Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Христофоров, Об асимптотических свойствах интерполяционных многочленов, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 1, 129–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3771>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 18:28:53

Об асимптотических свойствах интерполяционных многочленов

Д. В. Христофоров

В работе изучаются асимптотические свойства многочленов $P_n(z) = P_n(z; f)$, соответствующих интерполяционной таблице $\alpha \subset E$, где E – ограниченный континуум в комплексной плоскости со связным дополнением, таблица α удовлетворяет условию Какехаши, а f – произвольная функция, голоморфная на E . В частности, для нулей таких многочленов получено обобщение классической теоремы Йенча–Сегё о распределении нулей частичных сумм рядов Тейлора.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Пусть в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ задан произвольный ограниченный континуум E со связным дополнением, не вырождающийся в точку; без ограничения общности будем считать, что $\text{cap } E = 1$. Пусть $w = \Phi(z)$ – конформное отображение внешности $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ континуума E на внешность единичного круга $\{w : |w| > 1\}$, нормированное условиями:

$$\Phi(\infty) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{z} = 1.$$

Через U_R , $R > 1$, будем обозначать внутренность линии уровня $\Gamma_R := \{z \in \mathbb{C} : |\Phi(z)| = R\}$; такие области U_R будем называть *каноническими* (относительно E).

Зададим на E интерполяционную таблицу $\alpha = \{\alpha_{j,n}, j = 1, \dots, n, n = 1, \dots\} \subset E$ и положим

$$\omega_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - \alpha_{j,n}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Наложим на таблицу α следующее ограничение (*условие Какехаши*), которое будем предполагать выполненным всюду в дальнейшем (символом “ $\Rightarrow$ ” обозначается локально равномерная сходимость в соответствующей области):

$$\frac{\omega_n(z)}{\Phi^n(z)} \Rightarrow D(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E, \quad (1.2)$$

где $D(z)$ – некоторая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$D \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus E), \quad D(\infty) = 1, \quad D(z) \neq 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00522) и Программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-4466.2006.1).

© Д. В. Христофоров, 2008

Зафиксируем произвольную функцию $f \in H(E)$. Нетрудно видеть, что существует последовательность многочленов $\{P_n\}_{n=1}^\infty$, $\deg P_n \leq n$, удовлетворяющая для каждого номера n условию

$$\frac{f - P_n}{\omega_{n+1}} \in H(E). \quad (1.3)$$

Условие (1.3) означает, что многочлены P_n интерполируют функцию f в узлах таблицы α .

Впервые поведение интерполяционных многочленов P_n при условии (1.2) было исследовано Какехаши (см. [1], [2]), который получил следующую формулу *слабой асимптотики*:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |P_n(z)|^{1/n} = \frac{|\Phi(z)|}{R_0} > 1, \quad z : |\Phi(z)| > R_0, \quad (1.4)$$

где “радиус” $R_0 = R_0(f)$ соответствует максимальной канонической области $U := U_{R_0}$, в которую голоморфно продолжается функция f . Из асимптотической формулы (1.4) вытекает расходимость интерполяционного процесса вне области U . Отметим, что соответствующий вопрос был изначально поставлен Сегё [3] для случая интерполяции в нулях полиномов, ортогональных на отрезке $E = [-1, 1]$. Как хорошо известно, внутри области U интерполяционный процесс сходится даже при более слабом чем (1.2) условии Уолша (см. [4], [5]):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\omega_n(z)|^{1/n} = |\Phi(z)|, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E. \quad (1.5)$$

Основной результат настоящей работы – формула (3.1) *сильной асимптотики* для многочленов $P_n(z) = P_n(z; f)$ (см. §3, теорема 2), обобщающая результат Какехаши (1.4). Формулы такого типа могут оказаться в дальнейшем полезными при решении обратных задач в теории сходимости многоточечных аппроксимаций Паде (см. прежде всего [6]–[9], а также [10]).

В п. 4 в качестве следствия из теоремы 2 получено утверждение о предельном распределении нулей интерполяционных полиномов P_n , обобщающее классический результат Йенча–Сегё [11], [12] о распределении нулей частичных сумм ряда Тейлора.

