Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Лакаев, Ж. И. Абдуллаев, Спектр разностного трех-
частичного оператора Шрёдингера на решетке, *Матем. за-
метки*, 2002, том 71, выпуск 5, 686–696

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm377>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 18:12:54

УДК 517.984

СПЕКТР РАЗНОСТНОГО ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

С. Н. Лакаев, Ж. И. Абдуллаев

Изучены свойства спектра трехчастичного оператора на решетке, учитывающие парные взаимодействия, в зависимости от параметра, характеризующего интенсивность взаимодействия.

Библиография: 14 названий.

Введение. Одним из замечательных результатов спектрального анализа трехчастичного непрерывного оператора Шрёдингера (ОШ) является так называемый эффект Ефимова: если в системе трех частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов, ни одна из трех двухчастичных подсистем не имеет связанных состояний с отрицательной энергией, но по меньшей мере две из них имеют резонанс с энергией в нуле, то у этой трехчастичной системы существует бесконечное число трехчастичных связанных состояний с отрицательной энергией, накапливающихся к нулю. Этот эффект впервые был обнаружен Ефимовым [1]. Существование этого эффекта изучалось во многих физических работах [2] [3]. Строгое математическое доказательство существования эффекта Ефимова было проведено впервые Яфаевым [4], а затем в работах [5]–[7].

В моделях физики твердого тела [8], а также решетчатой теории поля [9] возникают так называемые дискретные ОШ (ДОШ), являющиеся решетчатым аналогом обычного трехчастичного ОШ в непрерывном пространстве. Для таких операторов также естественно ожидать появления эффекта Ефимова, поскольку, как показывает тщательный анализ этого эффекта [4], за него ответственна “длинноволновая часть” спектра ОШ, одинаковая в обоих случаях – решетчатом и непрерывном. На физическом уровне это было показано в работах [8], [10].

Хотя ДОШ системы трех решетчатых частиц ограничен и возмущение в парной задаче – компактный оператор, спектр ОШ для системы трех квантовых решетчатых частиц имеет более сложный характер по сравнению с непрерывным случаем.

В непрерывном случае “двухчастичная” и “трехчастичная” ветви существенного спектра состоят из полуоси $[\kappa, \infty)$, где $\kappa \leq 0$, и они пересекаются. Для ДОШ “двухчастичная” и “трехчастичная” ветви существенного спектра состоят из отрезков конечной длины, причем они могут не пересекаться.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований, ГКНТ Республики Узбекистан.

В работе [11] рассмотрен ДОШ, описывающий системы трех одинаковых частиц (бозонов), взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения, при общих предположениях на энергию отдельного бозона $\varepsilon(q)$, $q \in T^3$. Там же описано множество тех значений квазиимпульса $K \in T^3$, для которых имеет место эффект Ефимова.

В настоящей работе мы рассмотрим разностный оператор Шрёдингера, т.е.

$$\varepsilon(q) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos q_i),$$

и покажем, что при нулевом значении полного квазиимпульса ($K = 0$) и некотором $\mu = \mu_0 > 0$ имеет место эффект Ефимова, а при всех $K \in U^\circ$ (где $U^\circ \subset T^3$ – некоторая выколота окрестность нуля) и $\mu > 0$ оператор $H_\mu(K)$ имеет лишь конечное число собственных значений, лежащих вне существенного спектра.

Это явление, т.е. такая нетривиальная зависимость от квазиимпульса системы, позволяет следующим образом сформулировать эффект Ефимова для системы трех одинаковых квантовых частиц на решетке: если левые края “трехчастичной” и “двухчастичной” ветвей существенного спектра совпадают и этот край является виртуальным уровнем оператора $h_\mu(2K/3) + \varepsilon(K/3)I$, то у трехчастичного оператора $H_\mu(K)$ существует бесконечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра, где $h_\mu(k)$ – двухчастичный оператор, I – единичный оператор.

Работа состоит из четырех пунктов. В п. 1 разностные операторы Шрёдингера двух и трех решетчатых частиц описаны как ограниченные самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве. Здесь сформулированы основные результаты работы. В п. 2 исследованы существования виртуальных уровней и собственных значений двухчастичного оператора. Изучена зависимость единственного собственного значения $z_\mu(k)$ от квазиимпульса k и энергии взаимодействия $\mu > 0$ двух частиц. В п. 3 изучена структура спектра оператора канала, и п. 4 посвящен доказательству основных результатов работы.

