Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Х. Муртазин, А. Н. Галимов, Спектр и рассеяние для оператора Шрёдингера в магнитном поле, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 3, 402–416

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3773>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:40:35

Спектр и рассеяние для оператора Шрёдингера в магнитном поле

Х. Х. Муртазин, А. Н. Галимов

Основным результатом данной работы является доказательство отсутствия ненулевых вещественных особенностей решения задачи теории рассеяния оператора Шрёдингера с магнитным и электрическим потенциалами.

Библиография: 7 названий.

В пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ изучается спектр и задача рассеяния для оператора Шрёдингера

$$H(a, V) = \sum_{k=1}^3 (p_k + a_k)^2 + V(x),$$

где $p_k = i^{-1}\partial/\partial x_k$, $a(x) = (a_1(x), a_2(x), a_3(x))$ и $V(x)$ – магнитный и электрический потенциалы соответственно, удовлетворяющие некоторым условиям убывания на бесконечности. Доказано отсутствие вещественных ненулевых особенностей решения задачи теории рассеяния $\varphi(x, \lambda, \omega)$.

Разложения по собственным функциям оператора $-\Delta + V(x)$, где Δ – лапласиан в $\mathbb{R}^3$, $V(x)$ – вещественная достаточно быстро убывающая на бесконечности функция, впервые изучил Повзнер в работе [1]. Связь этих разложений с теорией рассеяния установлена им же в работе [2]. Затем этой теме было посвящено большое количество работ Икэбе, Фаддева, Эйдуca и других авторов (с достаточно полной библиографией можно ознакомиться в [3; с. 367–370]). Итоги этих исследований подведены в теореме XI.41 [3]. В этой теореме, в частности, утверждается, что в классе потенциалов Рольника

$$|x - y|^{-2}V(x)V(y) \in L(\mathbb{R}^6), \quad V \in L(\mathbb{R}^3), \quad (1)$$

множество $\mathcal{E}$ (см. определение ниже) особенностей решения $\varphi(x, \lambda, \omega)$ уравнения Липпмана–Швингера

$$\varphi(x, \lambda, \omega) + \int_{\mathbb{R}^3} (4\pi|x - y|)^{-1} e^{i\lambda|x - y|} V(y) \varphi(y, \lambda, \omega) dy = e^{i\lambda(x, \omega)} \quad (2)$$

ограничено, замкнуто и имеет лебегову меру нуль. Далее в работе [4] (теорема 2.5, с. 51) было доказано, что в классе вещественных потенциалов (1) множество $\mathcal{E}$ на самом деле конечно и если $\lambda \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$, то λ^2 – собственное значение оператора Шрёдингера конечной кратности. Кроме того, в работе [4] (см. теорему 2.5, с. 53)

для этого класса потенциалов установлено, что при каждом $\delta > 0$ для $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$\sup_{|\lambda| > \delta, \lambda \notin \mathcal{E}} \int_{\mathbb{R}^3} |V(x)| |\varphi(x, \lambda, \omega)|^2 dx < \infty, \quad (3)$$

где $\omega \in S^2$.

В настоящей работе мы изучаем в $L^2(\mathbb{R}^3)$ спектр и задачу рассеяния для оператора Шрёдингера

$$H(a, V) = \sum_{k=1}^3 (p_k + a_k)^2 + V(x),$$

где $p_k = i^{-1} \partial / \partial x_k$, $a(x) = (a_1(x), a_2(x), a_3(x))$ и $V(x)$ – соответственно магнитный и электрический потенциалы, причем $a_k(x)$, $k = 1, 2, 3$, и $V(x)$ – вещественные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) имеем

$$\Phi(x) = a^2(x) + V(x) + i \operatorname{div} a(x) \in L(\mathbb{R}^3),$$

где $a^2(x) = \sum_{k=1}^3 a_k^2(x)$; для всех $k = 1, 2, 3$ $a_k(x) \in W_{1, \text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ и при некотором $\epsilon \in (0, 1)$ $(1 + |x|)^{-1+\epsilon} a^2(x) \in L(\mathbb{R}^3)$.

(ii) для всех $\delta > 0$ функции

$$f_\delta(x) = \int_{|x-y| \leq \delta} |\Phi(y)| |x-y|^{-1} dy, \quad g_\delta(x) = \int_{|x-y| \leq \delta} |a(y)| |x-y|^{-2} dy$$

ограничены в $\mathbb{R}^3$, причем

$$\lim_{\delta \searrow 0} f_\delta(x) = \lim_{\delta \searrow 0} g_\delta(x) = 0$$

равномерно в $\mathbb{R}^3$.

Заметим здесь, что условие на $f_\delta(x)$ означает, что функция $\Phi(x)$ принадлежит к классу Като (см. [5; с. 16]).

Основные результаты работы анонсированы в [6].

1. Интегральное уравнение теории возмущений. Если выполнено условие (i), то оператор $H = H(a, V)$ запишется в виде суммы $H = H_o + W$, где $H_o = -\Delta$,

$$W = 2 \sum_{k=1}^3 p_k a_k + \Phi. \quad (4)$$

Хорошо известно, что если $a_k(x)$, $k = 1, 2, 3$, и $V(x)$ достаточно гладкие ограниченные функции, то операторы H_o и H самосопряжены в $L^2(\mathbb{R}^3)$ с общей областью определения $W_2^2(\mathbb{R}^3)$, а для резольвент $R_o(z) = (H_o - z)^{-1}$ и $R(z) = (H - z)^{-1}$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$ справедливо уравнение

$$R(z) + R_o(z) W R(z) = R_o(z), \quad (5)$$

которое принято называть уравнением теории возмущений. Если выполнены условия (i), (ii), то оператор H определяется в смысле квадратичных форм (см. [5; с. 11]).

