Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Кытманов, С. Г. Мысливец, О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 4, 545–551

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3770>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 08:32:44

УДК 517.55

О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения

А. М. Кытманов, С. Г. Мысливец

В работе показано, что множество $\mathcal{L}_\Gamma$ всех комплексных прямых, проходящих через росток порождающего многообразия Γ , является достаточным для того, чтобы непрерывная функция f на границе ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$ со связной гладкой границей и обладающей свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль прямых из $\mathcal{L}_\Gamma$, голоморфно продолжалась в D как функция многих комплексных переменных.

Библиография: 10 названий.

Эта статья содержит некоторые результаты, связанные с голоморфным продолжением функций, заданных на границе ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, в эту область. Речь пойдет о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых. Тематика эта далеко не нова, но еще далека от завершения.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ результаты о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения тривиальны, поэтому результаты работы существенно многомерны.

Первый результат, относящийся к нашей теме, был получен Аграновским и Вальским в [1], изучившими функции с одномерным свойством голоморфного продолжения в шаре. Доказательство основывалось на свойствах группы автоморфизмов шара.

Стаутом в [2], использовавшим комплексное преобразование Радона, теорема Аграновского и Вальского была перенесена на произвольные ограниченные области с гладкой границей. Альтернативное доказательство теоремы Стаута получено Кытмановым в [3], [4], применившим интеграл Бохнера–Мартинелли. Идея использования интегральных представлений (Бохнера–Мартинелли, Коши–Фанташье, логарифмического вычета) оказалась полезной при изучении функций с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых и кривых [5], [6]. Обзор результатов, относящихся к данной теме, можно найти в [7].

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, со связной гладкой границей ∂D (класса $\mathcal{C}^2$).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00517).

© А. М. Кытманов, С. Г. Мысливец, 2008

Рассмотрим одномерные комплексные прямые l вида

$$l = \{\zeta : \zeta_j = z_j + b_j t, j = 1, \dots, n, t \in \mathbb{C}\}, \quad (1)$$

проходящие через точку $z \in \mathbb{C}^n$ в направлении вектора $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ (направление b определяется с точностью до умножения на комплексное число $\lambda \neq 0$).

По теореме Сарда для почти всех $z \in \mathbb{C}^n$ и почти всех $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ пересечение $l \cap \partial D$ представляет собой набор конечного числа кусочно-гладких кривых либо пусто.

Дадим следующее определение. Функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ обладает *одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексной прямой l* ($l \cap \partial D \neq \emptyset$), если существует функция f_l со следующими свойствами:

- а) $f_l \in \mathcal{C}(\overline{D} \cap l)$;
- б) $f_l = f$ на множестве $\partial D \cap l$;
- с) функция f_l голоморфна во внутренних (относительно топологии l) точках множества $\overline{D} \cap l$.

Сформулируем результат Стаута [2].

ТЕОРЕМА 1. *Если функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых вида (1), то f голоморфно продолжается в D .*

Назовем семейство $\mathfrak{L}$ комплексных прямых *достаточным* для голоморфного продолжения, если для любой функции $f \in \mathcal{C}(\partial D)$, обладающей одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех прямых из $\mathfrak{L}$, следует, что f голоморфно продолжается в D .

Одно из таких семейств комплексных прямых было рассмотрено Аграновским и Семёновым [8].

Рассмотрим открытое множество $V \subset D$ и семейство $\mathfrak{L}_V$ комплексных прямых, пересекающих это множество.

ТЕОРЕМА 2 [8]. *Если функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль прямых из семейства $\mathfrak{L}_V$ для некоторого открытого множества $V \subset D$, тогда функция f голоморфно продолжается в D .*

Аналогичное утверждение справедливо, если открытое множество V лежит вне замыкания D .

Пусть Ω – алгебраическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$. Как отмечалось в [7], семейство $\mathfrak{L}_\Omega$ также является достаточным для голоморфного продолжения.