1. Описание двухчастичного и трехчастичного разностных операторов Шрёдингера. Пусть Z^3 – трехмерная решетка, $\ell_2^s((Z^3)^m)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $(Z^3)^m$ и симметричных относительно перестановки любых двух переменных.

В координатном представлении ОШ (операторы Шрёдингера) системы двух и системы трех одинаковых частиц на трехмерной решетке действуют соответственно в пространствах $\ell_2^s((Z^3)^2)$ и $\ell_2^s((Z^3)^3)$ по формулам

$$\begin{aligned} (\tilde{h}_\mu \varphi)(n_1, n_2) &= \frac{1}{2} \sum_{|s|=1} [2\varphi(n_1, n_2) - \varphi(n_1 + s, n_2) - \varphi(n_1, n_2 + s)] \\ &\quad - \mu \delta_{n_1 n_2} \varphi(n_1, n_2), \\ (\tilde{H}_\mu \varphi)(n_1, n_2, n_3) &= \frac{1}{2} \sum_{|s|=1} [3\varphi(n_1, n_2, n_3) - \varphi(n_1 + s, n_2, n_3) - \varphi(n_1, n_2 + s, n_3) \\ &\quad - \varphi(n_1, n_2, n_3 + s)] - \mu (\delta_{n_1 n_2} + \delta_{n_1 n_3} + \delta_{n_3 n_2}) \varphi(n_1, n_2, n_3). \end{aligned}$$

Здесь $\mu > 0$ – энергия взаимодействия, δ_{nm} – символ Кронекера.

Пусть T^3 – трехмерный тор, $L_2^s((T^3)^m)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(T^3)^m$ и симметричных относительно перестановки любых двух переменных.

В импульсном представлении операторы Шрёдингера системы двух и системы трех одинаковых частиц действуют соответственно в гильбертовых пространствах $L_2^s((T^3)^2)$ и $L_2^s((T^3)^3)$ по формулам

$$\begin{aligned}(h_\mu f)(k_1, k_2) &= (\varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2))f(k_1, k_2) - \mu \int \delta(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2)f(k'_1, k'_2) dk'_1 dk'_2, \\ (H_\mu f)(k_1, k_2, k_3) &= (\varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2) + \varepsilon(k_3))f(k_1, k_2, k_3) \\ &\quad - \mu \sum_{\alpha=1}^3 \int \delta(k_\alpha - k'_\alpha)\delta(k_\beta + k_\gamma - k'_\beta - k'_\gamma)f(k'_1, k'_2, k'_3) dk'_1 dk'_2 dk'_3.\end{aligned}$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$,

$$\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p_i), \quad p = (p_1, p_2, p_3) \in T^3, \quad (1)$$

$\delta(k)$ – трехмерная дельта-функция Дирака. На торе T^3 выбрана единичная мера, т.е. $\int_{T^3} dk = 1$. Символ $\int$ без указания пределов интегрирования обозначает интеграл по всей области изменения переменных интегрирования.

Пусть $k = k_1 + k_2$ и $K = k_1 + k_2 + k_3$ – полные квазиимпульсы системы двух и системы трех частиц, а $\Gamma_k = \{(k_1, k_2) \in (T^3)^2 : k = k_1 + k_2\}$, $F_K = \{(k_1, k_2, k_3) \in (T^3)^3 : K = k_1 + k_2 + k_3\}$ – соответственно трехмерное и шестимерное многообразия. Обозначим через $\tilde{L}(k)$ и $L(K)$ гильбертовы пространства всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на T^3 и $(T^3)^2$, и удовлетворяющих соответственно условиям $f(k_1) = f(k - k_1)$ и $f(k_1, k_2) = f(k_2, k_1) = f(k_1, K - k_1 - k_2)$.

Операторы h_μ и H_μ разлагаются в прямые интегралы [11]

$$h_\mu = \int \oplus h_\mu(k) dk, \quad H_\mu = \int \oplus H_\mu(K) dK,$$

где ограниченные самосопряженные операторы $h_\mu(k)$, $H_\mu(K)$, $k, K \in T^3$, действуют в гильбертовых пространствах $\tilde{L}(k)$ и $L(K)$ соответственно по формулам

$$h_\mu(k)f(p) = \varepsilon_k(p)f(p) - \mu \int f(s) ds, \quad (2)$$

$$H_\mu(K)f(p, q) = \varepsilon_K(p, q)f(p, q) - \mu \int [f(K - p - q, s) + f(p, s) + f(s, q)] ds. \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon_k(p) = \varepsilon(k - p) + \varepsilon(p)$, $\varepsilon_K(p, q) = \varepsilon(K - p - q) + \varepsilon(p) + \varepsilon(q)$.