Пусть $h(x)$ пробегает множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Положим

$$u(x, \lambda) = (R(\lambda^2)h)(x), \quad u_o(x, \lambda) = (R_o(\lambda^2)h)(x), \quad (6)$$

считая, что в (5) $z = \lambda^2$, $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$. Учитывая, что при всех $k = 1, 2, 3$ операторы p_k перестановочны с $R_o(z)$ (во всяком случае при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$) и пользуясь тем, что $R_o(\lambda^2)$ есть интегральный оператор с ядром

$$G(x, y, \lambda) = (4\pi|x - y|)^{-1} e^{i\lambda|x-y|},$$

согласно (5), (6) для $u(\lambda) = u(x, \lambda)$ получим неоднородное уравнение

$$u(\lambda) + K(\lambda)u(\lambda) = u_o(\lambda), \quad (7)$$

где $u_o(\lambda) = u_o(x, \lambda)$, $K(\lambda)$ есть интегральный оператор, ядро которого

$$\begin{aligned} K(x, y, \lambda) &= G(x, y, \lambda)\Phi(y) + 2i^{-1} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} G(x, y, \lambda) a_k(y) \\ &= (4\pi|x - y|)^{-1} e^{i\lambda|x-y|} [\Phi(y) + 2(\lambda|x - y|^{-1} + i|x - y|^{-2})\langle x - y, a(y) \rangle], \quad (8) \end{aligned}$$

где $\langle x - y, a(y) \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Если $h \in C_o^\infty$, то $u_o(x, \lambda)$ – непрерывная ограниченная функция для всех λ , $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, причем $u_o(\lambda)$ аналитична по λ в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и непрерывна по λ в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$ в топологии банахова пространства $\mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$ ограниченных непрерывных функций с нормой $\|f\|_{\mathbb{C}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |f(x)|$. Ясно, что уравнение (7) продолжает иметь смысл и при выполнении условий (i), (ii), причем легко проверить, что при этих условиях оператор $K(\lambda)$ будет компактным в $\mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$ для всех λ , $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, непрерывным по λ в равномерной операторной топологии и аналитичным по λ в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > 0$ в той же топологии (для доказательства достаточно заметить, что указанные свойства оператора $K(\lambda)$ имеют место для гладких финитных коэффициентов $a(x)$ и $V(x)$). Сказанное позволяет к уравнению (7) применить теорию Фредгольма, согласно которой уравнение (7) при данном λ , $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, имеет единственное решение в $\mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$, если в этом пространстве соответствующее однородное уравнение

$$f + K(\lambda)f = 0, \quad (9)$$

имеет только нулевое решение. Поэтому возникает задача изучения множества $\mathcal{E}$ тех точек λ из полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, для которых однородное уравнение (9) имеет нетривиальное решение в $\mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$. Ниже будут изучены отдельные части множества $\mathcal{E}$, определяемые условиями

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \cap \{\lambda \mid \operatorname{Im} \lambda > 0\}, \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1 \setminus \{0\}. \quad (10)$$

2. Исследование множества $\mathcal{E}_1$. В начале отметим, что имеют место следующие простые утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия (i), (ii). Тогда при каждом λ , $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, интегральный оператор $K_1(\lambda)$ с ядром

$$K_1(x, y, \lambda) = (1 + |x|)(1 + |y|)^{-1} K(x, y, \lambda), \quad (11)$$

компактен в $\mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$ и непрерывен (аналитичен) по параметру λ , $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$ (по параметру λ , $\operatorname{Im} \lambda > 0$) в равномерной операторной топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (8) ядро $K_1(x, y, \lambda)$ допускает следующие оценки:

1) при $|x| \leq 1$

$$|K_1(x, y, \lambda)| \leq \frac{1}{2\pi|x-y|} \left[|\Phi(y)| + 2 \left(|\lambda| + \frac{1}{|x-y|} \right) |a(y)| \right] e^{-\operatorname{Im} \lambda |x-y|};$$

2) при $|x| > 1, |y| \leq |x|/2$

$$\begin{aligned} |K_1(x, y, \lambda)| &\leq \frac{(1+|x|)}{2\pi(1+|y|)|x|} \left[|\Phi(y)| + 2 \left(|\lambda| + \frac{2}{|x|} \right) |a(y)| \right] e^{-\operatorname{Im} \lambda |x-y|} \\ &\leq \frac{1}{\pi} [|\Phi(y)| + 2(|\lambda| + 2)|a(y)|] e^{-\operatorname{Im} \lambda |x-y|}; \end{aligned}$$

3) при $|x| > 1, |y| \geq |x|/2$

$$|K_1(x, y, \lambda)| \leq \frac{1}{2\pi|x-y|} \left[|\Phi(y)| + 2 \left(|\lambda| + \frac{1}{|x-y|} \right) |a(y)| \right] e^{-\operatorname{Im} \lambda |x-y|},$$

откуда непосредственно следует доказательство леммы.

Аналогично из предыдущих оценок ядра $K_1(x, y, \lambda)$ 1)–3) следует, что справедлива

ЛЕММА 2. Если выполнены условия (i), (ii), то при каждом λ , $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, интегральный оператор $M_1(\lambda)$ с ядром

$$M_1(x, y, \lambda) = (1+|x|)(1+|y|)^{-1} K(x, y, \lambda) e^{i\lambda(|y|-|x|)}$$

компактен в $\mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$ и непрерывен по λ в равномерной операторной топологии.

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия (i), (ii). Тогда если $\lambda \in \mathcal{E}_1$, то $\lambda = i\tau$, $\tau > 0$, а решение $f(x)$ уравнения (9) принадлежит $W_1^2(\mathbb{R}^3)$ и допускает оценку

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1+|x|) e^{\tau|x|} |f(x)| < \infty.$$

При этом $\lambda^2 = -\tau^2$ есть собственное значение оператора H конечной кратности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\operatorname{Im} \lambda > 0$, $f(x)$ – решение уравнения (9), $\mathcal{X}_n$ – оператор умножения на характеристическую функцию шара $\{x \mid |x| \leq n\}$, $K^{(n)}(\lambda) = K(\lambda)\mathcal{X}_n$. Ясно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|K^{(n)} - K(\lambda)\| = 0$. Тогда согласно общей теории компактных операторов существуют последовательность чисел $\{\gamma_n\}$ и последовательность функций $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$ такие, что при каждом n

$$f_n + \gamma_n K^{(n)}(\lambda) f_n = 0, \quad (12)$$

причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 1$, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Так как

$$f_n(x) = -\gamma_n \int_{|y| \leq n} K(x, y, \lambda) f_n(y) dy,$$

а при $|y| \leq n, |x| \geq n+1$

$$|K(x, y, \lambda)| \leq \frac{C}{|x|} e^{-\operatorname{Im} \lambda |x|} [|\Phi(y)| + |a(y)|],$$

где $C > 0$ – постоянная, то последовательность функций

$$g_n(x) = (1 + |x|)e^{-i\lambda|x|}f_n(x), \quad (13)$$

принадлежит $\mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$ и согласно (12) имеем

$$g_n + \gamma_n M_1^{(n)}(\lambda)g_n = 0,$$

где $M_1^{(n)}(\lambda) = M_1(\lambda)\mathcal{K}_n$.