Кроме того, для полноты изложения в п. 2 приведено доказательство неопубликованного результата Гончара (см. [13; § 2]), обобщающего классическую формулу Коши–Адамара для вычисления радиуса $R_0(f)$ на случай произвольного континуума E и интерполяционной таблицы α , удовлетворяющей условию Какехаши (1.2). Заметим, что условие (1.2) играет ключевую роль в доказательстве этого результата: существует контрпример, приведенный Буслаевым [13], который показывает, что при условии Уолша (1.5) обобщенная формула Коши–Адамара (2.1), вообще говоря, неверна.

2. Обобщенная формула Коши–Адамара. В дальнейших рассуждениях нам понадобится следующая лемма о регуляризации числовой последовательности, доказанная Какехаши (см. [1]).

ЛЕММА КАКЕХАШИ. *Для любой последовательности комплексных чисел $\{c_n\}$ таких, что*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = c, \quad 0 < c < +\infty,$$

существует последовательность положительных чисел $\{c_n^*\}$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $c_n^* = \lambda_n c^n$, где $\{\lambda_n\}$ – последовательность монотонных положительных чисел таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1}/\lambda_n) = 1$;
- 2) $c_n^* \geq |c_n|$, $n \in \mathbb{N}$, и $c_n^* = |c_n|$ по некоторой подпоследовательности $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$.

Последовательность $\{c_n^*\}$ будем называть *регуляризацией Какешаши* последовательности $\{c_n\}$.

Следующая теорема представляет собой обобщение классической формулы Коши–Адамара о радиусе сходимости степенного ряда. Она позволяет вычислять радиус $R_0(f)$, фигурирующий в теореме 2 о сильной асимптотике (см. п. 3) и в следствии о распределении нулей интерполяционных многочленов (см. п. 4, теорема 3).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in H(E)$, $R_0 = R_0(f)$. Тогда R_0 вычисляется по формуле

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{\omega_{n+1}(t)} dt \right|^{1/n} = \frac{1}{R_0}, \quad (2.1)$$

где γ – произвольный контур, охватывающий E и лежащий в области голоморфности функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$I_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{\omega_{n+1}(t)} dt.$$

Нетрудно показать, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |I_n|^{1/n} \leq \frac{1}{R_0}. \quad (2.2)$$

Действительно, возьмем в качестве γ линию уровня $|\Phi(z)| = R$, $1 < R < R_0$, и оценим подынтегральную функцию, используя условие (1.2). Имеем

$$|I_n| \leq \frac{c}{R^n},$$

где c – некоторая положительная константа, не зависящая от радиуса R . Отсюда в силу произвольности выбора $R < R_0$ и следует (2.2).

Докажем обратное неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |I_n|^{1/n} \geq \frac{1}{R_0}. \quad (2.3)$$

Пусть $z = \Psi(w)$ – конформное отображение, обратное отображению $w = \Phi(z)$. Рассмотрим функцию¹ $F(w) := [f(\Psi(w))D^{-1}(\Psi(w))]\Psi'(w)$, голоморфную в кольце $\{w : 1 < |w| < R_0\}$. В нем верно представление Лорана

$$F(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^n, \quad 1 < |w| < R_0. \quad (2.4)$$

¹В дальнейшем через $D^{-1}(\cdot)$ мы обозначаем функцию $1/D(\cdot)$.

При этом

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R_0}. \quad (2.5)$$

Рассмотрим правильную часть ряда (2.4)

$$F^+(w) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \quad |w| < R_0. \quad (2.6)$$

Обозначим частичные суммы ряда (2.6) через $S_n(w)$. Тогда, учитывая условие (1.2) и поведение $\Psi(w)$ в бесконечности, можно написать цепочку равенств

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)D^{-1}(t)\Psi'(\Phi(t))}{\omega_{n+1}(t)D^{-1}(t)\Psi'(\Phi(t))} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi(\gamma)} \frac{F(w)}{\omega_{n+1}(\Psi(w))D^{-1}(\Psi(w))} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi(\gamma)} \frac{F^+(w) - S_{n-1}(w)}{\omega_{n+1}(\Psi(w))D^{-1}(\Psi(w))} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi(\gamma)} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} w^{n+k}}{w^{n+1}} (1 + \varepsilon_n(w)) dw, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_n(w) \Rightarrow 0$, $|w| > 1$.