Теперь сформулируем основные результаты работы.

ТЕОРЕМА 1. *Оператор $H_\mu(K)$ не имеет собственных значений правее существенного спектра.*

ТЕОРЕМА 2. а) Пусть $K = 0$, $\mu_0 = 2(\int(\varepsilon(q))^{-1} dq)^{-1}$. Тогда оператор $H_{\mu_0}(0)$ имеет бесконечное число отрицательных собственных значений, накапливающихся к нулю, т.е. левому краю существенного спектра.

б) Существует выколота окрестность U° точки $K = 0$ такая, что для любого $K \in U^\circ$ и $\mu > 0$ дискретный спектр оператора $H_\mu(K)$ разве лишь конечен.

2. Спектр двухчастичного оператора. Пусть $\Delta(\mu, k, z)$ – определитель Фредгольма оператора $I - \mu v r_0(z)$, $r_0(z)$ – резольвента оператора $h_0(k)$, v – интегральный оператор с ядром $v(q, q') = 1$, т.е. $vf = \int f(s) ds$. Определитель Фредгольма $\Delta(\mu, k, z)$ оператора $I - \mu v r_0(z)$ имеет вид

$$\Delta(\mu, k, z) = 1 - \mu \int \frac{dq}{\varepsilon_k(q) - z}, \quad z \in C \setminus [m(k), M(k)].$$

Здесь

$$m(k) = \min_{p \in T^3} \varepsilon_k(p), \quad M(k) = \max_{p \in T^3} \varepsilon_k(p).$$

ЛЕММА 1. Число $z \in C \setminus [m(k), M(k)]$ является собственным значением оператора $h_\mu(k)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(\mu, k, z) = 0$.

Лемма 1 доказана в [11].

В соответствии с теоремой Вейля о существенном спектре [12] непрерывный спектр $\sigma_c(h_\mu(k))$ оператора $h_\mu(k)$ не зависит от $\mu > 0$ и совпадает со спектром $\sigma(h_0(k))$ оператора $h_0(k)$, т.е. с отрезком $[m(k), M(k)]$. Заметим, что при $k = (\pi, \pi, \pi)$ выполняется тождество $\varepsilon_k(q) \equiv 6$, и поэтому отрезок $[m(k), M(k)]$ превращается в точку $\{6\}$.

Для функции $\varepsilon(p)$ имеет место представление (1), поэтому имеем

$$m(k) = 2\varepsilon\left(\frac{k}{2}\right), \quad M(k) = 12 - 2\varepsilon\left(\frac{k}{2}\right), \quad k = (k_1, k_2, k_3) \in T^3.$$

Заметим, что функции $m(k)$ и $M(k)$ симметричны относительно перестановки любых двух переменных k_i и k_j , четны по каждой $k_i \in [-\pi, \pi]$, $i = 1, 2, 3$. Функция $m(k)$ строго возрастает, а $M(k)$ строго убывает по каждой $k_i \in [0, \pi]$, $i = 1, 2, 3$. Следовательно,

$$\min_k m(k) = m(0) = 0, \quad \max_k M(k) = M(0) = 12.$$

Для любого $z \in C \setminus [m(k), M(k)]$ обозначим через $D(k, z)$ функцию

$$D(k, z) = \int \frac{dq}{\varepsilon_k(q) - z}.$$

ЛЕММА 2. Функция $D(k, \cdot)$ непрерывна и строго возрастает на каждой из полуосей $(-\infty, m(k))$ и $(M(k), \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность функции $D(k, \cdot)$ следует из непрерывности подынтегральной функции, а монотонность вытекает из неравенства $D'_z(k, z) > 0$.

Из монотонности функции $D(k, \cdot)$ следует существование конечного или бесконечного предела

$$\lim_{z \rightarrow m(k)} D(k, z) = D(k, m(k)).$$

Если $k_i \neq \pi$, $i = 1, 2, 3$, то предел конечен.

ЛЕММА 3. а) Функция $D(k, m(k))$ симметрична относительно перестановки любых двух переменных k_i, k_j , четна по каждой $k_i \in [-\pi, \pi]$ и она строго возрастает по каждой $k_i \in [0, \pi]$, $i = 1, 2, 3$.

б) При каждом фиксированном $z \leq 0$ функция $D(\cdot, z)$ строго убывает по каждой $k_i \in [0, \pi]$, $i = 1, 2, 3$. При этом имеют место равенства

$$\min_{k \in T^3} D(k, m(k)) = \max_k D(k, 0) = D(0, 0) = \frac{1}{2} \int \frac{dq}{\varepsilon(q)} = \mu_0^{-1},$$

$$\min_{k \in T^3} D(k, 0) = D(\pi, 0) = \frac{1}{6};$$

следовательно, $\mu_0 < 6$.