Поскольку $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, неравенство (11) будет доказано, коль скоро мы покажем, что

$$\sup_n \|g_n\|_{\mathbb{C}} < \infty. \quad (14)$$

Для нормированной последовательности $\tilde{g}_n(x) = \|g_n\|_{\mathbb{C}}^{-1}g_n(x)$ имеем

$$\tilde{g}_n = -\gamma_n M_1^{(n)}(\lambda)\tilde{g}_n,$$

где $\gamma_n \rightarrow 1$, $\|M_1^{(n)}(\lambda) - M_1(\lambda)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $\{\tilde{g}_n(x)\}$ – компактная в $\mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$ последовательность, так что существуют $\tilde{g}(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$ и подпоследовательность $\{\tilde{g}_{n_k}(x)\}$ такие, что $\{\tilde{g}_{n_k}(x)\} \rightrightarrows \{\tilde{g}(x)\}$ при $n_k \rightarrow \infty$. При этом $\|\tilde{g}\|_{\mathbb{C}} = 1$. Если теперь допустить, что $\|g_n\|_{\mathbb{C}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то согласно (13) $\tilde{g}(x) \equiv 0$. Полученное противоречие доказывает, что имеет место (11), где $\tau = \operatorname{Im} \lambda$. То, что $f \in W_1^2(\mathbb{R}^3)$, устанавливается стандартными априорными оценками. Для доказательства равенства $\operatorname{Re} \lambda = 0$ достаточно заметить, что λ^2 есть собственное число самосопряженного оператора H . Так что $\operatorname{Im} \lambda^2 = 2 \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Re} \lambda = 0$; следовательно, $\operatorname{Re} \lambda = 0$ ввиду $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть выполнены условия (i), (ii) и дополнительно известно, что $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} |a(x)| < \infty$, а Φ H_0 -ограничен. Тогда множество $\mathcal{E}_1$ ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (9) имеем

$$f = -2 \sum_{k=1}^3 p_k R_0(-\tau^2) a_k f - R_0(-\tau^2) \Phi f = -K(\lambda) f,$$

где по условию леммы операторы умножения на функцию $a_k(x)$ ограничены. Так как $\|p_k R_0(-\tau^2)\| \leq 1/\tau$, то $\|p_k R_0(-\tau^2) a_k\| \leq \|a_k\|/\tau$. Далее, известно (см. [4; § 2.1]), что если Φ H_0 -ограничен, то

$$\sup_{\tau \geq 1} \tau^{1/2} \|R_0(-\tau^2) \Phi\| < \infty;$$

из этих неравенств следует, что для нормы оператора $K(\lambda)$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$ имеет для $\tau \geq 1$ оценку $\|K(\lambda)\| \leq C\tau^{-1/2}$, откуда следует ограниченность $\mathcal{E}_1$. Лемма 4 доказана.

Теперь мы можем сформулировать основной результат этого пункта.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (i), (ii). Тогда множество $\mathcal{E}_1$ не имеет конечных предельных точек. Если же дополнительно выполнены условия леммы 4, то $\mathcal{E}_1$ состоит из конечного числа точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что точка нуль не есть точка накопления множества $\mathcal{E}_1$. Допустим противное. Пусть $f_n + K_o(\lambda_n)f_n = 0$, где $\lambda_n = i\tau_n$, $\tau_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 0$. Используя рассуждения из доказательства леммы 3, покажем, что нормировку $f_n(x)$ можно выбрать равенством

$$f_n(x) = (1 + |x|)^{-1} e^{-\tau_n |x|} g_n(x), \quad \|g_n\|_{\mathbb{C}} = 1, \quad (15)$$

где $g_n(x) \rightrightarrows g_o(x)$ при $n \rightarrow \infty$, $f_o(x) = (1 + |x|)^{-1} g_o(x)$, $f_o + K_o(0)f_o = 0$. Переходя к преобразованиям Фурье

$$\widehat{u}(p) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(p,x)} u(x) dx,$$

находим, что

$$\begin{aligned} \widehat{f}_n(p) &= -(p^2 + \tau_n^2)^{-1} \left[\widehat{\Phi} f_n(p) + 2 \sum_{k=1}^3 p_k \widehat{a_k} f_n(p) \right], \\ \widehat{f}_o(p) &= -p^{-2} \left[\widehat{\Phi} f_o(p) + 2 \sum_{k=1}^3 p_k \widehat{a_k} f_o(p) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$. Поскольку при $m \neq n$ $(f_n, f_m) = 0$, где (f_n, f_m) – скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R}^3)$, то также $(\widehat{f}_n, \widehat{f}_m) = 0$. И переходя к пределу по m , находим, что согласно (16) для всех n справедливо равенство

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3} p^{-2} (p^2 + \tau_n^2)^{-1} \varphi_n(p) \overline{\varphi_o}(p) dp, \quad (17)$$

где $\varphi_n(p) = \widehat{\Phi} f_n(p) + 2 \sum_{k=1}^3 p_k \widehat{a_k} f_n(p)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Согласно (15) имеем оценки

$$\begin{aligned} |\varphi_n(p)|^2 &\leq 2|\widehat{\Phi} f_n(p)|^2 + 4 \left| \sum_{k=1}^3 p_k \widehat{a_k} f_n(p) \right|^2 \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\Phi(x)| dx \right)^2 + 4p^2 \sum_{k=1}^3 |\widehat{a_k} f_n(p)|^2, \\ |\varphi_o(p)|^2 &\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\Phi(x)| dx \right)^2 + 4p^2 \sum_{k=1}^3 |\widehat{a_k} f_o(p)|^2. \end{aligned}$$