Пусть $\{a_n^*\}$ – регуляризация Какехашии последовательности $\{a_n\}$, $a_n^* = |a_n|$, $n \in \Lambda = \Lambda(f)$. Будем рассматривать с этого момента только $n \in \Lambda$. Имеем

$$\frac{I_n}{a_n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Phi(\gamma)} \left[\frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} w^{n+k}}{a_n w^{n+1}} \right] (1 + \varepsilon_n(w)) dw. \quad (2.7)$$

Возьмем в качестве пути интегрирования окружность $|w| = r$, $r \in (1, R_0)$, и покажем, что подынтегральная функция в квадратных скобках $[\cdot]$ в (2.7) на ней ограничена. Действительно,

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} w^{n+k}}{a_n w^{n+1}} \right| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{n+k}^*}{a_n^*} r^k = C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_{n+k}}{\lambda_n} \left(\frac{r}{R_0} \right)^k, \quad (2.8)$$

здесь C – некоторая константа, не зависящая от номеров n и k . Из свойств последовательности $\{\lambda_n\}$ следует, что для любого произвольно малого $\varepsilon > 0$ для достаточно больших номеров n выполняется неравенство $\lambda_{n+k}/\lambda_n \leq (1 + \varepsilon)^k$. Подбираем ε так, чтобы $r(1 + \varepsilon) < R_0$ и получаем с учетом (2.8) требуемую ограниченность. Это означает, что в интеграле (2.7) слагаемое, связанное с $\varepsilon_n(w)$, равномерно сходится к нулю.

Имеем

$$\frac{I_n}{a_n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} w^{n+k}}{a_n w^{n+1}} dw + o(1) = 1 + o(1),$$

откуда

$$|I_n|^{1/n} \rightarrow \frac{1}{R_0}, \quad n \in \Lambda.$$

Тем самым, (2.3) доказано. В совокупности с (2.2) получаем утверждение теоремы 1.

В качестве *замечания* отметим, что $I_n = A_n$, где A_n – старший коэффициент полинома $P_n(z)$. Действительно,

$$\int_{\gamma} \frac{f(t) - P_n(t)}{w_{n+1}(t)} dt = 0,$$

откуда

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P_n(t) dt}{w_{n+1}(t)} = A_n.$$

Отсюда и из доказательства теоремы следует, что $\deg P_n(z) = n$ и $A_n/a_n \rightarrow 1$, $|A_n|^{1/n} \rightarrow 1/R_0$ при $n \in \Lambda$, $n \rightarrow \infty$.

3. Сильная асимптотика интерполяционных многочленов.

ТЕОРЕМА 2 (о сильной асимптотике). Пусть $f \in H(E)$, $R_0 = R_0(f)$, $P_n = P_n(z; f)$. Тогда существуют подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(f) \subseteq \mathbb{N}$ и функция $G(z) = G(z; f, \Lambda)$, голоморфная в области $|\Phi(z)| > R_0$, не обращающаяся в тождественный нуль, $G(\infty) = 1$, такие, что $\deg P_n(z) = n$ при $n \in \Lambda$ и

$$\frac{P_n(z)}{A_n \Phi^n(z)} \Rightarrow G(z), \quad n \in \Lambda, \quad |\Phi(z)| > R_0, \quad (3.1)$$

где A_n – старший коэффициент полинома $P_n(z)$ и $|A_n|^{1/n} \rightarrow 1/R_0$, $n \in \Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем пользоваться интерполяционной формулой Эрмита

$$f(z) - P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t - z} \frac{\omega_{n+1}(z)}{\omega_{n+1}(t)} dt, \quad (3.2)$$

где контур Γ есть линия уровня $\Gamma = \{z : |\Phi(z)| = R\}$, $1 < R < R_0$. Формула верна для области U_R .