Доказательства этих утверждений следуют из свойств косинуса и монотонности интеграла Лебега.

Так как ранг оператора $\mu\nu = h_0(k) - h_\mu(k)$ равен единице, то $h_\mu(k)$ может иметь только одно простое собственное значение $z < m(k)$.

ЛЕММА 4. Для любых $\mu > 0$ и $k \in T^3$ оператор $h_\mu(k)$ не имеет собственных значений на полуоси $(M(k), \infty)$.

Доказательство следует из леммы 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (см. [4]). Если уравнение $h_\mu(k)f(q) = m(k)f(q)$ имеет нетривиальное решение f ($f \notin L_2(T^3)$) в пространстве $L_p(T^3)$ при некотором $p \in [1, 3/2)$, то будем говорить, что оператор $h_\mu(k)$ имеет виртуальный уровень в левом крае непрерывного спектра.

Отметим, что требование наличия виртуального уровня оператора $h_\mu(k)$ соответствует условию $\Delta(\mu, k, m(k)) = 0$.

ЛЕММА 5. а) Если $\mu \in (0, \mu_0)$, то существует открытое связное множество $G_\mu \subset T^3$ такое, что при всех $k \in G_\mu$ оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение $z_\mu(k)$, причем $0 < z_\mu(k) < m(k)$.

б) Если $\mu = \mu_0$, то левый край непрерывного спектра оператора $h_\mu(0)$, т.е. точка $z = 0$, является виртуальным уровнем для оператора $h_\mu(0)$, а при всех $k \neq 0$ оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное простое положительное собственное значение $z_\mu(k)$ левее непрерывного спектра.

ЛЕММА 6. а) Собственное значение $z(\mu, k)$ оператора $h_\mu(k)$ как функция от μ строго убывает на полуоси $(0, \infty)$.

б) Функция $z(\mu, \cdot)$ симметрична и четна по каждой переменной $k_i \in [-\pi, \pi]$, $i = 1, 2, 3$, и строго возрастает по каждой $k_i \in [0, \pi]$, $i = 1, 2, 3$.

Доказательства этих лемм следуют из лемм 1–3.

3. Структура спектра оператора канала. Вместе с трехчастичным оператором $H_\mu(K)$ рассмотрим “оператор канала” $H_\mu^{(\alpha)}(K) = H_0(K) - \mu V_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, где

$$(V_\alpha f)(k_\alpha, k_\beta) = \int f(k_\alpha, s) ds$$

– оператор взаимодействия. Так как система состоит из трех одинаковых частиц, операторы каналов $\{H_\mu^{(\alpha)}(K)\}_{\alpha=1}^3$ становятся неразличимыми. Для определенности рассмотрим оператор $H_\mu^{(3)}(K)$, действующий по формуле

$$H_\mu^{(3)}(K)f(p, q) = \varepsilon_K(p, q)f(p, q) - \mu \int f(s, q) ds.$$

Оператор $H_\mu^{(3)}(K)$ коммутирует с любым оператором умножения на функцию $u(p, q) \equiv u(q)$, поэтому он разлагается в прямой операторный интеграл семейства операторов $\{H_\mu^{(3)}(K, q), q \in T^\nu\}$ (см. [13]), действующих при каждом $q \in T^3$ в пространстве $\tilde{L}(K - q)$, по формуле

$$(H_\mu^{(3)}(K, q)f)(p) = \varepsilon_K(p, q)f(p) - \mu \int f(s) ds.$$

Из представления $\varepsilon_K(p, q) = \varepsilon_{K-q}(p) + \varepsilon(q)$ имеем

$$H_\mu^{(3)}(K, q) = h_\mu(K - q) + \varepsilon(q)I, \quad (4)$$

где I – единичный оператор в $\tilde{L}(K - q)$. Обозначим через $\lambda + B = \{z = \lambda + b : b \in B\}$ сдвиг множества B на число λ . Из представления (4) следует соотношение $\sigma(H_\mu^{(3)}(K, q)) = \varepsilon(q) + \sigma(h_\mu(K - q))$. Кроме того, если $z_\mu(k)$ – собственное значение оператора $h_\mu(k)$, то число $E_\mu(K, q) = z_\mu(K - q) + \varepsilon(q)$ является собственным значением оператора $H_\mu^{(3)}(K, q)$. Из леммы 5 следует следующее соотношение для спектра оператора $H_\mu^{(3)}(K, q)$:

$$\sigma(H_\mu^{(3)}(K, q)) = \{E_\mu(K, q)\} \cup [m(K - q) + \varepsilon(q), M(K - q) + \varepsilon(q)]. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо равенство*

$$\sigma(H_\mu^{(3)}(K)) = \bigcup_{k \in G_\mu} \{E_\mu(K, K - k)\} \cup [\varepsilon_{\min}(K), \varepsilon_{\max}(K)],$$