Поэтому при каждом $\delta > 0$

$$\begin{aligned} &\left| \int_{|p| \geq \delta} p^{-2} (p^2 + \tau_n^2)^{-1} \varphi_n(p) \overline{\varphi_o}(p) dp \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{|p| \geq \delta} p^{-4} |\varphi_n(p)|^2 dp + \frac{1}{2} \int_{|p| \geq \delta} p^{-4} |\varphi_o(p)|^2 dp \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^3} |\Phi(x)| dx \int_{|p| \geq \delta} \frac{dp}{p^4} + 2 \int_{|p| \geq \delta} \frac{1}{p^2} \sum_{k=1}^3 |\widehat{a_k} f_n(p)|^2 dp \\ &\quad + 2 \int_{|p| \geq \delta} \frac{1}{p^2} \sum_{k=1}^3 |\widehat{a_k} f_o(p)|^2 dp \leq C, \end{aligned}$$

где $C > 0$ – постоянная, зависящая только от δ . Отсюда следует, что при каждом $\delta > 0$ существует конечный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|p| \geq \delta} p^{-2} (p^2 + \tau_n^2)^{-1} \varphi_n(p) \overline{\varphi_o}(p) dp = \int_{|p| \geq \delta} p^{-4} |\varphi_o(p)|^2 dp. \quad (18)$$

Далее, в силу (15) в δ -окрестности $p = 0$ имеем

$$\varphi_n(p) = A_n - i(p, B^{(n)}) + 2(p, b^{(n)}) + \psi_n(p), \quad (19)$$

где $n = 0, 1, \dots$,

$$A_n = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x) f_n(x) dx, \quad B^{(n)} = (B_1^{(n)}, B_2^{(n)}, B_3^{(n)}), \quad b^{(n)} = (b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, b_3^{(n)}),$$

$$B_k^{(n)} = \int_{\mathbb{R}^3} x_k \Phi(x) f_n(x) dx, \quad b_k^{(n)} = \int_{\mathbb{R}^3} a_k(x) f_n(x) dx, \quad (20)$$

$$\lim_{\delta \searrow 0} \sup_{n, |p| \leq \delta} |p|^{-1} |\psi_n(p)| \rightarrow 0. \quad (21)$$

Кроме того, имеем

$$\int_{|p| \leq \delta} p^{-2} (p^2 + \tau_n^2)^{-1} dp = \frac{2\pi}{\tau_n} \arctg \frac{\delta}{\tau_n} = \frac{\pi^2}{\tau_n} - \frac{2\pi}{\delta} + O(\tau_n^2), \quad (22)$$

$$\int_{|p| \leq \delta} |p|^{-1} (p^2 + \tau_n^2)^{-1} dp = \pi \ln \frac{\delta^2 + \tau_n^2}{\tau_n^2}. \quad (23)$$

Тогда из (17)–(23) находим, что

$$0 = \frac{a_n \bar{a}_o}{\tau_n} [\pi^2 + o(1)];$$

следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_o = 0. \quad (24)$$

Итак, $f_o(x)$ есть решения уравнения

$$f_o(x) + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Phi(y)}{4\pi|x-y|} f_o(y) dy + 2i \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle x-y, a(y) \rangle}{4\pi|x-y|^3} f_o(y) dy = 0, \quad (25)$$

причем согласно (24)

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Phi(y) f_o(y) dy = 0. \quad (26)$$

Учитывая (26), уравнение (25) можно представить в виде

$$f_o + \tilde{K} f_o = 0, \quad (27)$$

где $\tilde{K}(0)$ – регуляризованный интегральный оператор, ядро которого есть

$$\tilde{K}(x, y, 0) = \frac{\Phi(y)}{4\pi} \left[\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{1+|x|} \right] + \frac{2i \langle x-y, a(y) \rangle}{4\pi|x-y|^3}.$$

Легко покажем, что оператор $\tilde{K}_2$, ядро которого равно

$$\tilde{K}_2(x, y) = \frac{(1+|x|)^2}{(1+|y|)^2} \tilde{K}(x, y),$$

есть компактный оператор в $\mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 3, покажем, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1+|x|)^2 |f_o(x)| < \infty. \quad (28)$$

Тогда из (28) следует, что в δ -окрестности $p = 0$

$$\varphi_{\circ}(p) = -i(p, B^{(\circ)}) + 2(p, b^{(\circ)}) + \psi_{\circ}(p), \quad (29)$$

где

$$|\psi_{\circ}(p)| \leq C|p|^2, \quad (30)$$

$C > 0$ – постоянная. Легко видеть, что при каждом $\delta > 0$

$$\int_{|p| \geq \delta} p^{-2}(p^2 + \tau_n^2)^{-1}(p, B^{(\circ)}) dp = \int_{|p| \geq \delta} p^{-2}(p^2 + \tau_n^2)(p, b^{(\circ)}) dp = 0. \quad (31)$$

Тогда из (17)–(19), (29)–(31) находим, что при достаточно малом $\delta > 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{|p| \leq \delta} p^{-2}(p^2 + \tau_n^2)^{-1} \varphi_n(p) \overline{\varphi}_{\circ}(p) dp + \int_{|p| \geq \delta} p^{-2} |\varphi_{\circ}(p)|^2 dp + o(1) \\ &= \int_{|p| \geq \delta} p^{-2} |\varphi_{\circ}(p)|^2 dp + O(\delta); \end{aligned}$$

следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^3} p^{-4} |\varphi_{\circ}(p)|^2 dp = 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что множество $\mathcal{E}_1$ не имеет конечных предельных точек. Теорема 1 доказана.

