Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Д. Кармона, К. Ю. Федоровский, О зависимости условий равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами от порядка полианалитичности, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 1, 32–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3768>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:33:40

О зависимости условий равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами от порядка полианалитичности

Дж. Дж. Кармона, К. Ю. Федоровский

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ строится пример компактного множества $X \subset \mathbb{C}$ (зависящего от n) такого, что система всех полианалитических многочленов порядка n не плотна в пространстве $C(X)$, а система полианалитических многочленов порядка $2n$ уже плотна в $C(X)$.

Библиография: 6 названий.

1. Введение и формулировка результата. Пусть U – открытое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Напомним, что функция f называется *полианалитической порядка n* (или, короче, *n -аналитической*) в U если она имеет вид

$$f(z) = \bar{z}^{n-1} f_{n-1}(z) + \dots + \bar{z} f_1(z) + f_0(z),$$

где $n \in \mathbb{N}$, а функции $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ (комплексного переменного z) голоморфны в U . Функции $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ называются *голоморфными компонентами* полианалитической функции f . Под *n -аналитическим многочленом* мы будем понимать n -аналитическую функцию f , все голоморфные компоненты которой являются многочленами (переменного z). Обозначим через $\mathcal{O}_n(U)$ совокупность всех n -аналитических на открытом множестве U функций, а через $\mathcal{P}_n$ – множество всех n -аналитических многочленов. Положим $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1$.

Пусть X – компакт в $\mathbb{C}$. Обозначим через $C(X)$ пространство всех непрерывных на X комплекснозначных функций с равномерной нормой $\|f\|_X = \max\{|f(z)| : z \in X\}$, через $A_n(X)$ – пространство $C(X) \cap \mathcal{O}_n(X^\circ)$, где X° – внутренность X , а через $P_n(X)$ – замыкание в $C(X)$ подпространства $\{p|_X : p \in \mathcal{P}_n\}$. Таким образом, $P_n(X)$ – это в точности пространство функций, равномерно на X с любой точностью приближаемых n -аналитическими многочленами. Нетрудно показать, что при $1 \leq m \leq n$ и любом X имеют место включения $P_m(X) \subset P_n(X) \subset A_n(X)$. Заметим также, что если $P_n(X) = C(X)$ для некоторого $n \geq 1$, то $X^\circ = \emptyset$.

Работа первого автора выполнена при поддержке фонда Министерства Науки и Технологии Испании (грант № MTM 2005-08984-C02-01) и фонда Генералитета Каталонии (грант № 2005 SGR 00611). Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00503), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-9429.2006.01) и фонда INTAS (грант № YSF 2001/2-16 Renewal).

Рассмотрим следующую аппроксимационную задачу: пусть $n \geq 2$ – фиксированное натуральное число и пусть $X \subset \mathbb{C}$ – компакт; каковы необходимые и достаточные условия на X , при которых $P_n(X) = A_n(X)$?

В работе [1] эта задача была решена для компактов Каратеодори. Соответствующий критерий приближаемости (см. [1; теорема 2.2]) формулируется в терминах специальной аналитической характеристики рассматриваемого компакта (понятие неванлинновской области, введенное в работах [1], [2], см. также [3]) и не зависит от порядка полианалитичности n . В работах [1], [4], [5] получен ряд достаточных условий приближаемости для компактов, не являющихся компактами Каратеодори. Эти условия также формулируются в терминах аналитических (различные вариации понятия неванлинновской области) и геометрических свойств компакта X и не зависят от n . Пример 4.5 работы [1] показывает, что существует компакт Y такой, что $P_2(Y) \neq C(Y)$, но $P_3(Y) = C(Y)$. Вопрос о существовании подобных примеров для больших порядков полианалитичности рассматривается в настоящей работе. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Для каждого $n \geq 1$ существует компакт $X \subset \mathbb{C}$ такой, что $P_{2n}(X) = C(X) \neq P_n(X)$.

Таким образом, окончательное решение сформулированной выше аппроксимационной задачи (которое до сих пор не найдено) должно зависеть от порядка полианалитичности. Отметим, что полной ясности в вопросе о характере этой зависимости пока нет.