Как и в теореме 1, рассмотрим в плоскости переменного $w = \Phi(z)$ функцию $F(w) := [f(\Psi(w))D^{-1}(\Psi(w))]\Psi'(w)$, голоморфную в кольце $\{w : 1 < |w| < R_0\}$. Частичные суммы соответствующего функции $F^+(w)$ ряда

$$F^+(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \quad |w| < R_0,$$

обозначим через $S_n(w)$. Введем также обозначения $\tilde{S}_n(z) = S_n(\Phi(z))$, $\tilde{F}(z) = F^+(\Phi(z))$.

Учитывая поведение подынтегральных функций в бесконечности, перепишем (3.2) в виде

$$f(z) - P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{F}(t)\Phi'(t)}{t - z} \frac{\omega_{n+1}(z)}{\omega_{n+1}(t)D^{-1}(t)} dt, \quad z \in U_R. \quad (3.3)$$

Функция $F^+(w)$ голоморфна в круге $|w| < R_0$. Пользуясь теорией вычетов, можно написать следующее представление:

$$\frac{F^+(w) - S_n(w)}{\Psi'(w)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{F^+(t) - S_n(t)}{\Psi(t) - \Psi(w)} \frac{w^{n+1}}{t^{n+1}} dt, \quad (3.4)$$

где контур $\tilde{\Gamma}$ есть объединение двух окружностей $\tilde{\Gamma} = \{t : |t| = \rho\}^- \cup \{t : |t| = R\}$, $1 < \rho < R < R_0$, внутренняя окружность проходится в отрицательном направлении. Равенство (3.4) верно для кольца $\rho < |w| < R$.

Возвращаясь в плоскость переменного z и учитывая поведение подынтегральных функций в бесконечности, получаем

$$\begin{aligned} \Phi'(z)[\tilde{F}(z) - \tilde{S}_n(z)] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{F}(t)\Phi'(t)}{t-z} \frac{\Phi^{n+1}(z)}{\Phi^{n+1}(t)} dt \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{[\tilde{F}(t) - \tilde{S}_n(t)]\Phi'(t)}{t-z} \frac{\Phi^{n+1}(z)}{\Phi^{n+1}(t)} dt, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где контур Γ' есть линия уровня $\Gamma' = \{z : |\Phi(z)| = \rho\}$, $1 < \rho < R$. Формула верна для области $\{z : \rho < |\Phi(z)| < R\}$.

Пусть $\{a_n^*\}$ – регуляризация Какехаши последовательности $\{a_n\}$, $a_n^* = |a_n| = \lambda_n/R_0^n$, $n \in \Lambda$. Обозначим второй интеграл в (3.5) через $J_n(z)$ и перепишем его в виде

$$J_n(z) = a_n \Phi^n(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} \Phi^{n+k}(t)}{t-z} \frac{\Phi'(t)\Phi(z)}{a_n \Phi^{n+1}(t)} dt, \quad n \in \Lambda, \quad |\Phi(z)| > \rho. \quad (3.6)$$

Проводя выкладки, аналогичные (2.8), нетрудно показать, что подынтегральная функция в (3.6) равномерно ограничена на компактах в плоскости переменного z при $|\Phi(z)| > \rho$, $t \in \Gamma'$, $n \in \Lambda$. Представление (3.6) переписывается в виде

$$J_n(z) = a_n \Phi^n(z) g_n(z), \quad n \in \Lambda, \quad |\Phi(z)| > \rho, \quad (3.7)$$

где $\{g_n(z)\}$ – семейство голоморфных и равномерно ограниченных при рассматриваемых условиях функций.