3. Исследование множества $\mathcal{E}_2$. Целью данного пункта является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (i), (ii). Тогда множество $\mathcal{E}_2$ не имеет конечных предельных точек. При этом, если $\lambda \in \mathcal{E}_2$, то λ^2 есть собственное значение оператора H конечной кратности, а соответствующая собственная функция $f(x)$ удовлетворяет оценке

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^2 |f(x)| < \infty. \quad (32)$$

Предварительно получим основное вспомогательное утверждение этого пункта. Имеет место

ЛЕММА 5. Пусть выполнены условия (i), (ii). Тогда при $\lambda \neq 0$ для решения $f(x)$ уравнения (9) выполняется равенство

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\lambda(\tilde{x}, y)} [\Phi(y) + 2\lambda \langle \tilde{x}, a(y) \rangle] f(y) dy = 0 \quad (33)$$

для всех $\tilde{x} \in S^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V_n(x)$ и

$$a^{(n)}(x) = (a_1^{(n)}(x), a_2^{(n)}(x), a_3^{(n)}(x))$$

вещественные потенциалы класса $\mathbb{C}_{\circ}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ такие, что если

$$\Phi_n(x) = a^{(n)2}(x) + V_n(x) + i \operatorname{div} a^{(n)}(x),$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |\Phi(x) - \Phi_n(x)| dx &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |a_k(x) - a_k^{(n)}(x)| dx &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |a^2(x) - a^{(n)2}(x)|(1 + |x|)^{-1+\epsilon} dx &= 0, \quad 0 < \epsilon < 1. \end{aligned} \quad (34)$$

Пусть $K^{(n)}(\lambda)$ и $K_1^{(n)}(\lambda)$ – интегральные операторы с ядрами вида (8) и (11), где $\Phi(y)$ и $a_k(y)$ заменим на $\Phi_n(x)$ и $a_k^{(n)}(x)$, $k = 1, 2, 3$, соответственно. Легко показать, что в пространстве $\mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K(\lambda) - K^{(n)}(\lambda)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|K_1(\lambda) - K_1^{(n)}(\lambda)\| = 0. \quad (35)$$

Тогда в силу (34), (35) существуют последовательность чисел $\{\tau_n\}$ и последовательность $\{f_n(x)\} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3) \cap W_{1,\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ такие, что при каждом n

$$f_n + \tau_n K^{(n)}(\lambda) f_n = 0, \quad (36)$$

причем $\sup_{x,n} (1 + |x|)|f_n(x)| < \infty$ и при $n \rightarrow \infty$, $\tau_n \rightarrow 1$

$$(1 + |x|)f_n(x) \rightrightarrows (1 + |x|)f_0(x). \quad (37)$$

Ввиду финитности и гладкости вспомогательных потенциалов V_n и $a^{(n)}$ уравнение (36) представляется в виде

$$f_n(x) + \tau_n \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|} W_n f_n(y) dy = 0, \quad (38)$$

причем

$$\text{Im}(f_n, W_n f_n) = 0. \quad (39)$$

Тогда из (38), (39) для каждого n получим равенство

$$\tau_n^{(1)} \alpha_n + \tau_n^{(2)} \beta_n = 0, \quad (40)$$

где $\tau_n^{(1)} = \text{Re } \tau_n$, $\tau_n^{(2)} = \text{Im } \tau_n$,

$$\alpha_n = \text{Im}(G(\lambda)W_n f_n, W_n f_n) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin \lambda|x-y|}{|x-y|} W_n f_n(y) \overline{W_n f_n(x)} dy dx, \quad (41)$$

$$\beta_n = \text{Re}(G(\lambda)W_n f_n, W_n f_n) = -\text{Re}[\tau_n(f_n, W_n f_n)]. \quad (42)$$

Заметим теперь, что

$$\frac{\sin \lambda|x-y|}{4\pi|x-y|} = \frac{\lambda}{16\pi^2} \int_{S^2} e^{i\lambda\langle \tilde{p}, x-y \rangle} d\mu(\tilde{p}),$$

где $\mu(\tilde{p})$ – мера на сфере S^2 ; следовательно,

$$\alpha_n = \frac{\lambda}{16\pi^2} \int_{S^2} |\widehat{W_n f_n}(\lambda \tilde{p})|^2 d\mu(\tilde{p}), \quad (43)$$

$$\widehat{W_n f_n}(\lambda \tilde{p}) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\lambda\langle \tilde{p}, y \rangle} [\Phi_n(y) + 2\lambda\langle \tilde{p}, a^{(n)}(y) \rangle] f_n(y) dy. \quad (44)$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^{(1)} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^{(2)} = 0$, из (40), (43), (44) непосредственно вытекает (33), если мы только покажем, что

$$\sup_n |\beta_n| < \infty. \quad (45)$$

Для доказательства (45) вначале заметим, что $f_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} -\Delta f_n(x) &= \lambda^2 f_n(x) - \tau_n W_n f_n(x) \\ &= \lambda^2 f_n(x) + 2i\tau_n \sum_{k=1}^3 a_k^{(n)}(x) \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_k} - \tau_n \bar{\Phi}_n(x) f_n(x). \end{aligned} \quad (46)$$

Легко видеть, что при $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta f_n(x) \bar{f}_n(x) (1 + |x|)^{-1-\epsilon} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f_n(x)|^2 (1 + |x|)^{-1-\epsilon} dx - (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_k} \bar{f}_n(x) (1 + |x|)^{-2-\epsilon} \frac{x_k}{|x|} dx. \end{aligned} \quad (47)$$

Поэтому из (46), (47), используя (37) и неравенство Коши–Буняковского, найдем, что

$$\begin{aligned} \|\nabla f_n\|_{-1-\epsilon}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f_n(x)|^2 (1 + |x|)^{-1-\epsilon} dx \\ &= (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_k} \bar{f}_n(x) (1 + |x|)^{-2-\epsilon} \frac{x_k}{|x|} dx \\ &\quad + \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^3} |f_n(x)|^2 (1 + |x|)^{-1-\epsilon} dx \\ &\quad + 2i\tau \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} a_k^{(n)}(x) \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_k} \bar{f}_n(x) (1 + |x|)^{-1-\epsilon} dx \\ &\quad - \tau_n \int_{\mathbb{R}^3} \bar{\Phi}_n(x) |f_n(x)|^2 (1 + |x|)^{-1-\epsilon} dx \\ &\leq C_1 + C_2 \|\nabla f_n\|_{-1-\epsilon}, \quad 0 < \epsilon < 1, \end{aligned}$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ – постоянные. Отсюда следует, что

$$\sup_n \|\nabla f_n\|_{-1-\epsilon} < \infty. \quad (48)$$

По определению (42) имеем

$$\beta_n = \operatorname{Re} \left[2\tau_n i \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} f_n(x) a_k^{(n)}(x) \frac{\partial \bar{f}_n(x)}{\partial x_k} dx + \tau_n \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_n(x) |f_n(x)|^2 dx \right];$$

следовательно, из (37) и (48) следует, что

$$|\beta_n| \leq 2C_3 \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{-1} |a_k^{(n)}(x)| \left| \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_k} \right| dx + C_4 \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{-2} |\Phi_n(x)| dx$$

$$\leq C_3 \left[\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{-1+\epsilon} |a^{(n)}(x)|^2 dx + \|\nabla f_n\|_{-1-\epsilon}^2 \right] \\ + C_4 \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{-2} \Phi_n(x) dx \leq C_5,$$

где $C_k > 0$, $k = 3, 4, 5$, – постоянные. Лемма 5 доказана.