2. Предварительные сведения. Под контуром всюду в дальнейшем будет пониматься замкнутая кривая Жордана. Контур $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется аналитическим, если он является образом единичной окружности при отображении, конформном в некоторой окрестности этой окружности. Напомним, что для любого аналитического контура Γ существует функция Шварца (см. [6]), т.е. такая голоморфная и однолистная в некоторой области $U \supset \Gamma$ функция S , что $\Gamma = \{z \in U : \bar{z} = S(z)\}$.

Пусть a и b – два вещественных числа, $0 < b < a$, и пусть $\Gamma_{a,b}$ обозначает эллипс

$$\Gamma_{a,b} := \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

с полуосями a и b . Заметим, что фокусы эллипса $\Gamma_{a,b}$ – это точки $\pm c$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Определим функции

$$\begin{aligned} S_{a,b}(z) &= \alpha z - \beta \sqrt{z^2 - c^2}, \\ S_{a,b}^*(z) &= \alpha z + \beta \sqrt{z^2 - c^2}, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\alpha = \frac{(a^2 + b^2)}{c^2}, \quad \beta = \frac{2ab}{c^2},$$

причем в формулах (1) рассматривается голоморфная ветвь многозначной функции $\sqrt{z^2 - c^2}$, определенная вне отрезка $[-c, c]$ и удовлетворяющая условию $\sqrt{a^2 - c^2} = b$.

Заметим также, что величины α , β , a и b и функции $S_{a,b}(\cdot)$ и $S_{a,b}^*(\cdot)$ связаны соотношениями

$$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2}{c^4} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{c^4} = 1, \quad (2)$$

$$(\bar{z} - S_{a,b}(z))(\bar{z} - S_{a,b}^*(z)) = \frac{4a^2b^2}{c^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right). \quad (3)$$

Непосредственно проверяется, что функция $S_{a,b}$, определенная на множестве $U = \mathbb{C} \setminus [-c, c]$, является функцией Шварца эллипса $\Gamma_{a,b}$. Кроме того, из соотношений (1) и (3) следует, что $\bar{z} - S_{a,b}(z) \neq 0$ для любого $z \in \mathbb{C} \setminus (\Gamma_{a,b} \cup [-c, c])$ и $\bar{z} - S_{a,b}^*(z) \neq 0$ для любого $z \in \mathbb{C} \setminus [-c, c]$.

Зафиксируем произвольное целое число $n \geq 1$ и выберем n попарно непересекающихся эллипсов $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ с фокусами в точках ± 1 . В качестве компакта X , существование которого утверждается в теореме 1, возьмем множество

$$X = X(n) := \bigcup_{k=1}^n \Gamma_k. \quad (4)$$

Совместно с компактом $X(n)$ рассмотрим функцию

$$F_n(w, z) := \prod_{k=1}^n (\bar{w} - S_k(z)), \quad (5)$$

где при каждом $k = 1, \dots, n$ функция S_k является функцией Шварца эллипса Γ_k . Заметим, что при $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$

$$\text{равенство } F_n(z, z) = 0 \text{ выполняется если и только если } z \in X(n). \quad (6)$$

3. Доказательство теоремы 1. Для многочлена $T(w, z)$ от двух комплексных переменных w и z обозначим через $\deg_w T(w, z)$ его степень по переменному w . Нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, как и ранее, – попарно непересекающиеся эллипсы с фокусами в точках ± 1 , и пусть функция F_n определена соотношением (5). Тогда существуют два многочлена $P_n(w, z)$ и $Q_n(w, z)$ от двух комплексных переменных w и z такие, что

- (i) $F_n(w, z) = P_n(\bar{w}, z) + Q_n(\bar{w}, z)\sqrt{z^2 - 1}$;
- (ii) $\deg_w [P_n(w, z) - w^n] < n$ и $\deg_w [Q_n(w, z) - (\beta_1 + \dots + \beta_n)w^{n-1}] < n - 1$;
- (iii) $P_n(\bar{z}, z) \neq 0$ и $Q_n(\bar{z}, z) \neq 0$ при всех $z \in X(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (1) при каждом $k = 1, \dots, n$ функция Шварца эллипса Γ_k имеет вид $S_k(z) = \alpha_k z - \beta_k \sqrt{z^2 - 1}$. Для доказательства леммы воспользуемся индукцией по числу эллипсов. При $n = 1$ положим $P_1(w, z) := w - \alpha_1 z$ и $Q_1(w, z) := \beta_1$ и заметим, что все утверждения леммы выполнены.