Комбинирование формул (3.3), (3.5) и (3.7) дает соотношение

$$\begin{aligned} P_n(z) - \tilde{S}_n(z)D(z)\Phi'(z) &= \left(\frac{f(z)}{[D(z)\Phi'(z)]} \right)^- \Phi'(z)D(z) + a_n \Phi^n(z)D(z)g_n(z) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{F}(t)\Phi'(t)}{t-z} \left[\frac{\Phi^{n+1}(z)D(z)}{\Phi^{n+1}(t)} - \frac{\omega_{n+1}(z)}{\omega_{n+1}(t)D^{-1}(t)} \right] dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Обозначим $A(z) := (f(z)/[D(z)\Phi'(z)])^- \Phi'(z)D(z)$. Заметим, что функция $A(z)$, и левая часть равенства (3.8) голоморфны вне компакта E и ядро интеграла в правой части (3.8) голоморфно по t и по z вне компакта E . Функция $a_n \Phi^n(z)D(z)g_n(z)$ голоморфна при условии $|\Phi(z)| > \rho$. Отсюда следует, что формула (3.8) верна для любых $z \in \{z : |\Phi(z)| > \rho\}$. Рассмотрим интеграл в правой части (3.8) и применим к нему условие Какехаши (1.2). Получим

$$I_n(z) := \frac{D(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{F}(t)}{t-z} \frac{\Phi^{n+1}(z)}{\Phi^{n+1}(t)} \varepsilon_n(t, z) dt, \quad \varepsilon_n(t, z) \rightrightarrows 0, \quad t \in \Gamma, \quad |\Phi(z)| > \rho.$$

Перепишем $I_n(z)$ при $|\Phi(z)| > \rho$ и $n \in \Lambda$ в виде

$$I_n(z) = a_n \Phi^n(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} \Phi^{n+k}(t)D(z)}{t-z} \frac{\Phi(z)}{a_n \Phi^{n+1}(t)} \right] \varepsilon_n(t, z) dt. \quad (3.9)$$

Аналогично рассуждениям для (3.6) имеем, что функция в квадратный скобках $[\cdot]$ в (3.9) равномерно ограничена на компактах в плоскости переменного z при условиях $|\Phi(z)| > R$, $t \in \Gamma$. Так как радиус R произвольно близок к ρ , отсюда и из (3.9) получаем

$$I_n(z) = a_n \Phi^n(z) \tilde{\delta}_n(z), \quad \tilde{\delta}_n(z) \rightrightarrows 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \Lambda, \quad |\Phi(z)| > \rho.$$

Таким образом, (3.8) переписывается в виде

$$P_n(z) - \tilde{S}_n(z)D(z) = A(z) + a_n \Phi^n(z)(\tilde{\delta}_n(z) + D(z)g_n(z)),$$

где $\tilde{\delta}_n(z) \rightrightarrows 0$, $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$, $|\Phi(z)| > \rho$. Вне максимальной канонической области голоморфности $U = \{z : |\Phi(z)| < R_0\}$ функции f имеем

$$P_n(z) - \tilde{S}_n(z)D(z) = a_n \Phi^n(z)(\delta_n(z) + D(z)g_n(z)), \quad (3.10)$$

$\delta_n(z) \rightrightarrows 0$, $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$, $z \in \mathbb{C} \setminus U$.

Пусть $t_n(z) = \tilde{S}_n(z)/(a_n \Phi^n(z))$. Учитывая свойства регуляризации Какехаши (см. п. 2), несложно показать, что семейство $\{t_n(z)\}$ для номеров $n \in \Lambda$ и при условии $|\Phi(z)| > R_0$ является ограниченным семейством функций. Тогда из (3.10) следует

$$P_n(z) = a_n \Phi^n(z)h_n(z), \quad n \in \Lambda, \quad z \in \mathbb{C} \setminus U, \quad (3.11)$$

где $h_n(z) = \delta_n(z) + D(z)t_n(z) + D(z)g_n(z)$, $\{h_n(z)\}$ – семейство голоморфных и равномерно ограниченных при рассматриваемых условиях функций.