Вопрос о нахождении различных семейств комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения, был поставлен в [9]. Ясно, что семейство комплексных прямых, проходящих через одну точку, не является достаточным. Покажем, что семейство всех комплексных прямых, проходящих через конечное число точек также не является достаточным. Таким образом, простых аналогов теоремы Гартогса ожидать не следует.

Пусть область D есть единичный шар в $\mathbb{C}^n$:

$$D = \left\{ z : \sum_{j=1}^n |z_j|^2 < 1 \right\}.$$

Рассмотрим пучок параллельных комплексных прямых вида

$$l_{c,b} = \{z : z_1 = t, z_j = c_j + b_j t, j = 2, \dots, n, t \in \mathbb{C}\}, \quad (2)$$

где $b = (b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ – фиксированный вектор, а $c = (c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ – текущий вектор.

Тогда на сфере ∂D выполнено равенство

$$|t|^2 + \sum_{j=2}^n |c_j + b_j t|^2 = 1,$$

т.е.

$$|t|^2 + |t|^2 \sum_{j=2}^n |b_j|^2 + \sum_{j=2}^n |c_j|^2 + t \sum_{j=2}^n b_j \bar{c}_j + \bar{t} \sum_{j=2}^n \bar{b}_j c_j = 1.$$

Отсюда следует, что на ∂D справедливо тождество

$$\bar{t} = \frac{1 - \sum_{j=2}^n |c_j|^2 - t \sum_{j=2}^n b_j \bar{c}_j}{t(1 + \sum_{j=2}^n |b_j|^2) + \sum_{j=2}^n \bar{b}_j c_j}.$$

Рассмотрим на ∂D функцию $f = |z_1|^2 P(z)$, где полином

$$P(z) = z_1 \left(1 + \sum_{j=2}^n |b_j|^2 \right) + \sum_{j=2}^n \bar{b}_j (z_j - b_j z_1) = z_1 + \sum_{j=2}^n \bar{b}_j z_j.$$

Тогда на семействе (2) (т.е. множествах $\partial D \cap l_{c,b}$, $c \in \mathbb{C}^{n-1}$) функция f равна

$$f = |t|^2 \left(t \left(1 + \sum_{j=2}^n |b_j|^2 \right) + \sum_{j=2}^n \bar{b}_j c_j \right) = t \left(1 - \sum_{j=2}^n |c_j|^2 - t \sum_{j=2}^n b_j \bar{c}_j \right).$$

Поэтому она голоморфно продолжается вдоль данного семейства комплексных прямых с кривых $\partial D \cap l_{c,b}$ в множества $D \cap l_{c,b}$.

С другой стороны, f не является CR -функцией на ∂D , так как не удовлетворяет касательным уравнениям Коши–Римана.

Если взять произвольное конечное множество точек $b^k = (b_2^k, \dots, b_n^k)$, $k = 1, \dots, m$, то в качестве функции f на ∂D можно взять функцию

$$f = |z_1|^2 \prod_{k=1}^m \left(z_1 \left(1 + \sum_{j=2}^n |b_j^k|^2 \right) + \sum_{j=2}^n \bar{b}_j^k (z_j - b_j^k z_1) \right).$$

Функция f так же не является CR -функцией на ∂D , но голоморфно продолжается во все пересечения $D \cap l_{c,b^k}$, $c \in \mathbb{C}^{n-1}$, $k = 1, \dots, m$.

Пучки прямых вида (2) определяют точку на бесконечной комплексной гиперплоскости $\Pi = \mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{C}^n$. Следовательно, простых аналогов теоремы Гартогса для данной задачи ожидать не приходится.