Доказательство леммы 5 позволяет регуляризовать уравнение (9). Согласно (33) и (9) для $f(x)$ получим уравнение

$$f + \tilde{K}(\lambda)f = 0, \quad (49)$$

где $\tilde{K}(\lambda)$ – интегральный оператор, ядро которого есть $(\tilde{x} = x/|x|)$

$$\tilde{K}(x, y, \lambda) = K(x, y, \lambda) - \frac{e^{i\lambda|x|}e^{-i\lambda(\tilde{x}, y)}}{4\pi(1 + |x|)} [\Phi(y) + 2\lambda\langle \tilde{x}, a(y) \rangle]. \quad (50)$$

ЛЕММА 6. Интегральный оператор $\tilde{K}_2(\lambda)$ с ядром

$$\tilde{K}_2(x, y, \lambda) = \tilde{K}(x, y, \lambda)(1 + |x|)^2(1 + |y|)^{-2}$$

для всех $\lambda \in R$ компактен в $\mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$ и непрерывен по параметру λ в равномерной операторной топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ядро $\tilde{K}_2(x, y, \lambda)$ представим в виде суммы

$$\tilde{K}_2(x, y, \lambda) = \tilde{K}_2^{(1)}(x, y, \lambda) + \tilde{K}_2^{(2)}(x, y, \lambda) + \tilde{K}_2^{(3)}(x, y, \lambda),$$

где

$$\tilde{K}_2^{(1)}(x, y, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{i\lambda[|x|-(\tilde{x}, y)]}}{1+|x|} \right] \Phi(y)(1+|x|)^2(1+|y|)^{-2}, \\ \tilde{K}_2^{(2)}(x, y, \lambda) = \frac{\lambda}{2\pi} \left[\frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-y|^2} \langle x-y, a(y) \rangle - \frac{e^{i\lambda[|x|-(\tilde{x}, y)]}}{1+|x|} \right] (1+|x|)^2(1+|y|)^{-2}, \\ \tilde{K}_2^{(3)}(x, y, \lambda) = i \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|^3} \langle x-y, a(y) \rangle (1+|x|)^2(1+|y|)^{-2}.$$

Ограничимся рассмотрением оператора $\tilde{K}_2^{(1)}(\lambda)$ с ядром $\tilde{K}_2^{(1)}(x, y, \lambda)$. При $|x| \leq 1$

$$|\tilde{K}_2^{(1)}(x, y, \lambda)| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{|x-y|} + 1 \right) |\Phi(y)|.$$

При $|x| \geq 1$, $|x| \leq N(y)$, N – фиксированное число, $N \gg 1$,

$$|\tilde{K}_2^{(1)}(x, y, \lambda)| \leq C_N \left(\frac{1}{|x-y|} + \frac{1}{1+|x|} \right) |\Phi(y)|,$$

где $C_N > 0$ – постоянное, зависящая только от N . Пусть теперь $|x| \geq 1$, $|x| \geq N|y|$.

Тогда $\tilde{K}_2^{(1)}(x, y, \lambda)$ можно представить в виде суммы

$$\tilde{K}_2^{(1)}(x, y, \lambda) = \frac{i(1+|x|)^2 e^{i\lambda[|x|-(\tilde{x}, y)]}}{4\pi|x|(1+|y|)^2} B(x, y) \int_0^\lambda e^{isB(x, y)} ds \Phi(y) \\ - \frac{e^{i\lambda|x-y|} \omega(x, y) (1+|x|)^2}{4\pi|x-y|(1+|\tilde{x}-y/|x||)(1+|y|)^2} \Phi(y) + \frac{e^{i\lambda[|x|-(\tilde{x}, y)]} (1+|x|)}{4\pi|x|(1+|y|)^2} \Phi(y),$$

где $B(x, y) = |x-y| - |x| + (\tilde{x}, y)$, $\omega(x, y) = -2(\tilde{x}, y)/|x| + |y|^2/|x|^2$, причем $B(x, y)$

представляется в виде

$$B(x, y) = \frac{|y|^2}{2|x|} - \frac{|x|\omega^2(x, y)}{2(\sqrt{1 + \omega(x, y)} + 1)^2}.$$

Отсюда следует, что при данных x, y имеем $|\tilde{K}_2^{(1)}(x, y, \lambda)| \leq C|\Phi(y)|$, где $C > 0$ – постоянная. Из полученных оценок непосредственно следует ограниченность оператора $\tilde{K}_2^{(1)}(x, y, \lambda)$ в пространстве $\mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$. Если $\mathcal{X}_n$ – оператор умножения на характеристическую функцию шара $\{x \mid |x| \leq n\}$, то легко покажем, что при каждом $a > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-a \leq \lambda \leq a} \|\tilde{K}_2^{(1)}(\lambda)[I - \mathcal{X}_n]\| = 0,$$