Пусть теперь $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$ – произвольное множество, состоящее из n попарно непересекающихся эллипсов (с фокусами в точках ± 1), и пусть $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}\}$ – его произвольно выбранное подмножество, состоящее из $n - 1$ эллипса. Пусть P_{n-1} и Q_{n-1} – соответствующие многочлены, удовлетворяющие условиям (i), (ii) и (iii) леммы, существующие согласно предположению индукции для множества эллипсов $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}\}$.

Используя (5) получаем

$$F_n(w, z) = (P_{n-1}(\bar{w}, z) + Q_{n-1}(\bar{w}, z)\sqrt{z^2 - 1})(\bar{w} - \alpha_n z + \beta_n \sqrt{z^2 - 1}).$$

Таким образом, если положить

$$\begin{aligned} P_n(w, z) &:= (w - \alpha_n z)P_{n-1}(w, z) + \beta_n(z^2 - 1)Q_{n-1}(w, z), \\ Q_n(w, z) &:= (w - \alpha_n z)Q_{n-1}(w, z) + \beta_n P_{n-1}(w, z), \end{aligned} \quad (7)$$

то утверждения (i) и (ii) леммы будут выполнены для F_n , P_n и Q_n .

Проверим справедливость утверждения (iii). Согласно (5), (6) и (i) нам достаточно установить, что $Q_n(\bar{z}, z) \neq 0$ для любого $z \in X(n)$. Допустим, что это не так и предположим, что найдется точка $z_0 \in X(n)$ такая, что $Q_n(\bar{z}_0, z_0) = 0$. Следовательно, согласно (6) и (i) мы также получаем, что $P_n(\bar{z}_0, z_0) = 0$. Так как $n \geq 2$, можно выбрать такое k , что $1 \leq k \leq n$ и $z_0 \notin \Gamma_k$. Для множества $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\} \setminus \{\Gamma_k\}$ (состоящего из $n - 1$ эллипса) согласно предположению индукции существуют соответствующие многочлены $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$, удовлетворяющие всем условиям леммы. Из (7) вытекает, что

$$\begin{aligned} 0 &= (\bar{z}_0 - \alpha_k z_0)\tilde{P}(\bar{z}_0, z_0) + \beta_k(z_0^2 - 1)\tilde{Q}(\bar{z}_0, z_0), \\ 0 &= \beta_k\tilde{P}(\bar{z}_0, z_0) + (\bar{z}_0 - \alpha_k z_0)\tilde{Q}(\bar{z}_0, z_0). \end{aligned} \quad (8)$$

Рассматривая соотношения (8) как систему линейных (однородных) уравнений относительно переменных $\tilde{P}(\bar{z}_0, z_0)$ и $\tilde{Q}(\bar{z}_0, z_0)$, замечаем, что ее определитель равен $\Delta := (\bar{z}_0 - S_k(z_0))(\bar{z}_0 - S_k^*(z_0))$. Так как S_k — функция Шварца эллипса Γ_k , то $\bar{z}_0 - S_k^*(z_0) \neq 0$, а так как $z_0 \notin \Gamma_k$, то и $\bar{z}_0 - S_k(z_0) \neq 0$. Следовательно, $\Delta \neq 0$. Но это противоречит тому, что в силу предположения индукции $\tilde{P}(\bar{z}_0, z_0) \neq 0$ и $\tilde{Q}(\bar{z}_0, z_0) \neq 0$.

Всюду в дальнейшем под *мерой* понимается конечная комплекснозначная борелевская мера в $\mathbb{C}$. Через $\text{Spt}(\mu)$ обозначается носитель меры μ . Если μ — мера, а E — борелевское множество, то $\mu|_E$ есть сужение меры μ на множество E , т.е. $\mu|_E(E_1) = \mu(E \cap E_1)$.

Скажем, что мера μ на компакте X *ортогональна* к подмножеству V пространства $C(X)$, если $\int_X f d\mu = 0$ для всякой функции $f \in V$ и обозначим это через $\mu \perp V$.

Пусть $X = X(n)$ определено согласно (4) выше. Для доказательства теоремы 1 установим, что $P_{2n}(X) = C(X) \neq P_n(X)$.