Чтобы получить пучки прямых, проходящие через конечные точки в $\mathbb{C}^n$, необходимо плоскость Π дробно-линейным преобразованием перевести в некоторую комплексную гиперплоскость L_0 в $\mathbb{C}^n$. При этом D перейдет в некоторую ограниченную

область D^* , функция f – в функцию f^* . Так как при дробно-линейном преобразовании комплексные прямые переходят в комплексные прямые, то мы получим нужный пример области, функции и конечного множества точек таких, что голоморфное продолжение функции f^* вдоль всех комплексных прямых, проходящих через данные точки, не влечет голоморфное продолжение f^* в D^* .

Поэтому можно ставить задачу о нахождении семейств многообразий (желательно наименьшей размерности) таких, чтобы множество комплексных прямых, пересекающих данные многообразия, было достаточным для голоморфного продолжения.

В данной работе рассматривается семейство комплексных прямых, проходящих через порождающее многообразие. Действительная размерность такого многообразия больше либо равна n .

Напомним, что гладкое (класса $\mathcal{C}^\infty$) многообразие Γ называется *порождающим*, если для каждой точки $z \in \Gamma$ комплексная линейная оболочка касательного пространства $T_z(\Gamma)$ совпадает с $\mathbb{C}^n$. Обозначим через $\mathfrak{L}_\Gamma$ семейство всех комплексных прямых, пересекающих Γ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть Γ – росток порождающего многообразия в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ и функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых из $\mathfrak{L}_\Gamma$. Тогда существует функция $F \in \mathcal{C}(\overline{D})$, голоморфная в D и совпадающая с функцией f на границе ∂D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим интеграл Бохнера–Мартинелли от функции f :

$$F(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z), \quad z \notin \partial D,$$

где $U(\zeta, z)$ – ядро Бохнера–Мартинелли, т.е.

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

и $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$, а $d\bar{\zeta}[k]$ получается из $d\bar{\zeta}$ вычеркиванием дифференциала $d\bar{\zeta}_k$.

ЛЕММА 1. Если для точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ и для почти всех комплексных прямых, проходящих через z , функция f обладает одномерным свойством голоморфного продолжения, то $F(z) = 0$ и все производные порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$\frac{\partial^\alpha F}{\partial z^\alpha}(z) = \frac{\partial^{\|\alpha\|} F}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}}(z) = 0,$$

где $\|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим комплексные прямые l вида (1), проходящие через z в направлении вектора $b \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$.

Известно представление ядра Бохнера–Мартинелли в координатах t и b (см., например, [4; гл. 3]):

$$U(\zeta, z) = \lambda(b) \wedge \frac{dt}{t},$$

где $\lambda(b)$ – некоторая дифференциальная форма типа $(n-1, n-1)$ в $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$, не зависящая от t .

$$\frac{\partial^\alpha F}{\partial z^\alpha}(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) \frac{\partial^\alpha U(\zeta, z)}{\partial z^\alpha} = (-1)^{\|\alpha\|} \int_{\partial D} f(\zeta) \frac{\partial^\alpha U(\zeta, z)}{\partial \zeta^\alpha}.$$
$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha U(\zeta, 0)}{\partial \zeta^\alpha} &= \frac{(n + \|\alpha\| - 1)!}{(2\pi i)^n} \cdot \frac{(-1)^{\|\alpha\|} \bar{\zeta}^\alpha \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \bar{\zeta}_k d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta}{|\zeta|^{2n+2\|\alpha\|}} \\ &= \frac{(n + \|\alpha\| - 1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(-1)^{\|\alpha\|} \bar{\zeta}^\alpha}{|\zeta|^{2\|\alpha\|}} U(\zeta, z) \\ &= \frac{(-1)^{\|\alpha\|+n-1} (n + \|\alpha\| - 1)!}{(2\pi i)^n} \\ &\quad \times \frac{\bar{b}^\alpha \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \bar{b}_k d\bar{b}[k] \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} b_k db[k]}{|b|^{2n+2\|\alpha\|}} \wedge \frac{dt}{t^{\|\alpha\|+1}} \\ &= \lambda_\alpha(b) \wedge \frac{dt}{t^{\|\alpha\|+1}}, \end{aligned}$$