где

$$\varepsilon_{\min}(K) = \min_{p, q} \varepsilon_K(p, q) = 3\varepsilon\left(\frac{K}{3}\right),$$

G_μ – множество тех значений полного квазиимпульса k двух частиц, при которых двухчастичный оператор $h_\mu(k)$ имеет собственное значение.

Доказательство следует из теоремы о спектре разложимых операторов [12] и структуры спектра (5) оператора $H_\mu^{(3)}(K, q)$.

Первая часть $\bigcup_k \{E_\mu(K, K - k)\}$ спектра оператора $H_\mu^{(3)}(K)$ называется *двухчастичной ветвью* существенного спектра трехчастичного оператора $H_\mu(K)$, вторая часть $[\varepsilon_{\min}(K), \varepsilon_{\max}(K)]$ совпадает со спектром невозмущенного трехчастичного оператора $H_0(K)$ и называется *трехчастичной ветвью* существенного спектра оператора $H_\mu(K)$.

Как следует из определения, трехчастичная ветвь $[\varepsilon_{\min}(K), \varepsilon_{\max}(K)]$ существенного спектра оператора $H_\mu(K)$ не зависит от $\mu > 0$, а двухчастичная ветвь $\bigcup_k \{E_\mu(K, K-k)\}$ сдвигается влево при возрастании $\mu > 0$, т.е. $E_{\min}(\mu, K) = \min_q E_\mu(K, q)$ монотонно убывает. Поэтому при некотором значении $\mu = \mu(K)$ левые края $E_{\min}(\mu, K)$ и $\varepsilon_{\min}(K) = 3\varepsilon(K/3)$ соответственно двухчастичной и трехчастичной ветвей существенного спектра оператора $H_\mu(K)$ совпадают. Заметим, что

$$\mu(K) = \min_q (D(K - q, \varepsilon_{\min}(K) - \varepsilon(q)))^{-1}.$$

ЛЕММА 7. а) Пусть $K = 0$. Тогда

$$\mu(0) = \mu_0 = (D(0, 0))^{-1}, \quad \varepsilon_{\min}(0) = E_{\mu_0}(0, 0) = 0.$$

Кроме того, $z = 0$ является виртуальным уровнем (резонансом) для двухчастичного оператора $h_{\mu_0}(0) = H_{\mu_0}^{(3)}(0, 0)$.

б) Пусть $K \neq 0$. Тогда

$$\max_q D(K - q, \varepsilon_{\min}(K) - \varepsilon(q)) > D\left(\frac{2K}{3}, 2\varepsilon\left(\frac{K}{3}\right)\right).$$

При этом ни при каких значениях $q \in T^3$ оператор $H_{\mu(K)}^{(3)}(K, q)$ не имеет виртуального уровня на левом краю существенного спектра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство утверждения а) следует из определения $\mu(K)$ и монотонности $D(q, m(q))$. Тот факт, что $z = 0$ является виртуальным уровнем оператора $h_{\mu_0}(0)$, показан в лемме 5.

Докажем утверждение б). При $K \neq 0$ функция $D(K - q, \varepsilon_{\min}(K) - \varepsilon(q))$ теряет свойства симметричности, четности и монотонности по аргументу q_i , $i = 1, 2, 3$. Покажем, что максимальное значение функции $D(K - q, \varepsilon_{\min}(K) - \varepsilon(q))$ не достигается в точке $q = K/3$. Действительно, в точке $q = K/3$ не выполняется необходимое условие экстремума, т.е.

$$\left. \frac{\partial D(K - q, \varepsilon_{\min}(K) - \varepsilon(q))}{\partial q_i} \right|_{q=K/3} = -\sin \frac{K_i}{3} \int \frac{(1 - \cos p_i) dp}{(\varepsilon_K(K/3, p) - \varepsilon_{\min}(K))^2} \neq 0.$$

Следовательно,

$$\max_q D(K - q, \varepsilon_{\min}(K) - \varepsilon(q)) > D\left(\frac{2K}{3}, 2\varepsilon\left(\frac{K}{3}\right)\right).$$

