовательно, $\omega \in H_{i_0}^{3,1}$. Кроме того, нами показано, что $(\text{pr} \circ \text{pr}_{i_0})|_{f^*(P)} = \text{Id}$.

Покажем, что $f^*(T_V) \subset T_{i_0}$. Как и выше, имеем два разложения

$$\mathcal{T}_X = f^*(\mathcal{T}_V) \oplus f^*(\mathcal{T}_V)^\perp = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{T}_i$$

поляризованной структуры Ходжа $\mathcal{T}_X$. Каждый элемент $\gamma \in f^*(T_V)$ может быть представлен в виде $\gamma = \gamma_{i_0} + \gamma_{i_0}^\perp$, где $\gamma_{i_0} = \text{pr}_{i_0}(\gamma) \in T_{i_0}$ и $\gamma_{i_0}^\perp = \text{pr}_{i_0}^\perp(\gamma) \in \bigoplus_{i \neq i_0} T_i$. Тогда, так как $(\text{pr} \circ \text{pr}_{i_0})|_{f^*(P)} = \text{Id}$ и $P = T_V$, имеем

$$\begin{aligned}\gamma_{i_0} &= \gamma + \gamma^\perp, \\ \gamma_{i_0}^\perp &= -\gamma^\perp,\end{aligned}$$

где $\gamma^\perp = \text{pr}^\perp(\gamma_{i_0}) \in f^*(T_V)^\perp$. Обозначим через $p_{(3,1)}: M_X \otimes C \rightarrow H_X^{3,1}$ естественную проекцию. Тогда согласно определению трансцендентных циклов имеем $p_{(3,1)}(\gamma) \neq 0$ для каждого не равного нулю элемента $\gamma \in T_X$, так как число Ходжа $h^{4,0}(X) = 0$. В частности, $p_{(3,1)}(\gamma) = a_\gamma \omega$ при некотором $a_\gamma \in \mathbb{C}$, $a_\gamma \neq 0$, так как $f^*(H_V^{3,1}) = \mathbb{C}\omega$. Следовательно, $p_{(3,1)}(\gamma_{i_0}) = a_\gamma \omega$, так как $\omega \in f^*(H_V^{3,1}) \subset H_{i_0}^{3,1}$, и поэтому $p_{(3,1)}(\gamma_{i_0}^\perp) = 0$. Отсюда получаем, что $\gamma_{i_0}^\perp = 0$, т.е. $f^*(T_V) \subset T_{i_0}$.

В качестве следствия получаем, что

$$\mathcal{T}_{i_0} = f^*(\mathcal{T}_V) \oplus \mathcal{T}_{i_0}'' \quad (1)$$

является прямой суммой двух поляризованных структур Ходжа, где $\mathcal{T}_{i_0}''$ – некоторая подструктура поляризованной структуры Ходжа $f^*(\mathcal{T}_V)^\perp$. Для завершения доказательства леммы 2 осталось напомнить, что $\mathcal{T}_{i_0} \simeq -\mathcal{T}_{C_{i_0}}(-1)$, где $\mathcal{T}_{C_{i_0}}$ – поляризованная структура Ходжа на трансцендентных 2-циклах гладкой проективной поверхности C_{i_0} .

ЛЕММА 3. *Не существует гладкой проективной поверхности S такой, что $\mathcal{T}_V \simeq -\mathcal{T}_S(-1)$, где V – гладкая четырехмерная кубика, периоды которой $\omega(V) \in D_0 \setminus B$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{T}_V \simeq -\mathcal{T}_S(-1)$ для некоторой поверхности S , то ее геометрический род $p_g = h^{2,0}(S) = h^{3,1}(V) = 1$ и $\text{rk } T_S = \text{rk } T_V = 22$. Так как $p_g = 1$, то поверхность S не является линейчатой поверхностью. Заметим, что решетка T_S является бирациональным инвариантом. Поэтому можем предполагать, что S является минимальной моделью и ее второе число Бетти $b_2(S) = h^{1,1}(S) + 2h^{2,0}(S) \geq 23$, так как $\text{rk } T_S = \text{rk } T_V = 22$ и поверхность S должна иметь также алгебраические 2-циклы. Следовательно, число Ходжа $h^{1,1}(S)$ должно быть больше 20, так как $h^{2,0}(S) = 1$.

С другой стороны, из классификации алгебраических поверхностей следует, что $K_S^2 \geq 0$, где K_S – канонический класс поверхности S . Обозначим через $\chi(S) = 1 - h^{1,0}(S) + h^{2,0}(S)$ алгебраическую эйлерову характеристику поверхности S и через $e(S) = 2 + h_S^{1,1} + 2h^{2,0}(S) - 4h^{1,0}(S)$ ее топологическую эйлерову характеристику. Заметим, что $h^{1,0}(S) = \dim H^0(S, \Omega_S^1) \geq 0$. Согласно формуле Нетера имеем $\chi(S) = (K_S^2 + e(S))/12$ и поэтому

$$h^{1,1}(S) = 10 + 10h^{2,0}(S) - 8h^{1,0}(S) - K_S^2 = 20 - 8h^{1,0}(S) - K_S^2,$$

так как $h^{2,0}(S) = 1$. Следовательно, $h^{1,1}(S) \leq 20$.

Из леммы 3 следует, что в разложении (1) слагаемое $\mathcal{T}_{i_0}''$ является нетривиальным, что противоречит гипотезе о неразложимости.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Aepli, “Modifikation von reellen und komplexen Mannigfaltigkeiten”, *Comment. Math. Helv.*, **31**:1 (1957), 219–301.
- [2] P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus, K. Shih, *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, Lecture Notes in Math., **900**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1982.
- [3] N. Katz, “Étude cohomologique des pincesaux de Lefschetz”, *Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique*, Lecture Notes in Math., **340**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973, 254–327.

- [4] С. Н. Clemens, P. Griffiths, “The intermediate Jacobian of cubic threefold”, *Ann. of Math. (2)*, **95**:2 (1972), 281–356.
- [5] С. Л. Трегуб, “Три конструкции рациональности четырехмерной кубики”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1984, № 3, 8–14.
- [6] С. Л. Трегуб, “Два замечания о четырехмерной кубике”, *УМН*, **48**:2 (1993), 201–202.
- [7] Вик. С. Куликов, П. Ф. Курчанов, “Комплексные алгебраические многообразия: периоды интегралов, структуры Ходжа”, *Итоги науки техники. Современ. проблемы матем. фундам. напр.*, **39**, ВИНТИ, М., 1989, 5–233.
- [8] P. Griffiths, “On periods of certain rational integrals. I”, *Ann. of Math. (2)*, **90**:3 (1969), 460–495; “On periods of certain rational integrals. II”, *Ann. of Math. (2)*, **90**:3 (1969), 496–541.
- [9] С. Voisin, “Théorème de Torelli pour les cubiques de $\mathbb{P}^5$ ”, *Invent. Math.*, **86**:3 (1986), 577–601.

Вик. С. Куликов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kulikov@mi.ras.ru

Поступило

31.10.2006