Поскольку точка $z = 0$ лежит вне $\overline{D}$, то

$$\int_{\partial D \cap I} f(b_1 t, \dots, b_n t) \frac{dt}{t^{\|\alpha\|+1}} = 0,$$

$$\frac{\partial^\alpha F}{\partial z^\alpha}(0) = \int_{\mathbb{CP}^{n-1}} \lambda_\alpha(b) \int_{\partial D(b)} f(b_1 t, \dots, b_n t) \frac{dt}{t^{\|\alpha\|+1}} = 0.$$
$$F|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial^{\alpha} F}{\partial z^{\alpha}} \right|_{\Gamma} = 0 \quad \text{для всех мультииндексов } \alpha. \quad (3)$$
[illegible]

где $k + m = n$, $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, k$, $w_s = u_s + iv_s$, $s = 1, \dots, m$. Причем вещественнозначная вектор-функция $h = (h_1, \dots, h_m)$ класса $\mathcal{C}^\infty$ в окрестности W

точки 0 и выполнены условия

$$h_p(0) = 0, \quad \frac{\partial h_p}{\partial x_j}(0) = \frac{\partial h_p}{\partial y_j}(0) = \frac{\partial h_p}{\partial u_s}(0) = 0, \quad j, p = 1, \dots, m, \quad s = 1, \dots, k.$$

Поскольку при биголоморфном преобразовании производные по голоморфным переменным переходят в производные по голоморфным переменным, то условие (3) перепишется в виде

$$F|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial^{\alpha+\beta} F}{\partial z^{\alpha} \partial w^{\beta}} \right|_{\Gamma} = 0 \quad \text{для всех мультииндексов } \alpha, \beta. \quad (5)$$

ЛЕММА 2. Если вещественно аналитическая функция F , заданная в окрестности W множества Γ , удовлетворяет условиям (5), то она равна нулю в W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что все коэффициенты разложения функции F в ряд Тейлора в окрестности нуля равны нулю.

Обозначим частные производные функции $F(z, u + ih(z, u))$ по переменным x_j, y_j, u_s через $D_{x_j}, D_{y_j}, D_{u_s}$, $j = 1, \dots, k, s = 1, \dots, m$.

Так как

$$0 = D_{x_j} F = \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^m \frac{\partial F}{\partial v_l} \cdot \frac{\partial h_l}{\partial x_j} \quad \text{и} \quad \frac{\partial h_l}{\partial x_j}(0) = 0,$$

то $\partial F / \partial x_j(0) = 0$. Аналогично, имеем $\partial F / \partial y_j(0) = 0, \partial F / \partial u_s(0) = 0, j = 1, \dots, k, s = 1, \dots, m$.

Поскольку

$$0 = \left. \frac{\partial F}{\partial w_s} \right|_{\Gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial u_s} - i \frac{\partial F}{\partial v_s} \right) \Big|_{\Gamma} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial u_s}(0) = 0,$$

то $\partial F / \partial v_s(0) = 0, s = 1, \dots, m$. Так что все первые производные функции F в точке 0 равны нулю.

Покажем, что все вторые производные в нуле также равны нулю. Имеем

$$\begin{aligned} 0 = D_{x_j x_l}^2 F &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_l} + \sum_{p=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial v_p} \cdot \frac{\partial h_p}{\partial x_l} \\ &+ \sum_{p=1}^m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v_p \partial x_l} \cdot \frac{\partial h_p}{\partial x_j} + \sum_{q=1}^m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v_p \partial v_q} \cdot \frac{\partial h_p}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial h_q}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial F}{\partial v_p} \cdot \frac{\partial^2 h_p}{\partial x_j \partial x_l} \right). \end{aligned}$$

Так как $\partial h_p / \partial x_l(0) = 0, \partial F / \partial v_p(0) = 0$, то $(\partial^2 F / \partial x_j \partial x_l)(0) = 0$. Аналогично, все вторые производные функции F по переменным x_j, y_j, u_s равны нулю в точке 0.

