Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Лауринчикас, Функциональная независимость периодических дзета-функций Гурвица, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 1, 69–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3774>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 18:35:44

УДК 511

Функциональная независимость периодических дзета-функций Гурвица

А. Лауринчикас

В статье получена функциональная независимость, а также совместная функциональная независимость для набора дзета-функций Гурвица с периодическими коэффициентами и алгебраически независимыми над полем рациональных чисел параметрами.

Библиография: 24 названий.

1. Введение. На втором международном конгрессе математиков в Париже в 1900 г. Гильберт заметил, см. [1], что дзета-функция Римана $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, не удовлетворяет никакому алгебраическому–дифференциальному уравнению, и что это легко следует из функционального уравнения

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s),$$

где $\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера, и известного результата Гёльдера об алгебраической–дифференциальной независимости функции $\Gamma(s)$. Далее, он высказал мысль, что функция

$$\zeta(s, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m^s}$$

также, вероятно, не удовлетворяет никакому алгебраическому–дифференциальному уравнению. Это предположение Гильберта было доказано Островским в [2]. Постников обобщил [3] задачу Гильберта на систему рядов Дирихле, а в [4] он рассмотрел функцию

$$L(s, x, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s} x^m,$$

где χ – характер Дирихле, и доказал, что уравнение

$$P\left(s, x, \frac{\partial^{l+r} L(s, x, \chi)}{\partial s^l \partial x^r}\right) \equiv 0$$

не может иметь места ни для какого полинома P .

Дальнейшее существенное продвижение в этом направлении принадлежит Воронину. В [5], см. также [6], [7], он получил функциональную независимость дзета-функции Римана, показав, что $\zeta(s)$ не удовлетворяет никакому дифференциальному уравнению вида

$$s^m F_m(y(s), y'(s), \dots, y^{(n-1)}(s)) + \dots + F_0(y(s), y'(s), \dots, y^{(n-1)}(s)) = 0,$$

где $F_0, \dots, F_m$ – непрерывные функции, не все равные нулю тождественно. В той же работе Воронин дал обобщение упомянутой теоремы Островского о функции $\zeta(s, x)$. Он доказал, что функция $\zeta(s, x)$ не удовлетворяет никакому дифференциальному уравнению вида

$$\sum_{n \leq N} \sum_{m \leq N} s^n x^m F_{nm} \left(y(s, x), \frac{\partial}{\partial x} y(s, x), \dots, \frac{\partial^{k+l}}{\partial s^k \partial x^l} y(s, x) \right) = 0,$$

где $F_{nm}(z_{00}, z_{10}, \dots, z_{kl})$ – аналитические функции от переменных $z_{00}, \dots, z_{kl}$, не все равные нулю.

В [8], см. также [6] и [7], Воронин получил функциональную независимость L -функций Дирихле и дзета функций Дедекинда. Пусть $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ – попарно неэквивалентные характеры Дирихле, а $L(s, \chi_1), \dots, L(s, \chi_n)$ – соответствующие L -функции Дирихле. Теорема Воронина гласит, что если $F_k: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, m$, – непрерывные функции, не все равные нулю тождественно, то функция

$$\sum_{k=0}^m s^k F_k(L(s, \chi_1), \dots, L(s, \chi_n))$$

также не равна нулю тождественно.

Пусть теперь $K_1, \dots, K_n$ – попарно различные квадратные расширения поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а $\zeta_{K_1}(s), \dots, \zeta_{K_n}(s)$ – соответствующие дзета-функции Дедекинда. Если F_k , $k = 0, \dots, m$, – определенные выше функции, то функция

$$\sum_{k=0}^m s^k F_k(\zeta_{K_1}(s), \dots, \zeta_{K_n}(s))$$

не равна нулю тождественно. Такое же утверждение верно и для полей $K_l = \mathbb{Q}(\sqrt[l]{1})$, $l = 1, \dots, n$, где $D_1, \dots, D_n$ – нечетные попарно различные бесквадратные числа.