а $\tilde{K}_2^{(1)}(\lambda)\mathcal{X}_n$ при каждом n компактен и непрерывен по $\lambda \in [-a, a]$ в равномерной операторной топологии. Отсюда следует утверждение леммы 6 для оператора $\tilde{K}_2^{(1)}(\lambda)$. Совершенно аналогично изучаются операторы $\tilde{K}_2^{(2)}(\lambda)$ и $\tilde{K}_2^{(3)}(\lambda)$ с ядрами $\tilde{K}_2^{(2)}(x, y, \lambda)$ и $\tilde{K}_2^{(3)}(x, y, \lambda)$ соответственно. Лемма 6 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Если допустить, что $\mathcal{E}_2$ имеет конечную предельную точку, то существуют последовательность $\{\lambda_n\}$ различных точек $\lambda_n \in \mathbb{R}$ и последовательность $\{f_n(x)\} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$ такие, что $f_n + K(\lambda_n)f_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_0$, причем существует функция $f_0(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$ такая, что $f_0 + K(\lambda_0)f_0 = 0$ и $f_n(x) \rightrightarrows f_0(x)$ на $\mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$ при $n \rightarrow \infty$. Согласно лемме 5 также для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ $f_n + \tilde{K}(\lambda_n)f_n = 0$. Используя теперь лемму 6 и рассуждения, аналогичные доказательству леммы 3, покажем, что последовательность $\{f_n(x)\}$ и функции $f(x)$ можно нормировать условиями $f_n(x) = (1 + |x|)^{-2}g_n(x)$, $f_0(x) = (1 + |x|)^{-2}g_0(x)$, где $g_n(x) \rightrightarrows g(x)$ на $\mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$ при $n \rightarrow \infty$. Но при $n \neq m$ $(f_n, f_m) = 0$; следовательно $(f_0, f_0) = 0$, что противоречит допущению. Теорема 2 доказана.

В заключение этого пункта отметим, что условие отсутствия положительных собственных значений получено в работе [7].

4. Отсутствие ненулевых вещественных особенностей решения уравнения Липпмана–Швингера. Следуя (2) и (7) решением $\varphi(x, \lambda, \omega)$ уравнения Липпмана–Швингера мы назовем решение уравнения

$$\varphi(x, \lambda, \omega) + \int_{\mathbb{R}^3} K(x, y, \lambda)\varphi(y, \lambda, \omega) dy = e^{i\lambda\langle x, \omega \rangle}, \quad (51)$$

где $\omega \in S^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, а ядро $K(x, y, \lambda)$ задано равенством (8).

Ниже мы установим более сильный, чем (3), результат. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_0 \in \mathcal{E}_2$. Тогда существует предел

$$\varphi(x, \lambda_0, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x, \lambda_n, \omega),$$

равномерный для $x \in \mathbb{R}^3$ и $\omega \in S^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n – размерность множества решений уравнения

$$f + K(\lambda_0)f = 0.$$

Выберем базис $f_1, \dots, f_n$ решений этого уравнения так, чтобы выполнялись условия

$$(X^{-s}f_k, f_m) = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{-s} f_k(x) \bar{f}_m(x) dx = \delta_{km}, \quad (52)$$

где δ_{km} – символ Кронекера, s – положительное число, $s > 3$. Введем оператор

$$B(\lambda)f = K(\lambda)f - \sum_{m=1}^n (X^{-s}f, f_m)G(\lambda_\circ)X^{-s}f_m,$$

$G(\lambda)$ – интегральный оператор с ядром $(4\pi|x-y|)^{-1}e^{i\lambda|x-y|}$. Уравнение $f + B(\lambda_\circ)f = 0$ имеет только нулевое решение. Действительно, если

$$f + K(\lambda_\circ)f - \sum_{m=1}^n (X^{-s}f, f_m)G(\lambda_\circ)X^{-s}f_m = 0, \quad (53)$$

то учитывая, что $f \in W_1^2(\mathbb{R}^3)$, имеем

$$K(\lambda_\circ)f = G(\lambda_\circ)Wf, \quad f_m = -G(\lambda_\circ)Wf_m. \quad (54)$$

Умножая равенство (53) скалярно на Wf_k и учитывая (52), (54), находим, что $(X^{-s}f, f_m) = 0$ для всех $m = 1, \dots, n$. Тогда f – решение уравнения (9), причем $(X^{-s}f, f_k)$ при всех k , $1 \leq k \leq n$. Следовательно, $f(x) \equiv 0$. Из доказанного следует, что в некоторой окрестности точки $\lambda_\circ$ существует обратный оператор

$$D(\lambda) = [I + B(\lambda)]^{-1},$$

ограниченный в $\mathbb{C}(\mathbb{R}^3)$ и непрерывной по λ в равномерной операторной топологии. Так как уравнение (51) можно записать в виде

$$\varphi(\lambda, \omega) + B(\lambda)\varphi(\lambda, \omega) + \sum_{m=1}^n (X^{-s}\varphi(\lambda, \omega), f_m)G(\lambda_\circ)X^{-s}f_m = \varphi_\circ(\lambda, \omega), \quad (55)$$

где $\varphi(\lambda, \omega) = \varphi(\lambda, \omega, x)$, $\varphi_\circ(\lambda, \omega) = e^{i\lambda(x, \omega)}$, то в указанной выше окрестности точки $\lambda_\circ$ уравнение (55) представляется в виде

$$\varphi(x, \omega) + \sum_{m=1}^n (X^{-s}\varphi(\lambda, \omega), f_m)g_m(\lambda) = g_\circ(\lambda, \omega), \quad (56)$$

где

$$g_m(\lambda) = D(\lambda)G(\lambda_\circ)X^{-s}f_m, \quad g_\circ(\lambda, \omega) = D(\lambda)\varphi_\circ(\lambda, \omega). \quad (57)$$

Таким образом, задача сводится к изучению чисел

$$C_m(\lambda, \omega) = (X^{-s}\varphi(\lambda, \omega), f_m), \quad m = 1, \dots, n,$$

для которых из (56) получим систему линейных уравнений

$$C_k(\lambda, \omega) + \sum_{m=1}^n b_{km}(\lambda)C_m(\lambda, \omega) = C_k^\circ(\lambda, \omega), \quad k = 1, \dots, n, \quad (58)$$

где

$$b_{km}(\lambda) = (X^{-s}g_m(\lambda), f_k), \quad C_k^\circ(\lambda, \omega) = (X^{-s}g_\circ(\lambda, \omega), f_k). \quad (59)$$