Рассмотрим

$$0 = D_{x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial w_s} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial w_s \partial x_j} + \sum_{p=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial w_s \partial v_p} \cdot \frac{\partial h_p}{\partial x_j}.$$

Поскольку $\partial h_p / \partial x_j(0) = 0$, то $(\partial^2 F / \partial w_s \partial x_j)(0) = 0$. Так как

$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial w_s \partial x_j}(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_s \partial x_j}(0) - i \frac{\partial^2 F}{\partial v_s \partial x_j}(0) \right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u_s \partial x_j}(0) = 0,$$

то $(\partial^2 F / \partial v_s \partial x_j)(0) = 0$. Аналогично, $(\partial^2 F / \partial v_s \partial y_j)(0) = 0, (\partial^2 F / \partial v_s \partial u_l)(0) = 0$.

Далее,

$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial w_l \partial w_s} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_l \partial u_s} - i \frac{\partial^2 F}{\partial u_l \partial v_s} - i \frac{\partial^2 F}{\partial v_l \partial u_s} - \frac{\partial^2 F}{\partial v_l \partial v_s} \right),$$

поэтому $(\partial^2 F / \partial v_l \partial v_s)(0) = 0$.

Применяя индукцию, точно так же показывается, что все старшие производные функции F в точке 0 равны нулю. Тем самым, ряд Тейлора в точке 0 функции F равен нулю, поэтому сама функция равна нулю в W .

Закончим доказательство теоремы. Мы показали, что интеграл Бохнера–Мартинелли равен нулю в окрестности W . Так как он представляет собой вещественно аналитическую функцию, а дополнение $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ связно, то $F(z) \equiv 0$ в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. Применяя теорему о голоморфности функций, представимых интегралом Бохнера–Мартинелли (теорема 15.4 из [4]), получаем, что функция F голоморфна в D и ее граничные значения совпадают с f на ∂D .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Л. Аграновский, Р. Е. Вальский, “Максимальность инвариантных алгебр функций”, *Сиб. матем. журн.*, **12:1** (1971), 3–12.
- [2] E. L. Stout, “The boundary values of holomorphic functions of several complex variables”, *Duke Math. J.*, **44:1** (1977), 105–108.
- [3] Л. А. Айзенберг, А. П. Южаков, *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе*, Наука, Новосибирск, 1979.
- [4] А. М. Кытманов, *Интеграл Бохнера–Мартинелли и его применения*, Наука, Новосибирск, 1992.
- [5] А. М. Кытманов, С. Г. Мысливец, “Об одном граничном аналоге теоремы Морера”, *Сиб. матем. журн.*, **36:6** (1995), 1350–1353.
- [6] A. M. Kytmanov, S. G. Myslivets, “On an application of the Bochner–Martinelli operator”, *Operator Theory for Complex and Hypercomplex Analysis* (Mexico City, 1994), Contemp. Math., **212**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 133–136.
- [7] A. M. Kytmanov, S. G. Myslivets, “Higher-dimensional boundary analogs of the Morera theorem in problems of analytic continuation of functions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **120:6** (2004), 1842–1867.
- [8] М. Л. Аграновский, А. М. Семенов, “Граничные аналоги теоремы Гартогса”, *Сиб. матем. журн.*, **32:1** (1991), 168–170.
- [9] J. Globevnik, E. L. Stout, “Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables”, *Duke Math. J.*, **64:3** (1991), 571–615.
- [10] M. S. Baouendi, P. Ebenfelt, L. P. Rothschild, *Real Submanifolds in Complex Space and Their Mappings*, Princeton Math. Ser., **47**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1999.

А. М. Кытманов

Красноярский государственный университет

E-mail: kytmanov@lan.krasu.ru

Поступило

03.07.2006

Исправленный вариант

26.03.2007

С. Г. Мысливец

Красноярский государственный университет

E-mail: simona@lan.krasu.ru