Имеются работы, содержащие аналоги теоремы Воронина о функциональной независимости дзета-функции Римана. Так, в [9]–[12] была получена функциональная независимость рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами, имеющими среднее значение со степенным понижением. Рейх [13] изучал функциональную независимость дзета-функций Дедекинда. Функциональная независимость дзета-функций Лерха рассматривалась в работах [14]–[19], а L -функций эллиптических кривых в [20]. Результаты о функциональной независимости L -функций некоторого подкласса класса Сельберга содержатся в [21].

В настоящей заметке рассматривается функциональная независимость периодических дзета-функций Гурвица. Пусть $\mathbb{N}_0$ – множество неотрицательных целых чисел и $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ – периодическая с минимальным периодом $k \in \mathbb{N}$

последовательность комплексных чисел, а α – действительное число, $0 < \alpha \leq 1$. Периодическая дзета-функция Гурвица $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ при $\sigma > 1$ определяется рядом

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s}.$$

При помощи равенства

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \frac{1}{k^s} \sum_{l=0}^{k-1} a_l \zeta\left(s, \frac{l + \alpha}{k}\right),$$

где $\zeta(s, \beta)$, $0 < \beta \leq 1$, – классическая дзета-функция Гурвица, функция $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Если

$$\sum_{l=0}^{k-1} a_l = 0,$$

то функция $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ является целой.

ТЕОРЕМА 1. Пусть α – трансцендентное число, для каждого $j = 0, 1, \dots, n$, функция $F_j: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна и функция

$$\sum_{j=0}^n s^j F_j(\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}), \zeta'(s, \alpha; \mathbf{a}), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha; \mathbf{a}))$$

равна нулю тождественно. Тогда $F_j \equiv 0$ при $j = 0, 1, \dots, n$.

Теорема 1 обобщается для нескольких периодических дзета-функций Гурвица. Пусть $\mathbf{a}_j = \{a_{mj} : m \in \mathbb{N}_0\}$ – периодическая с минимальным периодом $k_j \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел, α_j – действительное число, $0 < \alpha_j \leq 1$, и $\zeta(s, \alpha_j; \mathbf{a}_j)$ – соответствующая периодическая дзета-функция Гурвица, $j = 1, \dots, r$. Пусть $k = [k_1, \dots, k_r]$ – наименьшее общее кратное чисел $k_1, \dots, k_r$ и

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ – алгебраически независимые числа над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, $\text{rang}(A) = r$, для каждого $l = 0, 1, \dots, n$ функция $F_l: \mathbb{C}^{Nr} \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна, а функция

$$\sum_{l=0}^n s^l F_l(\zeta(s, \alpha_1; \mathbf{a}_1), \zeta'(s, \alpha_1; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_1; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathbf{a}_r), \zeta'(s, \alpha_r; \mathbf{a}_r), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_r; \mathbf{a}_r))$$

равна нулю тождественно. Тогда $F_l \equiv 0$ при $l = 0, 1, \dots, n$.

В свою очередь, теорема 2 является частным случаем более общей теоремы. Пусть l_j – целое положительное число, $j = 1, \dots, r$, $\mathbf{a}_{jl} = \{a_{mjl} : m \in \mathbb{N}_0\}$ – периодическая с минимальным периодом $k_{jl} \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел, α_j – действительное число, $0 < \alpha_j \leq 1$, и $\zeta(s, \alpha_j; \mathbf{a}_j)$ – соответствующая периодическая дзета-функция Гурвица, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$. Положим

$$\kappa = \sum_{j=1}^r l_j$$

и пусть $k = [k_{11}, \dots, k_{1l_1}, \dots, k_{r1}, \dots, k_{rl_r}]$ – наименьшее общее кратное чисел $k_{11}, \dots, k_{1l_1}, \dots, k_{r1}, \dots, k_{rl_r}$. Определим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a_{111} & a_{112} & \dots & a_{11l_1} & \dots & a_{1r1} & a_{1r2} & \dots & a_{1rl_r} \\ a_{211} & a_{212} & \dots & a_{21l_1} & \dots & a_{2r1} & a_{2r2} & \dots & a_{2rl_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k11} & a_{k12} & \dots & a_{k1l_1} & \dots & a_{kr1} & a_{kr2} & \dots & a_{kr l_r} \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ – алгебраически независимые числа над полем $\mathbb{Q}$, $\text{rang}(B) = \kappa$, для каждого $h = 0, 1, \dots, n$ функция $F_h : \mathbb{C}^{N\kappa} \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна, а функция

$$\begin{aligned} G(s) = \sum_{h=0}^n s^h F_h(\zeta(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \zeta'(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \\ \zeta'(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \\ \zeta'(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \\ \zeta'(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r})) \end{aligned}$$

равна нулю тождественно. Тогда $F_h \equiv 0$ при $h = 0, 1, \dots, n$.