Далее изучим матрицу $(b_{km}(\lambda))$ и правую часть уравнения (58). Согласно определениям (57) имеем

$$g_m(\lambda) + K(\lambda)g_m(\lambda) - \sum_{l=1}^n (X^{-s}g_m(\lambda), f_l)G(\lambda_o)X^{-s}f_l = G(\lambda_o)X^{-s}f_m, \quad (60)$$

$$g_o(\lambda, \omega) + K(\lambda)g_o(\lambda, \omega) - \sum_{l=1}^n (X^{-s}g_o(\lambda, \omega), f_l)G(\lambda_o)X^{-s}f_l = \varphi_o(\lambda, \omega). \quad (61)$$

Учитывая, что

$$K(\lambda)g_m(\lambda) = G(\lambda)Wg_m(\lambda), \quad K(\lambda)g_o(\lambda, \omega) = G(\lambda)Wg_o(\lambda, \omega),$$

и умножая (60) и (61) на Wf_k скалярно, найдем соотношения

$$([G(\lambda) - G(\lambda_o)]Wg_m(\lambda), Wf_k) + b_{km}(\lambda) = -\delta_{km}, \quad (62)$$

$$\begin{aligned} ([G(\lambda) - G(\lambda_o)]Wg_o(\lambda, \omega), Wf_k) + C_k^o(\lambda, \omega) &= (\varphi_o(\lambda, \omega), Wf_k) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\lambda(y, \omega)} \overline{Wf_k}(y) dy. \end{aligned} \quad (63)$$

Учитывая, что

$$e^{i\lambda|x-y|} - e^{i\lambda_o|x-y|} = i|x-y| \int_{\lambda_o}^{\lambda} e^{is|x-y|} ds,$$

и (62), (63), находим

$$\gamma_{km}(\lambda) = b_{km}(\lambda) + \delta_{km} = -\frac{i}{4\pi} \int_{\lambda_o}^{\lambda} ds \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{is|x-y|} Wg_m(y, \lambda) \overline{Wf_k}(x) dy dx, \quad (64)$$

$$C_k^o(\lambda, \omega) = \overline{\widehat{Wf_k}(\lambda, \omega)} - \frac{i}{4\pi} \int_{\lambda_o}^{\lambda} ds \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{is|x-y|} Wg_o(x, \lambda, \omega) \overline{Wf_k}(x) dy dx, \quad (65)$$

причем согласно (33)

$$\begin{aligned} \widehat{Wf_k}(\lambda, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\lambda(\omega, y)} [\Phi(y) + 2\lambda\langle \omega, a(y) \rangle] f_k(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} [e^{-i\lambda(\omega, y)} - e^{-i\lambda_o(\omega, y)}] [\Phi(y) + 2\lambda\langle \omega, a(y) \rangle] f_k(y) dy, \end{aligned} \quad (66)$$

Таким образом, система (58) принимает вид

$$\sum_{m=1}^n \gamma_{km}(\lambda) C_m(\lambda, \omega) = C_k^o(\lambda, \omega), \quad k = 1, \dots, n. \quad (67)$$

Из обозначений (59), уравнений (60) и (61) непосредственно следует, что $g_m(\lambda_o) = f_m$, $m = 1, \dots, n$. Тогда из (64)–(66) находим, что $\gamma_{km}(\lambda_o) = 0$, $C_k^o(\lambda_o, \omega) = 0$, $k = 1, \dots, n$, причем

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_o} \frac{\gamma_{km}(\lambda)}{\lambda - \lambda_o} &= \gamma'_{km}(\lambda_o) \\ &= -\frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\lambda_o|x-y|} Wf_m(y) \overline{Wf_k}(x) dx dy = -\omega'_{km}(\lambda_o), \end{aligned} \quad (68)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{C_k^0(\lambda, \omega)}{\lambda - \lambda_0} = -\frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\lambda_0|x-y|} W g_0(y, \omega, \lambda_0) \overline{W f_k}(x) dx dy + i \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\lambda_0(\omega, y)} (\omega, y) [\Phi(y) + 2\lambda_0 \langle \omega, a(y) \rangle] f_k(y) dy, \quad (69)$$

где при $\text{Im } \lambda > 0$ имеем

$$\omega_{km}(\lambda) = (G(\lambda) W f_m, W f_k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{W f_m}(p) \overline{\widehat{W f_k}(p)}}{p^2 - \lambda^2},$$

так что

$$\omega'_{km}(\lambda) = \frac{2\lambda}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{W f_m}(p) \overline{\widehat{W f_k}(p)}}{(p^2 - \lambda^2)^2}.$$

Следовательно, используя равенство $\widehat{W f_k}(\lambda_0 \tilde{p}) = 0$, $k = 1, \dots, n$, приходим к равенству

$$\omega'_{km}(\lambda_0) = 2\lambda_0 (f_m, f_k). \quad (70)$$

Остается заметить, что матрица $((f_m, f_n))_{m,k=1}^n$ обратима. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Я. Повзнер, “О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$ ”, *Матем. сб.*, **32**:1 (1953), 109–156.
- [2] А. Я. Повзнер, “О разложении по функциям, являющимся решением задачи рассеяния”, *Докл. АН СССР*, **104**:3 (1955), 360–363.
- [3] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 3: Теория рассеяния, Мир, М., 1982.
- [4] Х. Х. Муртазин, В. А. Садовничий, *Спектральный анализ многочастичного оператора Шрёдингера*, Изд-во МГУ, М., 1988.
- [5] Х. Цикон, Р. Фрёзе, В. Кириш, Б. Саймон, *Операторы Шрёдингера с приложениями в квантовой механике и глобальной геометрии*, Мир, М., 1990.
- [6] Х. Х. Муртазин, А. Н. Галимов, “Спектр и рассеяние для операторов Шрёдингера с неограниченными коэффициентами”, *Докл. РАН*, **407**:3 (2006), 313–315.
- [7] М. Б. Губайдуллин, Х. Х. Муртазин, “Некоторые свойства собственных функций оператора Шрёдингера в магнитном поле”, *ТМФ*, **126**:3 (2001), 443–454.

Х. Х. Муртазин

Башкирский государственный университет, г. Уфа

E-mail: Murtazin@mail.ru

Поступило

18.09.2006

А. Н. Галимов

Башкирский государственный университет

E-mail: ArturGalimov@rambler.ru