Это означает, что

$$\Delta\left(\mu(K), \frac{2K}{3}, 2\varepsilon\left(\frac{K}{3}\right)\right) = 1 - \mu(K)D\left(\frac{2K}{3}, 2\varepsilon\left(\frac{K}{3}\right)\right) > 0. \quad (6)$$

Единственный оператор, имеющий виртуальный уровень на крае существенного спектра, — это оператор $H_\mu^{(3)}(K, K/3)$, так как левые границы существенных спектров операторов $H_\mu^{(3)}(K, q)$ и $H_\mu(K)$ совпадают при единственном значении $q = K/3$. При $q \neq K/3$ эти границы не совпадают. Поэтому левый край $\varepsilon_{\min}(K)$ существенного спектра оператора $H_\mu(K)$ не может быть виртуальным уровнем оператора $H_\mu^{(3)}(K, q)$, $q \neq K/3$. Тот факт, что $z = 3\varepsilon(K/3)$ не может быть виртуальным уровнем для оператора $H_\mu^{(3)}(K, K/3)$, следует из положительности функции Δ при выбранном значении $\mu = \mu(K)$ (см. (6)).

Заметим, что функция $\Delta(\mu, K - p, z - \varepsilon(p))$ имеет единственный нуль, равный $E_K(p) = z_\mu(K - p) + \varepsilon(p)$. При $K = 0$ функция $E_0(p) = z_\mu(p) + \varepsilon(p)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $p = 0$. Поэтому справедлива

ЛЕММА 8. Существует выколота окрестность U° точки $K = 0$ такая, что для любого $K \in U^\circ$ функция $E_K(p) = z_{\mu(K)}(K - p) + \varepsilon(p)$ имеет единственный невырожденный минимум.

4. Спектр трехчастичного оператора. Пусть $T_{\mu K}^s(z)$, $z \in C \setminus \sigma(H_\mu^{(\alpha)}(K))$, — симметризованный оператор, определяемый формулой

$$T_{\mu K}^s(z)g(p) = \frac{2\mu}{\sqrt{\Delta(\mu, K - p, z - \varepsilon(p))}} \int \frac{(\varepsilon_K(p, s) - z)^{-1}g(s) ds}{\sqrt{\Delta(\mu, K - s, z - \varepsilon(s))}}. \quad (7)$$

Следующее уравнение есть аналог уравнения Фаддеева

$$T_{\mu K}^s(z)g(p) = g(p). \quad (8)$$

Известна (см. [11]) следующая

ЛЕММА 9. Число $z \in C \setminus \sigma(H_\mu^{(3)}(K))$ является собственным значением оператора $H_\mu(K)$ тогда и только тогда, когда число 1 есть собственное значение оператора $T_{\mu K}^s(z)$.

Обозначим через $D_{\mu K}(z)$ определитель Фредгольма $I - T_{\mu K}^s(z)$. Из леммы 9 и теоремы Фредгольма следует

ЛЕММА 10. Число $z \in C \setminus \sigma(H_\mu^{(3)}(K))$ является собственным значением оператора $H_\mu(K)$ тогда и только тогда, когда $D_{\mu K}(z) = 0$.

ТЕОРЕМА 4. Справедливо равенство $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K)) = \sigma(H_\mu^{(3)}(K))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению существенного спектра можно показать, что выполнено $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K)) \supset \sigma(H_\mu^{(3)}(K))$. В силу аналитичности функции $D_{\mu K}$ в области $C \setminus \sigma(H_\mu^{(3)}(K))$ и леммы 10 следует, что множество $\sigma(H_\mu(K)) \setminus \sigma(H_\mu^{(3)}(K)) = \{z : D_{\mu K}(z) = 0\}$ дискретно. Таким образом, $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K)) \subset \sigma(H_\mu^{(3)}(K))$. Теорема 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из положительности оператора $V = V_1 + V_2 + V_3$ следует

$$\sup_{\|f\| \leq 1} (H_\mu(K)f, f) = \sup_{\|f\| \leq 1} [(H_0(K)f, f) - \mu(Vf, f)] \leq \sup_{\|f\| \leq 1} (H_0(K)f, f) = \varepsilon_{\max}(K).$$

Это означает, что оператор $H_\mu(K)$ на полуоси $(\varepsilon_{\max}(K), \infty)$ не имеет точек спектра. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Утверждение а) теоремы доказано в [11] при более общем предположении на функцию $\varepsilon(p)$. Доказательство утверждения б) в случае $\mu \neq \mu(K)$ опубликовано в работе [13].