Шаг 1. $P_{2n}(X) = C(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $P_{2n}(X) \neq C(X)$. В этом случае найдется мера μ на X такая, что $\mu \neq 0$ и $\mu \perp P_{2n}(X)$.

Так как $\mu \neq 0$, найдется число $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ такое, что $\mu|_{\Gamma_k} \neq 0$. С помощью леммы 1 построим многочлены P_n и Q_n для множества эллипсов $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$ и многочлены $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ для множества эллипсов $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\} \setminus \{\Gamma_k\}$ соответственно. В силу утверждения (i) леммы 1 для всех $z \in X$ имеет место равенство

$$\sqrt{z^2 - 1} = -\frac{P_n(\bar{z}, z)}{Q_n(\bar{z}, z)} \quad (9)$$

(напомним, что $Q_n(\bar{z}, z) \neq 0$ при $z \in X$ в силу утверждения (iii) леммы 1). Исполни-

зую (9), определим меру

$$\sigma = (\tilde{P}(\bar{z}, z) + \tilde{Q}(\bar{z}, z)\sqrt{z^2 - 1})Q_n(\bar{z}, z)\mu = (\tilde{P}Q_n - \tilde{Q}P_n)\mu.$$

Из свойства (6), утверждения (i) леммы 1 для многочленов $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ и свойства (iii) леммы 1 для многочлена Q_n вытекает, что $\text{Spt}(\sigma) \subset \Gamma_k$ и $\sigma \neq 0$. Используя утверждение (ii) леммы 1 заключаем, что $\deg_{\bar{z}}(\tilde{P}Q_n - \tilde{Q}P_n) \leq 2n - 2$. Так как $\mu \perp P_{2n}(X)$, то $\sigma \perp P_2(\Gamma_k)$.

Итак, σ – мера на Γ_k со свойствами $\sigma \neq 0$ и $\sigma \perp \mathcal{P}_2$. Следовательно, $P_2(\Gamma_k) \neq C(\Gamma_k)$, но этот факт противоречит утверждениям теоремы 1 и примера 3 работы [2]. Из полученного противоречия вытекает, что $\mu \equiv 0$ и, следовательно, $P_{2n}(X) = C(X)$.

Шаг 2. $P_n(X) \neq C(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наша цель состоит в том, чтобы найти такой вектор $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, что мера $\sigma := \sum_{j=1}^n c_j dz|_{\Gamma_j}$ будет ортогональна к $\mathcal{P}_n$, т.е. $\int g(z) d\sigma(z) = 0$ для любого многочлена $g \in \mathcal{P}_n$. Отсюда вытекает, что искомым вектор $\mathbf{c}$ должен удовлетворять равенствам

$$\sum_{j=1}^n c_j \int_{\Gamma_j} \bar{z}^m p(z) dz = 0 \quad (10)$$

для любых многочлена $p \in \mathcal{P}$ и числа $m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Заметим, что в силу теоремы Коши равенство (10) при $m = 0$ выполняется при любом $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$.

Пусть $p \in \mathcal{P}$ и $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n-1$. Используя (1) для каждого из Γ_j , свойство (10) и теорему Коши, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_X \bar{z}^m p(z) d\sigma(z) &= \sum_{j=1}^n c_j \int_{\Gamma_j} (\alpha_j z - \beta_j \sqrt{z^2 - 1})^m p(z) dz \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \sum_{k=0}^m \alpha_j^k \beta_j^{m-k} (-1)^{m-k} C_m^k \int_{\Gamma_j} p(z) z^k (z^2 - 1)^{(m-k)/2} dz \\ &= \sum_{k=0}^m R(p; m, k) \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j^k \beta_j^{m-k}, \end{aligned}$$

где

$$R(p; m, k) := (-1)^{m-k} C_m^k \int_{\Gamma_1} p(z) z^k (z^2 - 1)^{(m-k)/2} dz,$$

а C_m^k – биномиальные коэффициенты.