Из критерия Монтеля следует, что

$$h_n(z) \rightrightarrows G(z), \quad n \in \Lambda' \subseteq \Lambda, \quad z \in \mathbb{C} \setminus U, \quad (3.12)$$

где $G(z)$ – некоторая функция, голоморфная в области $\mathbb{C} \setminus U$. Объединяя (3.11) и (3.12), получаем

$$\frac{P_n(z)}{a_n \Phi^n(z)} \rightrightarrows G(z), \quad n \in \Lambda', \quad |\Phi(z)| > R_0. \quad (3.13)$$

Так как рассматриваемые здесь последовательность a_n и подпоследовательность Λ те же, что и в теореме 1, справедливы утверждения замечания в конце п. 2. Объединяя их с (3.13), получаем требуемую асимптотику и утверждения $G(\infty) = 1$, $\deg P_n(z) = n$ и $|A_n|^{1/n} \rightarrow 1/R_0$ при $n \in \Lambda$.

Теорема 2 доказана.

4. Распределение нулей интерполяционных многочленов. Как следствие теоремы 2 мы получим результат, аналогичный следующему утверждению, доказанному Сегё (см. [12]).

ТЕОРЕМА СЕГЁ. Пусть функция f задана степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

с радиусом сходимости $R \in (0, \infty)$. Обозначим через $\mu(S_n) = \mu_n$ меру, считающую

нули соответствующих полиномов Тейлора $S_n = S_n(z; f)$:

$$\mu_n(z) = \sum_{j=0}^{n'} \delta(z - z_{j,n}),$$

$z_{j,n}$ – корни полиномов S_n , $n' = \deg S_n$, $n' \leq n$. Тогда по некоторой подпоследовательности $\Lambda = \Lambda(f) \subseteq \mathbb{N}$ существует слабый предел

$$\frac{1}{n} \mu_n \xrightarrow{*} \lambda,$$

где λ – равновесная мера окружности $|z| = R$: $d\lambda = (1/2\pi) d\theta$.

Теорема Сегё является обобщением теоремы Йенча (см. [11]), утверждающей при тех же условиях, что нули полиномов S_n всюду плотны на окружности $|z| = R$.

Сформулируем и докажем аналогичный утверждению теоремы Сегё факт о распределении нулей интерполяционных многочленов P_n .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in H(E)$. Тогда по некоторой подпоследовательности $\Lambda' = \Lambda'(f) \subseteq \mathbb{N}$ существует слабый предел мер, считающих нули многочленов P_n :

$$\frac{1}{n} \mu(P_n) \xrightarrow{*} \lambda_\Gamma,$$

где λ_Γ – равновесная мера компакта $\Gamma = \{z : |\Phi(z)| = R_0\}$.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится следующая лемма из теории потенциала (см. [14]).

ЛЕММА КАРЛЕСОНА. Пусть μ_1 и μ_2 – меры с носителями на границе ∂K ограниченного континуума K со связным дополнением. Пусть в области $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ их логарифмические потенциалы совпадают: $V^{\mu_1}(z) = V^{\mu_2}(z)$. Тогда сами меры равны: $\mu_1 = \mu_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из теоремы 2 и замечания в конце п. 1 о сходимости интерполяционного процесса внутри области голоморфности U функции f имеем

$$\frac{P_n(z)}{a_n \Phi^n(z)} = G(z) + o(1), \quad n \in \Lambda, \quad |\Phi(z)| > R_0, \quad (4.1)$$

$$P_n(z) \rightrightarrows f(z), \quad n \rightarrow \infty, \quad |\Phi(z)| < R_0. \quad (4.2)$$

Так как $G(\infty) \neq 0$ в соотношении (4.1), все нули функции $G(z)$ ограничены. Следовательно, для достаточно больших номеров n все нули многочленов $P_n(z)$ также ограничены и $\deg P_n = n$. Тогда для всех номеров $n \geq n_0$, $n \in \Lambda$, меры $(1/n)\mu(P_n)$ суть единичные меры, носители которых принадлежат некоторому компакт в $\mathbb{C}$. Значит, из этой последовательности мер можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность

$$\frac{1}{n} \mu(P_n) \xrightarrow{*} \mu^*, \quad n \in \Lambda'.$$

Докажем, что μ^* совпадает с равновесной мерой λ_Γ .