Мы докажем лишь теорему 3, так как теорема 2 является частным случаем теоремы 3 с $l_1 = \dots = l_r = 1$, а теорема 1 является следствием теоремы 2 с $r = 1$.

2. Совместная теорема универсальности. Доказательство теоремы 3 опирается на совместную теорему универсальности для дзета-функций $\zeta(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r})$, полученную в [21]. Через $\text{meas}\{A\}$ будем обозначать меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ – алгебраически независимые числа над полем $\mathbb{Q}$, $\text{rang}(B) = \kappa$, для каждой пары $j = 0, 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$ K_{jl} – компактное подмножество полосы $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$, обладающее связным дополнением, а $f_{jl}(s)$ – непрерывная функция в K_{jl} и аналитическая внутри K_{jl} . Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{1 \leq l \leq l_j} \sup_{s \in K_{jl}} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl}) - f_{jl}(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Отметим, что Воронин открыл [22], [24], см. также [6], [7], универсальность дзета-функции Римана, он также впервые доказал [8], см. также [6], [7], совместную теорему универсальности для L -функций Дирихле.

3. Лемма о плотности. Определим отображение $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{N\kappa}$ формулой

$$\begin{aligned} u(t) = & (\zeta(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \\ & \zeta'(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \\ & \zeta'(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \\ & \zeta'(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \\ & \zeta'(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r})), \end{aligned}$$

где $1/2 < \sigma < 1$.

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ – алгебраически независимые числа над полем $\mathbb{Q}$ и $\text{rang}(B) = \kappa$. Тогда образ $u(\mathbb{R})$ всюду плотен в $\mathbb{C}^{N\kappa}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $|\cdot|_{\mathbb{C}^{N\kappa}}$ обозначим расстояние в пространстве $\mathbb{C}^{N\kappa}$. Пусть

$$\begin{aligned} \underline{b} = & (b_{011}, b_{111}, \dots, b_{N-1,11}, \dots, b_{01l_1}, \\ & b_{11l_1}, \dots, b_{N-1,1l_1}, \dots, b_{0r1}, b_{1r1}, \dots, b_{N-1,r1}, \dots, b_{0rl_r}, b_{1rl_r}, \dots, b_{N-1,rl_r}) \end{aligned}$$

– произвольная точка пространства $\mathbb{C}^{N\kappa}$. Докажем, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует последовательность действительных чисел $\{\tau_m\}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m = +\infty$, такая, что

$$|u(\tau_m) - \underline{b}|_{\mathbb{C}^{N\kappa}} < \varepsilon.$$

Для этого достаточно показать, что найдется такая последовательность $\{\tau_m\}$, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m = +\infty$, и что при $h = 0, 1, \dots, N-1$, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$ имеет место неравенство

$$|\zeta^{(h)}(\sigma + i\tau_m, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl}) - b_{hjl}| < \frac{\varepsilon}{N\kappa}.$$

Для этой цели определим полином

$$P_{Njl}(s) = \sum_{h=0}^{N-1} \frac{b_{hjl}s^h}{h!}, \quad j = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, l_j.$$

Тогда имеем

$$P_{Njl}^{(h)}(0) = b_{hjl}, \quad h = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, l_j.$$

Фиксируем число σ_1 , $1/2 < \sigma_1 < 1$, и берем компактное подмножество K полосы D так, чтобы точка σ_1 была его внутренней точкой. Тогда в силу теоремы 4 найдется последовательность действительных чисел $\{\tau_m\}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m = +\infty$, такая, что

$$\sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{1 \leq l \leq l_j} \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau_m, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl}) - P_{Njl}(s - \sigma_1)| < \frac{\varepsilon \delta^N}{2^N N! N\kappa},$$