Пусть $\mu = \mu(K)$. Рассмотрим оператор $T_{\mu(K)K}^s(z) = T^s(z)$ и покажем, что оператор $T^s(z)$ является оператором Гильберта–Шмидта при $z = z_0 = \varepsilon_{\min}(K)$.

ЛЕММА 11. Для любого $K \in U^\circ$ оператор $T^s(z)$, $z \leq z_0$, является оператором Гильберта–Шмидта и непрерывен в равномерной операторной топологии при $z = z_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом $z < z_0$ ядро оператора $T^s(z)$ непрерывно и поэтому квадратично-интегрируемо. Покажем квадратичную интегрируемость ядра оператора $T^s(z)$ при $z = z_0$. Ядро оператора $T^s(z_0)$ имеет две невырожденные особые точки $(K/3, K/3)$ и $(P(K), P(K))$. Из невырожденности минимума функции ε_K и Δ следует, что ядро оператора $T^s(z_0)$ удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{2\mu(K)}{\sqrt{\Delta(\mu(K), K - p, z_0 - \varepsilon(p))}} \frac{(\varepsilon_K(p, s) - z_0)^{-1}}{\sqrt{\Delta(\mu(K), K - s, z_0 - \varepsilon(s))}} \right| \leq \frac{C}{(p - K/3)^2 + (q - K/3)^2} + \frac{C}{\sqrt{(p - P(K))^2 (q - P(K))^2}}. \quad (9)$$

Переходя в сферическую систему координат, можно показать, что ядро $T^s(p, q; z_0)$ квадратично-интегрируемо.

Теперь покажем равномерную непрерывность оператора $T^s(z)$ в точке $z = z_0$. С этой целью интеграл

$$\int |T^s(p, q; z_n) - T^s(p, q; z_0)|^2 dp dq$$

по множеству $(T^3)^2$ разобьем на два слагаемых по множествам $(U_\delta(K/3) \cup U_\delta(P(K)))^2$ и $(T^3)^2 \setminus (U_\delta(K/3) \cup U_\delta(P(K)))^2 = (T^3)_\delta^2$. Интеграл по множеству $(T^3)_\delta^2$ стремится к нулю из-за равномерной оценки $|T^s(p, q; z_n) - T^s(p, q; z_0)| \leq C(z_0 - z_n)$. Оценим малой величиной интеграл по множеству $U_\delta^2(P(K))$. Функция $\varepsilon_K(p, q) - z_0$ ограничена снизу положительной величиной, поэтому имеет место неравенство

$$|T^s(p, q; z_n) - T^s(p, q; z_0)|^2 \leq C \frac{|\sqrt{\Delta_n(p)\Delta_n(q)} - \sqrt{\Delta(p)\Delta(q)}|^2}{\Delta_n(p)\Delta_n(q)\Delta(p)\Delta(q)}. \quad (10)$$

Здесь $\Delta_n(p) = \Delta(\mu(K), K - p, z_n - \varepsilon(p))$, $\Delta(p) = \Delta(\mu(K), K - p, z_0 - \varepsilon(p))$. Пользуясь неравенством (10), получим оценку

$$\int_{U_\delta^2(P(K))} |T^s(p, q; z_n) - T^s(p, q; z_0)|^2 dp dq \leq C|z_0 - z_n|.$$

Интеграл по множеству $U_\delta^2(K/3)$ от функции $|T^s(p, q; z_n) - T^s(p, q; z_0)|^2$ оценивается величиной $C|z_0 - z_n|$ (см. [13]). Аналогично можно оценить и интеграл по множеству $U_\delta(K/3) \cup U_\delta(P(K))$ от функции $|T^s(p, q; z_n) - T^s(p, q; z_0)|^2$ величиной $C|z_0 - z_n|$. Из изложенного выше следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^s(z_n) - T^s(z_0)\| \leq C \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{z_0 - z_n} = 0.$$

Продолжим доказательство теоремы 1. Допустим противное, т.е. оператор $H_\mu(K)$ имеет бесконечное число собственных значений z_i таких, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} z_i = z_0.$$

Пусть $f_n \in L(K)$ – собственная функция оператора $H_\mu(K)$, соответствующая собственному значению z_n . Тогда

$$g_n(p) = \sqrt{\Delta(\mu, K - p, z_n - \varepsilon(p))} \int f_n(p, s) ds \in L_2(T^\nu) \quad (11)$$

удовлетворяет симметризованному уравнению Фаддеева при $z = z_n$, т.е.