Заметим, что если число $(m-k)$ четно, то $R(p; m, k) = 0$. Следовательно, в качестве вектора $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, определяющего меру σ , достаточно взять ненулевое решение $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ следующей системы линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^n c_j \alpha_j^k \beta_j^{m-k} = 0, \quad m, k \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq m \leq n-1, \quad 0 \leq k \leq m, \quad m-k \equiv 1 \pmod{2}. \quad (11)$$

Система (11) может быть представлена как объединение двух систем линейных уравнений: системы

$$\sum_{j=1}^n c_j \alpha_j^r \beta_j = 0, \quad r \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq r \leq n-2, \quad (12)$$

и системы

$$\sum_{j=1}^n c_j \alpha_j^{m-2k-1} \beta_j^{2k+1} = 0, \quad m, k \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq m \leq n-1, \quad 1 \leq k \leq \frac{m-1}{2}. \quad (13)$$

Рассмотрим систему (12). Заметим, что матрица $(\alpha_j^r)_{j,r}$, где $1 \leq j \leq n$ и $0 \leq r \leq n-2$, содержит матрицу Вандермонда размера $(n-1) \times (n-1)$ и, следовательно, ее ранг равен $n-1$ (напомним, что $\alpha_j \neq \alpha_k$ при $j \neq k$ так как все эллипсы $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ попарно различны). Следовательно, система (12) (рассматриваемая относительно переменных $c_j \beta_j$) имеет бесконечно много решений $(c_1 \beta_1, c_2 \beta_2, \dots, c_n \beta_n) \neq 0$. Докажем, что каждый вектор $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, для которого $(c_1 \beta_1, c_2 \beta_2, \dots, c_n \beta_n)$ является решением системы (12), удовлетворяет системе (13). Пусть

$$E(m, k) := \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j^{m-2k-1} \beta_j^{2k+1} = 0, \quad m, k \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq m \leq n-1, \quad 0 \leq k \leq \frac{m-1}{2}.$$

Мы утверждаем, что каждая величина $E(m, k)$ при $k \geq 1$ является линейной комбинацией величин $E(r, 0)$ при $0 \leq r \leq n-2$. В самом деле, используя (2), имеем

$$\begin{aligned} E(m, k+1) &= \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j^{m-2k-3} \beta_j^{2k+3} = \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j^{m-2k-3} \beta_j^2 \beta_j^{2k+1} \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j^{m-2k-3} (\alpha_j^2 - 1) \beta_j^{2k+1} = E(m, k) - E(m-2, k) \end{aligned} \quad (14)$$

при $1 \leq m \leq n-1$, $0 \leq k \leq (m-3)/2$. Индукцией по k , применяя рекуррентное соотношение (14), получаем

$$E(m, k) = \sum_{s=0}^k (-1)^s C_k^s E(m-2s, 0).$$

То есть сделанное утверждение верно, а вместе с ним верно и требуемое свойство нетривиальных решений систем (12) и (13).

Итак, мы построили ненулевое решение $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ систем (12) и (13) которое, в свою очередь, определяет ненулевую меру σ на X , ортогональную всем n -аналитическим многочленам. Следовательно, $P_n(X) \neq C(X)$ и утверждение шага 2 верно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Х. Х. Кармона, П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, “О равномерной аппроксимации функций полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций”, *Матем. сб.*, **193**:10 (2002), 75–98.

- [2] К. Ю. Федоровский, “О равномерных приближениях функций n -аналитическими полиномами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$ ”, *Матем. заметки*, **59**:4 (1996), 604–610.
- [3] К. Ю. Федоровский, “О некоторых свойствах и примерах неванлинновских областей”, *Комплексный анализ и приложения: Сборник статей*, Тр. МИАН, **253**, 2006, 204–213.
- [4] А. Буаве, П. М. Готье, П. В. Парамонов, “О равномерной аппроксимации n -аналитическими функциями на замкнутых множествах в $\mathbb{C}$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:3 (2004), 15–28.
- [5] J. J. Carmona, K. Yu. Fedorovskiy, “Conformal maps and uniform approximation by polyanalytic functions”, *Selected Topics in Complex Analysis*, Oper. Theory Adv. Appl., **158**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005, 109–130.
- [6] P. Davis, *The Schwarz function and its applications*, Carus Math. Monogr., **17**, Math. Assoc. America, Washington, DC, 1974.

Дж. Дж. Кармона

Автономный университет Барселоны, Испания

E-mail: jcar@mat.uab.es

Поступило

26.02.2007

К. Ю. Федоровский

Государственный университет управления

E-mail: const@imis.ru