где δ – расстояние числа σ_1 до границы множества K . Отсюда, применяя интегральную теорему Коши, получаем, что

$$\begin{aligned} & |\zeta^{(h)}(\sigma_1 + i\tau_m, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl}) - b_{hjl}| \\ &= \left| \frac{h!}{2\pi i} \int_{|s - \sigma_1| = \delta/2} \frac{\zeta(s + i\tau_m, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl}) - P_{Njl}(s - \sigma_1)}{(s - \sigma_1)^{h+1}} ds \right| < \frac{\varepsilon}{N\kappa} \end{aligned}$$

для всех $h = 0, 1, \dots, N-1$, $j = 1, \dots, r$ и $l = 1, \dots, l_j$. Как было замечено выше, это доказывает лемму.

4. Доказательство теоремы 3. Начнем со следующего утверждения.

ЛЕММА 2. Пусть $F: \mathbb{C}^{N\kappa} \rightarrow \mathbb{C}$ – непрерывная функция и

$$\begin{aligned} & F(\zeta(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \zeta'(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \\ & \quad \zeta'(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \\ & \quad \zeta'(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \\ & \quad \zeta'(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \dots, \zeta^{(N-1)}(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r})) \equiv 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда $F \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, что $F \not\equiv 0$. Тогда найдется точка $\underline{a} \in \mathbb{C}^{N\kappa}$ такая, что $F(\underline{a}) \neq 0$. Из непрерывности функции F вытекает существование ограниченной области $G \subset \mathbb{C}^{N\kappa}$ такой, что $\underline{a} \in G$ и для всех точек $\underline{s} \in G$

$$|F(\underline{s})| \geq c > 0. \quad (2)$$

Пусть $1/2 < \sigma < 1$. Тогда в силу леммы 1 найдутся значения t такие, что

$$\begin{aligned} & (\zeta(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \zeta'(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \\ & \quad \zeta'(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + it, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \\ & \quad \zeta'(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \\ & \quad \zeta'(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + it, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r})) \in G. \end{aligned}$$

Однако это и (2) противоречит равенству (1). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Не ограничивая общности, можем считать, что $F_0 \not\equiv 0$. Тогда найдется ограниченная область $G_0 \subset \mathbb{C}^{N\kappa}$ такая, что для всех точек $\underline{s} \in G_0$ будет выполняться неравенство

$$|F_0(\underline{s})| \geq c_0 > 0.$$

Пусть $h_0 = \max_{0 \geq h \geq n} \{h : \sup_{\underline{s} \in G_0} |F_h(\underline{s})| \neq 0\}$. Если $h_0 = 0$, то утверждение теоремы вытекает из леммы 2.

Предположим, что $h_0 > 0$. Тогда найдется подобласть $G_1 \subset G_0$ такая, что

$$\inf_{\underline{s} \in G_1} |F_{h_0}(\underline{s})| \geq c_1 > 0. \quad (3)$$

Ввиду леммы 1 существует такая последовательность действительных чисел $\{\tau_m\}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m = +\infty$, что при $1/2 < \sigma < 1$