$$g_n(p) = T^s(z_n)g_n(p). \quad (12)$$

Нормируем g_n и рассмотрим эквивалентное к (12) уравнение

$$g_n(p) - T^s(z_0)g_n(p) = \varphi_n(p), \quad (13)$$

где $\varphi_n(p) = T^s(z_n)g_n(p) - T^s(z_0)g_n(p)$. Из равномерной непрерывности $T^s(z)$ в точке $z = z_0$ следует, что $\|\varphi_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Возможны два случая:

- 1) число 1 не есть собственное значение компактного оператора $T^s(z_0)$;
 - 2) число 1 является собственным значением кратности n_0 .
- 1) В этом случае оператор $I - T^s(z_0)$ обратим, поэтому

$$g_n(p) = \varphi_n(p) + R^s(z_0)\varphi_n(p), \quad (14)$$

где $I + R^s(z_0) = (I - T^s(z_0))^{-1}$. Из сходимости $\varphi_n \rightarrow 0$ и непрерывности оператора $I + R^s(z_0)$ следует, что норма правой части равенства (14) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Это противоречит нормировке $\|g_n\| = 1$ и доказывает теорему.

2) Пусть число 1 является собственным значением кратности n_0 . Известно, что частное решение $g_n(p)$ уравнения (13) строится с помощью ядра

$$\hat{T}^s(p, q) = T^s(p, q; z_0) - \sum_{k=1}^{n_0} \phi_k(p)\phi_k(q),$$

где $T^s(p, q; z_0)$ – ядро оператора $T^s(z_0)$, ϕ_k , $k = 1, \dots, n_0$, – ортонормированный базис в собственном подпространстве, отвечающем собственному значению 1, и общее решение (13) имеет вид

$$g_n(p) = (I + \hat{R}^s(z_0))\varphi_n(p) + \sum_{k=1}^{n_0} c_k \phi_k(p),$$

где $I + \hat{R}^s(z_0) = (I + \hat{T}^s(z_0))$. Из сильной сходимости $\{\varphi_n\}$ к нулю и непрерывности оператора $I + \hat{R}^s(z_n)$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(p) = \sum_{k=1}^{n_0} c_k \phi_k(p) = g(p).$$

Из ортогональности $\{f_n\}$ и соотношения (11) следует, что $g(p) \equiv 0$. Это противоречие доказывает теорему.

Авторы выражают глубокую благодарность Р. А. Минлосу за внимание и обсуждения полученных результатов, а также рецензенту за критические и ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ефимов В. Н. Связанные состояния трех резонансно взаимодействующих частиц // Ядерная физика. 1970. Т. 12. № 5. С. 1080–1091.
- [2] Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
- [3] Amado R. D., Noble J. V. Efimov's effect: a new pathology of three-particle systems. II // Phys. Rev. D. 1971. V. 5. № 8. P. 1992–2002.
- [4] Яфаев Д. Р. К теории дискретного спектра трехчастичного оператора Шрёдингера // Матем. сб. 1974. Т. 9(136). № 4(8). С. 567–592.
- [5] Ovchinnikov Yu. N., Sigal I. M. Number of bound states of three-body systems and Efimov's effect // Ann. Physics. 1989. V. 123. P. 274–295.
- [6] Tamura H. The Efimov effect of three-body Schrödinger operators // J. Funct. Anal. 1991. V. 95. P. 433–459.
- [7] Sobolev A. V. The Efimov Effect. Discrete Spectrum Asymptotics // Commun. Math. Phys. 1993. V. 156. P. 101–126.
- [8] Mattis D. C. The few-body problem on lattice // Rev. Modern Phys. 1986. V. 58. № 2. P. 361–379.
- [9] Малышев В. А., Минлос Р. А. Кластерные операторы // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. № 9. С. 63–80.
- [10] Mogilner A. I. The problem of few quasi-particles in solid state physics // Applications of Self-Adjoint Extensions in Quantum Physics / ed. P. Exner, P. Seba. Lecture Notes in Phys. V. 324. Berlin: Springer Verlag, 1988.
- [11] Лакаев С. Н. Об эффекте Ефимова в системе трех одинаковых квантовых частиц // Функцион. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 3. С. 15–28.
- [12] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
- [13] Абдуллаев Ж. И., Лакаев С. Н. Конечность дискретного спектра трехчастичного оператора Шрёдингера на решетке // ТМФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 94–108.
- [14] Яфаев Д. Р. О сингулярном спектре в системе трех частиц // Матем. сб. 1978. Т. 106(148). № 4(8). С. 622–640.

Самаркандский университет
E-mail: info@samuni.silk

Поступило
13.04.1998
Исправленный вариант
30.05.2001