Фиксируем произвольно малое $\delta > 0$. В силу соотношений (4.1) и (4.2) вне кольца $R_0 - \delta \leq |\Phi(z)| \leq R_0 + \delta$ начиная с некоторого $n(\delta)$ имеется лишь конечное число нулей многочленов $P_n(z)$. Следовательно, мера μ^* сосредоточена в рассматриваемом кольце. В силу произвольности δ получаем, что $\text{supp } \mu^* \subseteq \Gamma$.

Введем обозначения $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}$, $\mu_n := (1/n)\mu(P_n)$. Имеет место сходимость $V^{\mu_n}(z) \rightarrow V^{\mu^*}(z)$ для любых z из области Ω . Это следует из слабой сходимости мер и из того, что носители мер μ_n стягиваются к Γ , а потенциал – непрерывная функция вне носителя меры.

Рассмотрим $z \in \Omega$ такие, что $G(z) \neq 0$. Из (4.1) следует

$$\ln |P_n(z)| - n \ln |a_n|^{1/n} - n \ln |\Phi(z)| = \ln |G(z) + o(1)|, \quad n \in \Lambda', \quad z \in \Omega,$$

откуда

$$\frac{1}{n} \ln |P_n(z)| \rightarrow \ln |\Phi(z)| + \ln \frac{1}{R_0}, \quad n \in \Lambda', \quad z \in \Omega, \quad G(z) \neq 0. \quad (4.3)$$

Функция $G(z)$ имеет не более чем счетное число нулей, потенциал $V^{\mu^*}(z)$ непрерывен в области Ω ; следовательно, соотношение (4.3) верно и для точек z , в которых $G(z) = 0$. С другой стороны имеем, что для $z \in \Omega$ функция

$$-\ln |\Phi(z)| - \ln \frac{1}{R_0}$$

– потенциал равновесной меры λ_Γ и

$$V^{\mu_n}(z) = -\frac{1}{n} \ln |P_n(z)|.$$

Следовательно, потенциалы μ^* и λ_Γ совпадают. Осталось воспользоваться леммой Карлесона.

Теорема 3 доказана.

В заключение автор выражает благодарность А.И. Аптекареву и С.П. Суетину за постановку задачи и внимание к работе, а рецензенту за сделанные замечания, способствовавшие улучшению текста статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Т. Takehashi, “The decomposition of coefficients of power-series and the divergence of interpolation polynomials”, *Proc. Japan Acad.*, **31**:8 (1955), 517–523.
- [2] Т. Takehashi, “On interpolation of analytic functions. II. Fundamental results”, *Proc. Japan Acad.*, **32** (1956), 713–718.
- [3] G. Szegő, “Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören”, *Math. Z.*, **9**:3–4 (1921), 218–270.
- [4] Дж. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*, ИЛ, М., 1961.
- [5] В.И. Смирнов, Н.А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1964.
- [6] А.А. Гончар, “Полюсы строк таблицы Паде и мероморфное продолжение функций”, *Матем. сб.*, **115**:4 (1981), 590–613.

- [7] С. П. Суетин, “О полосах m -й строки таблицы Паде”, *Матем. сб.*, **120**:4 (1983), 500–504.
- [8] Ле Ба Кхань Чинь, “Обратные теоремы для многоточечных аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **181**:10 (1990), 1306–1319.
- [9] В. И. Буслаев, “Соотношения для коэффициентов и особые точки функции”, *Матем. сб.*, **131**:3 (1986), 357–384.
- [10] Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде*, Мир, М., 1986.
- [11] R. Jentzsch, “Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen”, *Acta Math.*, **41**:1 (1916), 219–251.
- [12] G. Szegő, “Über die Nullstellen von Polynomen, die in einem Kreise gleichmassig konvergieren”, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.*, **21** (1922), 59–64.
- [13] В. И. Буслаев, “О теореме Фабри об отношении для ортогональных рядов”, *Комплексный анализ и приложения: Сборник статей*, Тр. МИАН, **253**, 2006, 14–29.
- [14] L. Carleson, “Mergelyan’s theorem on uniform polynomial approximation”, *Math. Scand.*, **15** (1964), 167–175.

Д. В. Христофоров

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: kd@ru.ru

Поступило

09.04.2007