$$\begin{aligned} & (\zeta(\sigma + i\tau_m, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \\ & \quad \zeta'(\sigma + i\tau_m, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + i\tau_m, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta(\sigma + i\tau_m, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \\ & \quad \zeta'(\sigma + i\tau_m, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + i\tau_m, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(\sigma + i\tau_m, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \\ & \quad \zeta'(\sigma + i\tau_m, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + i\tau_m, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta(\sigma + i\tau_m, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \\ & \quad \zeta'(\sigma + i\tau_m, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + i\tau_m, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r})) \in G_1. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание (3), находим, что при $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & |\sigma + i\tau_m|^{h_0} |F_{h_0}(\zeta(\sigma + i\tau_m, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \\ & \zeta'(\sigma + i\tau_m, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + i\tau_m, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta(\sigma + i\tau_m, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \\ & \zeta'(\sigma + i\tau_m, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + i\tau_m, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(\sigma + i\tau_m, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \\ & \zeta'(\sigma + i\tau_m, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + i\tau_m, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta(\sigma + i\tau_m, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \\ & \zeta'(\sigma + i\tau_m, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + i\tau_m, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r}))| \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Так как степени других слагаемых, отличных от нуля, в определении функции $G(s)$ меньше чем h_0 , отсюда получаем противоречие тому, что $G(s) \equiv 0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Проблемы Гильберта: Сб.*, ред. П. С. Александров, Наука, М., 1969.
- [2] A. Ostrowski, “Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen”, *Math. Z.*, **8**:3–4 (1920), 241–298.
- [3] А. Г. Постников, “О дифференциальной независимости рядов Дирихле”, *Докл. АН СССР*, **66**:4 (1949), 561–564.
- [4] А. Г. Постников, “Обобщение одной из задач Гильберта”, *Докл. АН СССР*, **107**:4 (1956), 512–515.
- [5] С. М. Воронин, “О дифференциальной независимости ζ -функций”, *Докл. АН СССР*, **209**:6 (1973), 1264–1266.
- [6] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994.
- [7] С. М. Воронин, *Избранные труды: Математика*, ред. А. А. Карацуба, М., 2006.
- [8] С. М. Воронин, “О функциональной независимости L -функций Дирихле”, *Acta Arith.*, **27** (1975), 493–503.
- [9] A. Laurinćikas, “Distribution de values de certaines séries de Dirichlet”, *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A*, **289** (1979), 43–45.
- [10] A. Laurinćikas, “Sur les séries de Dirichlet et les polynômes trigonométriques”, *Séminaire de Théorie des Nombres*, 1978–1979, Exp. № 24, CNRS, Talence.
- [11] А. П. Лауринчикас, “Распределение значений производящих рядов Дирихле мультипликативных функций”, *Литовский матем. сб.*, **22**:1 (1982), 101–111.
- [12] A. Laurinćikas, *Limit theorems for the Riemann zeta-function*, Math. Appl., **352**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.
- [13] A. Reich, “Zetafunktionen und Differenzen-Differentialgleichungen”, *Arch. Math. (Basel)*, **38** (1982), 226–235.
- [14] R. Garunkštis, A. Laurinćikas, “On one Hilbert’s problem for the Lerch zeta-function”, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **65** (79) (1999), 63–68.
- [15] R. Garunkštis, A. Laurinćikas, “The Lerch zeta-function”, *Analytical methods of analysis and differential equations*, *Integral Transform. Spec. Funct.*, **10**:3–4 (2000), 211–226.
- [16] A. Laurinćikas, K. Matsumoto, “The joint universality and the functional independence for Lerch zeta-functions”, *Nagoya Math. J.*, **157** (2000), 211–227.
- [17] A. Laurinćikas, R. Garunkštis, *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [18] A. Laurinćikas, K. Matsumoto, “Joint value-distribution theorems on Lerch zeta-functions. II”, *Liet. Mat. Rink.*, **46**:3 (2006), 332–350.
- [19] A. Laurinćikas, K. Matsumoto, “Joint value-distribution theorems on Lerch zeta-functions. III”, *Proc. 4-th Palanga Conf.* (to appear).

- [20] V. Garbaliuskienė, A. Laurinčikas, “Some analytic properties for L -functions of elliptic curves”, Тр. ин-та матем., **13**, 1, НАН Беларуси, 2005, 1–8.
- [21] J. Steuding, *Value-distribution of L -functions and allied zeta-functions – with an emphasis on aspects of universality*, Habilitationsschrift, J. W. Goethe-Universität, Frankfurt, 2003.
- [22] А. Лауринчикас, *Совместная универсальность периодических дзета-функций Гурвица*, препринт, Вильнюсский университет, 2006.
- [23] С. М. Воронин, “Теорема о распределении значений дзета-функции Римана”, *Докл. АН СССР*, **221**:4 (1975), 771.
- [24] С. М. Воронин, “Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:3 (1975), 475–486.

А. Лауринчикас

Вильнюсский университет, Литва

E-mail: antanas.laurincikas@maf.vu.lt

Поступило

25.12.2006